تعميم نظام $M/G/1/\infty$ بالاعتماد على أزمنة تخديم تجديد ماركوف

سعاد زرير*   آية خانطوماني   د. هادية طهماز *****

(الإيداع: 15 آيلول 2025، القبول: 16 تشرين الثاني 2025)

الملخص:

يعد نظام $M/G/1$ من الأنظمة الأساسية في نظرية صفوف الانتظار حيث يستخدم في تحليل وتقييم أداء أنظمة ذات أزمنة تخديم مستقلة بتوزيع احتمالي عام، غير أنّ بعض التطبيقات العملية تستدعي دراسة حالات تتعامل مع أزمنة تخديم مرتبطة وذلك نتيجة تنوع الخدمات المقدمة التي تتطلب أزمنة عشوائية مختلفة، وبالتالي لابد من استخدام أداة جديدة تعالج هذا النوع من الحالات.

تميز هذا البحث بتقديم إطار رياضي متكامل للنموذج المطور $M/GMR/1$ مع تعميم النتائج عبر التحليل النظري والتطبيقي، حيث هدف إلى تعميم الأسس النظرية للنموذج $M/G/1$، من خلال تمثيل أزمنة الخدمة في هذا النموذج باستخدام طوري تجديد ماركوف. يتيح هذا التمثيل اشتقاق الصيغ الرياضية العامة لكل من متجه الاحتمالات π_{0_i} ومتجه الاحتمالات العام π_{n_i} بالاعتماد على المتجهات المستقرة والدوال المولدة $\Pi_i\ (Z)$. كما تم أيضاً استنتاج العلاقات الرياضية لمقاييس أداء النظام المقترح.

وأخيراً تم مناقشة الحالة الخاصة لأزمنة تخديم لها التوزيع الأسي لكل نوع من الزبائن بمعدلات وصول مختلفة حسب أنواع الزبائن، تم توضيح النتائج من خلال أمثلة وتطبيقات، تمت فيها أيضاً التحقق من ملاءمة توزيع بواسون لأزمنة الوصول لكل نوع من الزبائن. تم التوصل إلى أن النظام المقترح $M/GMR/1$هو تعميم لنظام الخدمة $M/G/1$ كونه يتعامل مع أزمنة تخديم مرتبطة ويتمتع بخواص هذا النظام.

الكلمات المفتاحية: طوري تجديد ماركوف، نظام الخدمة M/G/1، كيرنل شبه ماركوف، الدوال المولدة $\Pi_i\ (Z)$، المتجه الاحتمالي π_{n_i}، مقاييس الأداء.

*طالبة ماجستير – قسم الإحصاء الرياضي– كلية العلوم – جامعة حلب.

** مدرس – قسم الإحصاء الرياضي – كلية العلوم – جامعة حلب .

*** مدرس – قسم الإحصاء الرياضي – كلية العلوم – جامعة حلب .

Generalization of the M/G/1/∞ Queueing System Based on Markov Renewal Service Times

Souad Zarir*   Aya Khantoumani   Dr. Hadia Tahmaz*****

(Received: 15 September 2025, Accepted: 16 November 2025)

Abstract:

The $M/G/1$ queueing system is a fundamental model in queueing theory, used to analyze and evaluate the performance of systems that manage customer flows through a single server with service times following a general probabilistic distribution. However, there are scenarios requiring the handling of correlated random service times, as these systems provide various services and need different random service times. Thus, a new tool is needed to address such cases.

This research presents an integrated mathematical framework for the developed $M/GMR/1$ model, generalizing the results through theoretical and applied analysis. It aims to generalize the theoretical foundations of the $M/G/1$ model by representing service times in this model using two Markov renewal phases. This representation allows the derivation of general mathematical formulas for both the probability vector π_{0_i} and the general probability vector π_{n_i}based on stable vectors and generating functions $\sqcap_i\,(Z)$. Mathematical relationships for the performance metrics of the proposed system are also derived.

Finally, the special case of service times with an exponential distribution for each customer type, with different arrival rates, is discussed. The results are illustrated through examples and applications, which also verify the suitability of the Poisson distribution for the arrival times for each customer type. It is concluded that the proposed $M/GMR/1$ system is a generalization of the $M/G/1$ service system, as it deals with linked service times and possesses its properties.

Keywords: Markov renewal processes, $M/G/1$ Queue, semi-Markov kernel, Markov renewal generating function.

*Master's student – Department of Mathematical Statistics – Faculty of Science – University of Aleppo.

**Lecturer – Department of Mathematical Statistics – Faculty of Science – University of Aleppo.

***Lecturer – Department of Mathematical Statistics – Faculty of Science – University of Aleppo.

1- مقدمة Introduction:

يعد نظام $M/G/1$ من النماذج المهمة في نظرية صفوف الانتظار، يُستخدم لتحليل أداء الأنظمة التي تتعامل مع وصول الزبائن بشكل عشوائي عبر خادم واحد. يشير M إلى أن وصول الزبائن يتبع عملية بواسون، حيث يُفترض أن أزمنة ما بين الوصول تتبع توزيعاً أسياً، مما يعني وصولهم بشكل مستقل وعشوائي. بينما G تدل على أن أزمنة الخدمة يمكن أن تتبع أي توزيع احتمالي عام مما يسمح بالمرونة في نمذجة مختلف أنواع الأزمنة التي يحتاجها الزبائن للحصول على الخدمة[1] [2].

تتضمن الدراسات المتعلقة بنظام M/G/1 البحث في جوانب متعددة مثل حساب مقاييس الأداء الرئيسية للنظام، وفحص كيفية تحسين العمليات لتقليل أزمنة الانتظار وزيادة كفاءة النظام تعتبر هذه الدراسات ذات أهمية خاصة في التصميم والتحسين المستمر للأنظمة التي تعتمد على معالجة متتابعة للعملاء أو الطلبات.[3] [4]

في هذا البحث، سيتم توسيع المفاهيم النظرية الأساسية في نظام M/G/1، من خلال اقتراح تمثيل أزمنة التخديم وفق طوري تجديد ماركوف، كما تم استنتاج مصفوفة الانتقال P واستنتاج الصيغ الرياضية العامة للمتجه π_{n_i} و π_{0_i} لكل نوع من الزبائن. وأخيراً تم مناقشة الحالة الخاصة لأزمنة تخديم أسية لكل نوع من الزبائن وتوضيح النتائج من خلال أمثلة وتطبيقات بهدف تحسين أداء الأنظمة وتوفير رؤى حول كيفية إدارة الطوابير بشكل أكثر فعالية.

2- مشكلة البحث The Problem of Research:

يعتبر النظام M/G/1 من الأنظمة الهامة في نظرية صفوف الانتظار الذي يستخدم لتحليل وتقييم أداء الأنظمة التي تتعامل مع تدفقات العملاء عبر خادم واحد، والذي يتعامل مع أزمنة تخديم مستقلة بتوزيع احتمالي عام، وقد يصادفنا دراسة حالات تتطلب التعامل مع أزمنة تخديم عشوائية مرتبطة غير مستقلة كون هذه الأنظمة تقدم خدمات مختلفة وتتطلب أزمنة عشوائية مختلفة، وبالتالي لابد من استخدام أداة جديدة تعالج هذا النوع من الحالات.

3- أهمية البحث (Importance of the Research):

يتميز هذا البحث بكونه يعالج مسائل جديدة في مسائل أنظمة الخدمة بمخدم واحد، إذ يسلط الضوء على نظام خدمة متطور تعتبر فيه أزمنة التخديم كطوري تجديد ماركوف لإيجاد النموذج المعمم M/GMR/1 تكون فيه أزمنة التخديم متعلقو ببعضها البعض كما يساهم في تحسين أداء التخديم لهذا النوع من النموذج بأقل زمن انتظار للزبائن

4- أهداف البحث The Objectives of Research:

1- توسيع المفاهيم النظرية للنموذج $M/G/1$بالاعتماد على طوريات تجديد ماركوف.

2- تمثيل أزمنة تخديم نموذج $1M/G/$ بطوري تجديد ماركوف.

3- استنتاج مصفوفة الانتقال P بالاعتماد على نهاية مصفوفة كيرنل شبه ماركوف للنظام المدروس.

4- استنتاج الصيغة الرياضية العامة للمتجه π_{n_i}.

5- استنتاج الصيغة الرياضية لـ π_{0_i} لكل نوع من الزبائن بالاعتماد على تعريف الدوال المولدة $\Pi_i\ (Z)$.

6- مناقشة الحالة الخاصة لأزمنة تخديم أسية لكل نوع من الزبائن وتوضيح النتائج من خلال أمثلة وتطبيقات.

5- الدراسة النظرية Literature Study:

أولاً: صفوف الانتظار (Queuing): [6] [5]

تعتبر مشكلة الانتظار في صفوف الانتظار من أكثر المشاكل التي نصادفها في حياتنا اليومية، كالزبائن في متجر تنتظر المحاسبة، ومرضى عند طبيب تنتظر العلاج، إذ يتتابع وصول العناصر التي تحتاج الخدمة إلى مراكز تقديم الخدمة.

إن دراسة أو معالجة مثل هذا النوع من الأنظمة يكون معقداً، إذ إنه في معظم الحالات لا تكون أزمنة إنجاز طلبات الخدمة متساوية بل متقلبة بشكل عشوائي، ويتأثر وصول طلبات الخدمة بعوامل عشوائية. فالهدف تشغيل هذه المراكز في مستوى مقبول من الخدمة ضمن مستوى معقول من التكاليف من خلال وصف سلوك كل نظام حسب طبيعة الخدمة.

بفرض أن الزبائن $K_1, K_2, \dots$ تصل إلى نظام الخدمة في اللحظات العشوائية $t_0, t_1, t_2, \dots$، وبفرض أن $\alpha_n = t_n - t_{n-1}, \forall n \geq 1$ تمثل أزمنة الوصول البينية وهي متغيرات عشوائية مستقلة.

دالة توزيعها: $A(X) = P(\alpha_n < X)$ وتوقعها: $a = E(\alpha_n) = \int_0^\infty X dA(X) < \infty$

وبفرض أن β_n أزمنة خدمة الزبون K_n، وهي متغيرات عشوائية غير سالبة ومستقلة ولها التوزيع نفسه، دالة توزيعها: $B(X) = P(\beta_n < X)$ بتوقع الرياضي: $b = E(\beta_n) = \int_0^\infty X dB(X) < \infty$

عند دراسة أنظمة الانتظار نهتم بالتغير الزمني لطول الطابور $X(t)$. حيث نقصد بطول الطابور عدد الطلبات الموجودة في نظام الخدمة في اللحظة t، هذا يعني التي يتم تخديمها والتي في غرفة الانتظار. تشكل $(X(t))_{t\in I=[0,\infty)}$ عملية عشوائية مع زمن مستمر.

ثانياً: نظام الخدمة $M/G/1/\infty$ [7] [6]

إن أزمنة الوصول البينية α_n في هذا النظام تتبع التوزيع الأسي مع الوسيط $\lambda > 0$:

$$A(X) = P(\alpha_n < X) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda X}, & X \geq 0, \\ 0 \quad , & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

إذا افترضنا أنه في اللحظة $t = 0$ بدأت خدمة طلب جديد، فعندئذٍ يمكن أن نعرف عملية عشوائية مع زمن منقطع، وذلك بأن نضع:

$$X_0 = X(0+)\ , X_n = X(\tau_n + 0), \forall n \in N$$

نميز حالتين: **الحالة (1)**: إذا كان $X_{n-1} > 0$ عندئذٍ يكون من أجل $n \in N$:

$$X_n = X_{n-1} + U_n - 1$$

الحالة (2): إذا كان $X_{n-1} = 0$ بعد مغادرة الزبون K_{n-1} فإن جهاز الخدمة يكون شاغراً. في هذه الحالة يكون:

$$X_{n-1} = U_n \quad , \forall n \in N$$

أي أن:

$$X_n = g(X_{n-1}, U_n) = \begin{cases} X_{n-1} + U_n - 1, & X_{n-1} > 0 \\ U_n \quad , & X_{n-1} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

تمثل X_n طول صف الانتظار مباشرة بعد مغادرة الطلب K_n. وأن U_n متغيرات عشوائية تدل على عدد الطلبات الجديدة التي تصل إلى النظام أثناء خدمة العميل أو الزبون n.

مبرهنة: بفرض $(U_n)_{n\in N}$ متتالية من المتغيرات العشوائية الحقيقية المستقلة ولها التوزيع الاحتمالي نفسه q_j:

$$q_j = P(U_n = j) = \int_{X=0}^{\infty} e^{-\lambda X} \frac{(\lambda X)^j}{j!}\, dB(X), \quad \forall j = 0,1,2,..$$

فإن احتمالات الانتقال وفقاً لـ q_j تصبح بالشكل:

$$P_{ij} = P(X_n = j | X_{n-1} = i) = \begin{cases} P(U_n = j), & i = 0, j \geq 0 \\ P(U_n = j - i + 1, & i \geq 1, j \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} q_j, & i = 0, j \geq 0 \\ q_{j-i+1}, & i \geq 1, j \geq 0 \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases} \qquad (2)$$

أي أن مصفوفة الانتقال تكتب بالشكل:

$$P=\begin{bmatrix} q_o & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_o & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q_o & q_1 & q_2 & q_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & q_o & q_1 & q_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & q_o & q_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

ثالثاً: طوريات تجديد ماركوف (Markov Renewal Processes):

تعتبر طوريات التجديد الماركوفية تعميم لطوريات التجديد تتميز بأن سلسلة الأزمنة لها ليست مستقلة ومتطابقة بالتوزيع، درست طوريات التجديد الماركوفية لأول مرة عام (1961) على يد الباحث Pyke وطبقت على أنظمة الخدمة $M\backslash G\backslash 1$ وعلى مسائل اصلاح الآليات [8].

تعريف طوري ماركوف (Markov Process):[9]

نقول عن طوري عشوائي $\{X(t); t\in t\}$ أنه يمثل طوري ماركوف، من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ وكل من $t_0,t_1,\cdots,t_n\in T$ مع $t_0<t_1<\cdots<t_n$ ومن أجل $y,x,x_{n-2},\dots,x_1,x_0\in\mathbb{R}$، تكون العلاقة التالية محققة:

$$P\left(X_{t_n}=y \mid X_{t_{n-1}}=x, X_{t_{n-2}}=x_{n-2},\dots,X_{t_1}=x_1,X_{t_0}=x_0\right)$$
$$=P\left(X_{t_n}=y \mid X_{t_{n-1}}=x\right)$$

تدعى هذه الخاصية بخاصية ماركوف.

طوري تجديد ماركوف (Markov Renewal Process):[10]

بفرض أن $(X_n,T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ سلسلة من المتغيرات العشوائية فيها$\{\dots S=\{0,1,2,$; $X_n\in S$ تمثل حالات لسلسلة ماركوف وT_n أزمنة التجديد للحالات X_n، عندئذ نقول عن هذه السلسلة أنها طوري تجديد ماركوفي بفضاء حالات S اذا تحقق الشرط التالي: $P(X_{n+1}=j,T_{n+1}-T_n\le t|X_0,\dots,X_n=i;T_0,\dots,T_n)$

$$=P(X_{n+1}=j,T_{n+1}-T_n\le t|X_n=i)=Q_{ij}(t)$$

وذلك من أجل كل $i,j\epsilon E, T_0,\dots,T_n\epsilon\mathbb{R}_+$ وبالتالي المصفوفة التالية: $Q:=\{Q_{ij}(t); i,j\in E,,t\epsilon\mathbb{R}_+\}$ تدعى بنواة شبه ماركوف semi-Markov kernel على فضاء الحالاتS .

رابعاً: النظام المقترح $M\backslash GMR\backslash 1$:

يعد هذا النظام تعميم للنظام $M\backslash G\backslash 1$ حيث نقترح فيه أن أزمنة الخدمة تمثل طوري تجديد ماركوف وأن توزيع كل نوع له توزيع احتمالي عام. كما نفترض أن أزمنة ما بين الوصول أسية بالوسيط λ في الحالة العامة. عندئذٍ نستطيع أن نوصف النظام الجديد كما يلي:

بفرض أن $\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n$ سلسلة من أزمنة المغادرة المتعاقبة للزبائن حيث $n\epsilon\mathbb{N}$ $\tau_n\epsilon\mathbb{R}^+$. وبفرض أن X_n تمثل طول الطابور بعد مغادرة الزبون (أي يوجد τ_n مغادرة) حيث $X_n\epsilon\mathbb{N}$، وبفرض أن β_n زمن تخديم الزبون n حيث $\beta_n\epsilon\mathbb{R}^+$، وبفرض أن Z_n تمثل نوع الزبون بعد τ_n مغادرة حيث $Z_n\epsilon E\{1,2,\dots,m)$، عندئذٍ الثلاثية (X_n,Z_n,β_n) تمثل طوري تجديد ماركوف بكيرنل $Q(t)$ حيث:

$$Q(t)=P[X_n=K,Z_n=j,\tau_n-\tau_{n-1}\le t|X_{n-1}=l,Z_{n-1}=i]$$

$$= \begin{cases} \int_0^t \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^{k-l+1}}{(k-l+1)!} dB_{ij}(x) & for\ \ l > 0 \\ \int_0^t \left(1 - e^{-\lambda(t-x)}\right) \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!} & for\ \ l = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

حيث $B_{ij}(x)$ هي كيرنل طوري تجديد ماركوف لأزمنة الخدمة وتعطى بالعلاقة:

$$B_{ij}(x) = [B_{ij}(t)]_{i,j\epsilon E} = \left[P_{ij}F_{ij}(t)\right]$$

وبالتالي نستطيع إيجاد مصفوفة الانتقال بخطوة واحدة P بالاعتماد على العلاقة:

$$P = \lim_{t\to\infty} Q(t)$$

$$\Rightarrow P = Q(\infty) = \begin{cases} E_k(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^{k-l+1}}{(k-l+1)!} dB_{ij}(x) & for\ \ l > 0 \\ G_k(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!} dB_{ij}(x) & for\ \ l = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

أي أن $Q(t)$ تصبح بالشكل:

$$Q(t) = \begin{bmatrix} G_0(t) & G_1(t) & G_2(t) & G_3(t) & \dots \\ E_0(t) & E_1(t) & E_2(t) & E_3(t) & \cdots \\ 0 & E_0(t) & E_1(t) & E_2(t) & \cdots \\ 0 & 0 & E_0(t) & E_1(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & E_0(t) & \cdots \end{bmatrix}$$

وبالتالي مصفوفة الانتقال P تصبح بالشكل:

$$P = Q(\infty) = \begin{bmatrix} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & \dots \\ E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & \cdots \\ 0 & E_0 & E_1 & E_2 & \cdots \\ 0 & 0 & E_0 & E_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & E_0 & \cdots \end{bmatrix}$$

بحيث $E_k = \int_0^\infty \frac{e^{\lambda x}(\lambda x)^k}{k!} dB(x)$

1- استنتاج π_{n_i} (متجه احتمالات أن يكون النظام المقترح فيه n زبون بالنسبة لكل نوع):

بفرض أن π يمثل التوزيع المستقر لسلسلة ماركوف (X_n, Z_n) بحيث $K \in \mathbb{N}\ ;\ 0 \le \pi_k \le 1$ ونستطيع ايجاد π من خلال: $;\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots,)$ $\quad \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1\pi\ Q(\infty) = \pi$;

وبالتالي ينتج لدينا من المعادلات الأخيرة أن:

$$\pi_n = \pi_0 E_n + \sum_{k=1}^{n+1} \pi_k E_{n+1-k} \quad ;n = 0,1,2, \dots \qquad (5)$$

ويمكن كتابتها بشكل آخر: $\pi_n = \pi_0 E_n + \pi_{n+1} E_n \qquad (6)$

حيث π_0, π_n, π_{n+1} متجهات احتمالات الأنواع، E_n مصفوفة من المرتبة $(m * m)$

فمن أجل $n = 0$ ينتج لدينا بالتعويض في المعادلة الأخيرة:

$$\pi_0 = \pi_0 E_0 + \pi_1 E_0 \Rightarrow \pi_1 = (I - E_0)E_0^{-1}\pi_0 \qquad (7)$$

حيث I المصفوفة الواحدية من المرتبة $(m * m)$

وبتعميم العلاقة (5) لتشمل أكثر من نوع من الزبائن تصبح بالشكل:

$$\sum_{i=1}^{m}\pi_n=\sum_{i=1}^{m}\pi_{0_i}E_{n_{ij}}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n+1}\pi_{k_i}E_{(n+1-k)_{ij}}\quad ;j=1,2,\dots,m \qquad (8)$$

وفي حال $n=1$ تصبح العلاقة (6) بالشكل:

$$\pi_1=\pi_0E_1+\pi_2E_1\Longrightarrow\pi_2E_1=\pi_1-\pi_0E_1$$

$$\Longrightarrow\pi_2=\pi_1E_1^{-1}-\pi_0E_1E_1^{-1}=\pi_1E_1^{-1}-\pi_0 \qquad (9)$$

2- توزيع زمن المغادرة Departure Distribution

سنحدد توزيع عدد الزبائن المتبقين خلف الزبون المغادر للنظام في حالة الاستقرار، رمزنا لـ X_n بعدد الزبائن الذين هم خلف الزبون المغادر رقم-n، وبالاعتماد على النظام $M\backslash G\backslash 1$، نلاحظ أن هناك صيغة تربط بين X_n وَ X_{n+1} من خلال ملاحظة أن عدد الزبائن الذين هم خلف الزبون رقم $n+1$ يساوي عدد الزبائن الموجودين عندما يغادر الزبون رقم n ناقصاً منه واحد بالإضافة إلى عدد الزبائن الذين سيصلون خلال زمن خدمته والذي يمثل متغير عشوائي U_{n+1} أي أن:

$$X_{n+1}=X_n+U_{n+1}-1 \qquad (10)$$

وفي الحالة الخاصة عندما يكون $X_n=0$ يكون :

$$X_{n+1}=U_{n+1} \qquad (11)$$

ومن العلاقتين (10) و(11) نلاحظ أن $(X_n)_{n\geq 0}$ تمثل سلسلة ماركوف فيكون X_{n+1} تعتمد على X_n فقط. ففي الحالة المستقرة نرمز لـ Y_n بالمتغير العشوائي الذي يمثل التوزيع المستقر للعملية العشوائية $(\pi_n)_{n\geq 0}$، أي أن الاحتمالات المستقرة تكون

$\pi_n=P(Y_n=n)$ وهو يمثل احتمال عدد الزبائن المتبقية بعد مغادرة زبون تمت خدمته في النظام، عندها نعرف التابع المولد الاحتمالي لـ Y_n:

$$\sqcap_n\ (Z)=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{n_i}Z^n \qquad i=1,2,\dots,m \qquad (12)$$

كما أن E_n تشير إلى احتمال عدد الطلبات الجديدة التي تصل إلى النظام أثناء خدمة الزبون-n

$E_n=P(U_n=n)$ عندئذٍ نعرف التابع المولد الاحتمالي لـ U_n لكل نوع i :

$$K_i(Z)=\sum_{n=0}^{\infty}E_{n_i}Z^n \qquad i=1,\dots,m \qquad (13)$$

وبضرب طرفي العلاقة (8) بـ Z^n وأخذ المجموع على n ينتج لدينا مايلي:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{n_i}Z^n=\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{0_i}E_{n_i}Z^n+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{k_i}E_{(n+1-k)_{ij}}Z^n$$

وبالاستفادة من العلاقتين (12) و (13) تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$\sqcap_i\ (Z)=\sum_{i=1}^{m}\pi_{0_i}K_i(Z)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\pi_{k_i}E_{(n+1-k)}\,Z^n$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\pi_{0_i}K_i(Z)+Z^{-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\pi_{k_i}E_{(n+1-k)}\,Z^{n+1-k}Z^{k}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\pi_{0_i}K_i(Z)+Z^{-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=2}^{\infty}\pi_{k_i}Z^{k}*\sum_{n=k}^{\infty}E_{(n+1-k)}\,Z^{n+1-k}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\pi_{0_i}K_i(Z)+Z^{-1}\sum_{i=1}^{m}K_i(Z)\left(\sqcap_i(Z)-\pi_{0_i}\right)\qquad(14)$$

من أجل $i=1$ أي نوع واحد من الزبائن تصبح المعادلة الأخيرة من الشكل:

$$\sqcap_1(Z)=\pi_{0_1}K_1(Z)+Z^{-1}K_1(Z)\left(\sqcap_1(Z)-\pi_{0_1}\right)$$

$$\Rightarrow\sqcap_1(Z)=\frac{\pi_{0_1}K_1(Z)(1-Z^{-1})}{1-Z^{-1}K_1(Z)}=\frac{\pi_0K_1(Z)(1-Z)}{K_1(Z)-Z}\qquad(15)$$

مناقشة الحالة الخاصة: نفترض أن كل نوع له التوزيع الأسي بالوسيط μ_{ij} أي أن دالة توزيع كل نوع $F_{ij}(t)=1-e^{-\mu_{ij}t}$، عندئذ $B_{ij}(x)$ تصبح بالشكل:

$$B_{ij}(x)=\left[P_{ij}F_{ij}(t)\right]=\left[P_{ij}\,(1-e^{-\mu_{ij}t})\right]_{m*m}$$

وأن: $$E_k=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!}\left[P_{ij}\mu_{ij}e^{-\mu_{ij}x}\right]dx\qquad(16)$$

ولكن: $$K(Z)=\sum_{k=0}^{\infty}Z^k\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{K!}\left[P_{ij}\mu_{ij}e^{-\mu_{ij}x}\right]dx$$

$$K(Z)=P_{ij}\mu_{ij}\int_0^{\infty}e^{\lambda*Z}*e^{(\lambda+\mu_{ij})x}dx=P_{ij}\mu_{ij}\int_0^{\infty}e^{(\lambda-\lambda Z+\mu_{ij})x}dx=\frac{P_{ij}\mu_{ij}}{\mu_{ij}+\lambda-\lambda Z}$$

$$\Rightarrow\acute{K}(Z)=\frac{+\lambda P_{ij}\mu_{ij}}{(\mu_{ij}+\lambda-\lambda Z)^2}\Rightarrow\acute{K}(1)=\frac{+\lambda P_{ij}\mu_{ij}}{(\mu_{ij}+\lambda-\lambda)^2}=\frac{\lambda P_{ij}}{\mu_{ij}}=\rho P_{ij}$$

وبالتالي تصبح علاقة الدالة المولدة $\sqcap_1(Z)$ السابقة بالشكل:

$$\sqcap_1(Z)=\frac{\left(1-\rho P_{ij}\right)K_1(Z)(1-Z)}{P_{ij}K_1(Z)-ZP_{ij}}$$

$$\sqcap_1(Z)=\frac{\left(1-\rho P_{ij}\right)\left(\frac{P_{ij}\mu_{ij}}{\mu_{ij}+\lambda-\lambda Z}\right)(1-Z)}{P_{ij}\left(\frac{P_{ij}\mu_{ij}}{\mu_{ij}+\lambda-\lambda Z}\right)-ZP_{ij}}$$

$$=\frac{\left(1-\rho P_{ij}\right)\mu_{ij}(1-Z)}{P_{ij}\mu_{ij}-Z\left(\mu_{ij}+\lambda-\lambda Z\right)}$$

$$\Rightarrow\sqcap(Z)=\frac{\left(1-\rho P_{ij}\right)(1-Z)}{P_{ij}\mu_{ij}-Z(1+\rho-\rho Z)}=\frac{\left(1-\rho P_{ij}\right)(1-Z)}{1-ZP_{ij}^{-1}(\rho-\rho Z+1)}$$

$$=\left(1-\rho P_{ij}\right)(1-Z)\sum_{k=0}^{\infty}\left(ZP_{ij}^{-1}(\rho-\rho Z+1)\right)^k$$

$$=\left(\frac{1-\rho P_{ij}}{P_{ij}}\right)(1-Z)\sum_{k=0}^{\infty}P_{ij}^{-k+1}(\rho-\rho Z+1)^kZ^k$$

$$=\pi_0\sum_{k=0}^{\infty}P_{ij}^{1-k}(1+\rho-\rho Z)^kZ^k-\sum_{k=1}^{\infty}\pi_0P_{ij}^{-k}(\rho-\rho Z+1)^{k-1}Z^k\qquad(17)$$

3- استنتاج π_{0_i} (متجه احتمالات أن يكون النظام المقترح فارغ بالنسبة لكل الأنواع):

من أجل $Z = 1$ تصبح العلاقة $\sqcap_i\ (Z)$ السابقة بالشكل:

$$\sqcap_i\ (1) = \sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} K_i(1) + \sum_{i=1}^{m} K_i(1)\big(\sqcap_i\ (1) - \pi_{0_i}\big)$$

$$\Longrightarrow \sqcap_i\ (1) = \sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} K_i(1) + \sum_{i=1}^{m} K_i(1)\ \sqcap_i\ (1) - \sum_{i=1}^{m} K_i(1)\pi_{0_i}$$

$$\Longrightarrow \sqcap_i\ (1) = \sum_{i=1}^{m} K_i(1)\ \sqcap_i\ (1) \qquad \dots (18)$$

ولكن لدينا: $Z = 1;$ $\qquad K(1) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n Z^n = \sum_{n=0}^{\infty} E_n$

ولكن $\qquad E_k = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{K!} dB(x)$

$$\Longrightarrow K(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{K!} dB(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{K!} \left[P_{ij}\mu_{ij}e^{-\mu_{ij}x}\right] dx$$

$$= P_{ij}\mu_{ij} \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{K!} e^{-(\lambda+\mu_{ij})x} dx = P_{ij}\mu_{ij} \int_0^{\infty} e^{\lambda x} e^{-(\lambda+\mu_{ij})x} dx$$

$$= P_{ij}\mu_{ij} \int_0^{\infty} e^{-(\mu_{ij})x} dx = \frac{P_{ij}\mu_{ij}}{\mu_{ij}} = P_{ij}$$

وبالتالي تصبح العلاقة(18) بالشكل:

$$\sqcap_i\ (1) = \sum_{i=1}^{m} P_{ij}\ \sqcap_i\ (1) \qquad (19)$$

ونكتبها بالشكل المصفوفي التالي: $\qquad \sqcap\ (1) = \sqcap\ (1)\mathrm{P} \qquad (20)$

وبفرض أن المتجه η هو المتجه الاحتمالي الوحيد المستقر للمصفوفة P أي أن:

$$\eta = \eta P \qquad ;\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$$

بالمطابقة بين العلاقتين الأخيرتين ينتج أن $\eta = (1)\ \sqcap$،الآن بالرجوع لعلاقة $\sqcap_i\ (Z)$ نستطيع كتابتها بالشكل:

$$\sqcap_i\ (Z) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} K_i(Z)(1-Z)}{\sum_{i=1}^{m} K_i(Z) - Z}$$

وباستخدام قاعدة أوبيتال على $\sqcap_i\ (Z)$ يصبح لدينا:

$$\sqcap_i\ (Z) = \frac{\sum \pi_{0_i} \acute{K}(Z)(1-Z) + \sum \pi_{0_i} K(Z)(-1)}{\sum \acute{K_i}(Z) - 1}$$

وبتبديل كل $Z = 1$ تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$\sqcap_i\ (1) = \frac{-\sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} K(1)}{-\left(1 - \sum_{i=1}^{m} \acute{K}_i(1)\right)}$$

ولكن استنتجنا أن: $\lim_{Z \to 1} \sqcap_i\ (Z) = \eta$ $\qquad$ وأن: $\qquad \rho_i P_{ij} = \acute{K}_i(1)$

نبدل في العلاقة الأخيرة كلاً من $\sqcap_i\ (1)$ و $K(1)$ و $\acute{K}(1)$ فنحصل على:

$$\eta = \frac{-\sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} P_{ij}}{-\left(1 - \sum_{i=1}^{m} \rho_i P_{ij}\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} P_{ij}}{\left(1 - \sum_{i=1}^{m} \rho_i P_{ij}\right)}$$

ولكن $\sum_{i=1}^{m}\pi_{0_i}P_{ij}=\pi_{0_i}$ و $\sum_{i=1}^{m}\rho_i P_{ij}=\rho_i$ وبالتالي: $\eta_i=\frac{\pi_{0_i}}{1-\rho_i}$

$$\Longrightarrow \pi_{0_i}=\eta_i(1-\rho_i)\quad ;\rho_i=\frac{\lambda}{\mu_{ij}}<1 \qquad (21)$$

زمن الخدمة المتبقي Residual Service Time:

لنفترض أن الزبون سيصل عندما يكون المخدم مشغولاً، ولنرمز للزمن الذي سيستغرقه الزبون في الخدمة بالمتحول العشوائي X وبـ $f_x(.)$ لكثافته الاحتمالية. إن أول ملاحظة لإيجاد $f_x(.)$ هي أن احتمالية وصول الزبون في فترة الخدمة الطويلة هي أكبر من احتمالية وصول الزبون في فترة الخدمة القصيرة، ولذلك إن احتمال كون X يتناسب مع الطول X بالإضافة إلى تكرار أزمنة الخدمة والتي سنرمز لها بالرمز $f_B(x)dx$، ولهذا نستطيع أن نكتب:

$$P\{x\le X\le x+dx\}=f_X(x)dx=Cxf_B(x)dx$$

حيث أن C هو ثابت لتسوية الكثافة الاحتمالية، ولذلك سيكون:

$$C^{-1}=\int_{x=0}^{\infty}xf_B(x)dx=E(B)\Longrightarrow f_X(x)=\frac{xf_B(x)}{E(B)}$$

فإذا علمنا أن الزبون سيصل في زمن خدمة من الطول X فإن لحظة الوصول ستكون نقطة عشوائية من زمن الخدمة هذا، وبالتالي ستتوزع وفق التوزيع المنتظم على المجال $(0,X)$ أي:

$$P\{t\le R\le t+dt|X=x\}=\frac{dt}{x};t\le x$$

وبالتالي:

$$P\{t\le R\le t+dt\}=f_B(t)dt=\int_{x=t}^{\infty}\frac{dt}{x}f_X(x)dx=\int_{x=t}^{\infty}\frac{f_B(x)}{E(B)}dxdt=\frac{1-f_B(x)}{E(B)}dt$$

أي أن: $f_R(t)=\frac{1-f_B(x)}{E(B)}$ ومنه نستطيع أن نوجد $E(R)$ بالشكل:

$$E(R)=\int_{t=0}^{\infty}tf_R(t)dt=\frac{1}{E(B)}\int_{t=0}^{\infty}t\big(1-F_B(t)\big)dt=\frac{E(B^2)}{2E(B)} \qquad (22)$$

مقاييس الأداء للنموذج المقترح:

1− متوسط زمن الانتظار في الطابور W_q:

في أنظمة التخديم التي تعتمد على تخديم زبائنها وفق قاعدة $FCFS$ يضطر الزبون الذي سيأتي إلى النظام أن ينتظر الزبائن الذين هم في الطابور بالإضافة إلى زمن الخدمة المتبقي للزبون الموجود في التخديم، عندئذٍ نفرض أن S يمثل زمن التخديم و L_q يمثل متوسط عدد الزبائن في الطابور وأن W يمثل زمن انتظار الزبون في الطابور عندئذٍ يكون $L_qE(S)$ يمثل متوسط تأخير الزبون بسبب وجود الزبائن في الطابور. كما أن وجود الزبون في التخديم الذي حصل على جزء من خدمته يساهم في تأخير الزبون لوصوله إلى التخديم، وبالتالي متوسط زمن الانتظار في الطابور W_q

1− متوسط زمن الانتظار في الطابور W_q :

$$W_q=\sum_{i=1}^{m}L_qE(S)+\sum_{i=1}^{m}P\left(\text{المخدم مشغول}\right)*E\left[\text{زمن الخدمة المتبقي}\middle|\text{المخدم مشغول}\right]$$

ولكن حسب صيغة ليتل لدينا $L_q=\lambda W_q$ وبالتالي تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$W_q=\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\sum_{i=1}^{m}P\left(\text{المخدم مشغول}\right)*E\left[\text{زمن الخدمة المتبقي}\middle|\text{المخدم مشغول}\right]}{1-\rho_i}\right]$$

نعلم أن احتمال أن يكون المخدم مشغول هو نفسه احتمال ان يكون النظام ممتلئ أي المتمم لأن يكون النظام فارغ أي يساوي $(1-\pi_{0_i})$ (مع الأخذ بعين الاعتبار نوع الزبون)، وأن التوقع الشرطي نستطيع أن نجده من العلاقة التالية:

$$E\left[\text{زمن الخدمة المتبقي}\middle|\text{المخدم مشغول}\right]=\frac{E(S^2)}{2E(S)}=\frac{1+C_B^2}{2}E(S)$$

علماً أن C_B^2 هو معامل التغاير للمتحول العشوائي S ويعطى بالعلاقة: $C_B^2=\frac{var(S)}{E^2(S)}$

وبالتالي نحصل على W_q:

$$W_q=\sum_{i=1}^{m}\frac{1+C_{B_i}^2}{2}\frac{\rho_i}{1-\rho_i}E(S) \qquad (23)$$

علماً أن $E(S)=\eta\left[\frac{p_{ij}}{\mu_{ij}}\right]$ و $E(S^2)=\eta\left[\frac{p_{ij}}{\mu_{ij}^2}\right]$ و $V(S)=E(S^2)-E(S)^2$

2- متوسط زمن الانتظار في النظام W_s:

$$W_s=\sum_{i=1}^{m}\frac{1+C_{B_i}^2}{2}\frac{\rho_i}{1-\rho_i}E(S)+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\mu_{ij}}\ ;\ j=1,2,\dots,m \qquad (24)$$

3- متوسط عدد الزبائن في الطابور L_q:

نستطيع استنتاج L_q كما يلي:

$$L_q=\lambda W_q=\lambda\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{1+C_{B_i}^2}{2}\frac{\rho_i}{1-\rho_i}E(S)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda^2E(S^2)}{2(1-\rho_i)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\rho_i^2+\lambda^2\sigma_{B_i}^2}{2(1-\rho_i)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\rho_i^2+\lambda^2\sigma_{B_i}^2}{2(1-\rho_i)} \qquad (25)$$

4- متوسط عدد الزبائن في النظام L_s:

$$L_s=\lambda W_s=\lambda\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{1+C_{B_i}^2}{2}\frac{\rho_i}{1-\rho_i}E(S)+\frac{1}{\mu_{ij}}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\lambda^2E(S^2)}{2(1-\rho_i)}+\rho_i\right]\Longrightarrow L_s=\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\rho_i^2+\lambda^2\sigma_{B_i}^2}{2(1-\rho_i)}+\rho_i\right] \qquad (26)$$

تطبيق(1): في أحد الفنادق ذات استقبال واحد، يمكن أن يصل النزلاء بشكل عشوائي على مدار اليوم. فإن الزمن الذي يستغرقه موظف الاستقبال لإكمال عملية تسجيل الوصول يختلف من نزيل إلى آخر، فإذا افترضنا أن هناك نوعين من النزلاء وكل واحد منهم يستغرق فرضاً 3 دقائق للأول و 4 دقائق للثاني، وأن معدل وصول النزلاء إلى الفندق بواسوني بمعدل 2 في الدقيقة عندئذٍ يمكن تمثيل هذا الفندق وفق النظام المقترح والمطلوب:

1. حساب احتمال أن يكون الفندق فارغاً لكل نوع من النزلاء (لكلا النوعين):

أي نريد حساب π_{0_i} لدينا $\lambda=2$، $\mu_1=3$، $\mu_2=4$

$$\Longrightarrow\rho_1=\frac{\lambda}{\mu_1}=\frac{2}{3}=0.67 \quad , \quad \rho_2=\frac{\lambda}{\mu_2}=\frac{2}{4}=0.5$$

وبفرض مصفوفة الانتقال P:
$$P=\begin{pmatrix}0.3 & 0.7\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\eta=\begin{pmatrix}\frac{0.7}{0.7+0.6} & \frac{0.6}{0.7+0.6}\end{pmatrix}=(0.54 \quad 0.46)$$

وباستخدام العلاقة:
$$\pi_{0_i}=\eta_i(1-\rho_i)$$

$$i=1\Longrightarrow\pi_{0_1}=\eta_1(1-\rho_1)=0.54(1-0.67)=0.178$$

$$i = 2 \Longrightarrow \pi_{0_2} = \eta_2(1-\rho_2) = 0.46(1-0.5) = 0.23$$

أي أن احتمال أن يكون النظام فارغ بالنسبة للنوع الأول هو $\pi_{0_1} = 0.178$ واحتمال أن يكون النظام فارغ بالنسبة للنوع الثاني هو $\pi_{0_2} = 0.23$

2. احسب احتمال أن يكون النظام ممتلئ:

$$1 - \pi_{0_i} = 1 - (0.178 \quad 0.23) = (0.822 \quad 0.77)$$

أي أن احتمال أن يكون النظام ممتلئ لتقديم خدمة من النوع الأول هو 0.822، واحتمال أن يكون النظام ممتلئ لتقديم خدمة من النوع الثاني يساوي 0.77

3. احسب احتمال أن يكون هناك زبون من النوع الأول أو زبون من النوع الثاني

أي نريد حساب π_{1_i}، نستخدم العلاقة التالية:

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_{0_j} = \sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} E_{0_{ij}} + \sum_{i=1}^{m} \pi_{1_i} E_{0_{ij}} \quad ; m = 2$$

لنحسب أولاً E_0، لدينا

$$E_k = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{K!} dB(x) \quad ; B(x) = \left(P_{ij}(1 - e^{-\mu_{ij} x})\right)$$

$$\Longrightarrow E_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mu_{ij} P_{ij} e^{-\mu_{ij} x} dx = P_{ij}\mu_{ij} \left(\int_0^\infty e^{-(\lambda + \mu_{ij})x} dx \right) = \frac{P_{ij}\mu_{ij}}{\lambda + \mu_{ij}}$$

$$\Longrightarrow E_{0_{ij}} = \begin{pmatrix} \frac{P_{11}\mu_{11}}{\lambda + \mu_{11}} & \frac{P_{12}\mu_{12}}{\lambda + \mu_{12}} \\ \frac{P_{21}\mu_{21}}{\lambda + \mu_{21}} & \frac{P_{22}\mu_{22}}{\lambda + \mu_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(0.3)(3)}{2+3} & \frac{(0.7)(3)}{2+3} \\ \frac{(0.6)(4)}{2+4} & \frac{(0.4)(4)}{2+4} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow E_{0_{ij}} = \left(\frac{P_{ij}\mu_{ij}}{\lambda + \mu_{ij}} \right)_{m*m} = \begin{pmatrix} 0.18 & 0.42 \\ 0.4 & 0.27 \end{pmatrix}$$

ولإيجاد قيم المتجه π_{1_i} نشكل المعادلتين التاليتين من خلال (π_{1_j}):

$$j = 1 \Longrightarrow \pi_{0_1} + \pi_{0_2} = \pi_{0_1} E_{0_{11}} + \pi_{0_2} E_{0_{21}} + \pi_{1_1} E_{0_{11}} + \pi_{1_2} E_{0_{21}}$$

$$j = 2 \Longrightarrow \pi_{0_1} + \pi_{0_2} = \pi_{0_1} E_{0_{12}} + \pi_{0_2} E_{0_{22}} + \pi_{1_1} E_{0_{12}} + \pi_{1_2} E_{0_{22}}$$

$$\begin{cases} 0.178 + 0.23 = 0.178(0.18) + 0.23(0.4) + \pi_{1_1}(0.18) + \pi_{1_2}(0.4) \\ 0.178 + 0.23 = 0.178(0.42) + 0.23(0.27) + \pi_{1_1}(0.42) + \pi_{1_2}(0.27) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.284 = 0.18\pi_{1_1} + 0.4\pi_{1_2} \\ 0.2711 = 0.42\pi_{1_1} + 0.27\pi_{1_2} \end{cases}$$

بحل المعادلتين الأخيرتين حل مشترك ينتج لدينا:

$$\pi_{1_1} = 0.266 \quad \& \quad \pi_{1_2} = 0.590 \Longrightarrow \pi_{1_j} = (0.266 \quad 0.590)$$

4. أوجد مقاييس الأداء للنظام المقترح:

- لنحسب متوسط زمن الانتظار في الطابور

$$W_q = \sum_{i=1}^{m} \frac{1 + C_{B_i}^2}{2} \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} E(S)$$

$$E(S) = \eta \left[\frac{P_{ij}}{\mu_{ij}}\right] = (0.54 \quad 0.46) \begin{pmatrix} \frac{0.3}{3} & \frac{0.7}{3} \\ \frac{0.6}{4} & \frac{0.4}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.295$$

هذا يعني أن متوسط زمن الخدمة لكل زبون هو حوالي 0.295 دقيقة.

كلما كان هذا الرقم أقل، كان النظام أسرع في تقديم الخدمة.

$$E(S^2) = \eta \left[\frac{P_{ij}}{\mu_{ij}^2}\right] = (0.54 \quad 0.46) \begin{pmatrix} \frac{0.3}{9} & \frac{0.7}{9} \\ \frac{0.6}{16} & \frac{0.4}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.0887$$

$$V(S) = E(S^2) - E(S)^2 = 0.0887 - (0.295)^2 = 1.675 * 10^{-3}$$

هذا هو التباين في زمن الخدمة، ويعني أن هناك تفاوت في أوقات الخدمة بين الزبائن.

وجود تباين متوسط يدل على أن بعض الزبائن يخدمون أسرع من غيرهم.

$$C_B^2 = \frac{var(S)}{E^2(S)} = \frac{1.675 * 10^{-3}}{0.0887} = 0.01888$$

هذا هو معامل التغير، وهو منخفض جداً.

وهذا يعني أن زمن الخدمة مستقر جداً، أي أن الخوادم تقدم الخدمة بزمن شبه ثابت.

$$\Rightarrow W_q = \sum_{i=1}^{m} \frac{1 + C_{B_i}^2}{2} \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} E(S)$$

$$= \frac{1 + 0.01888}{2} \left(\frac{0.67}{1 - 0.67}\right)(0.295) + \frac{1 + 0.01888}{2} \left(\frac{0.5}{1 - 0.5}\right)(0.295) = 0.4441$$

يعني أن الزبون ينتظر حوالي 0.4441 دقيقة قبل بدء الخدمة.

نلاحظ بأن هذا الرقم متوسط ويشير إلى وجود بعض الازدحام لكنه ليس كبيراً.

- لحساب متوسط عدد الزبائن في الطابور

$$L_q = \lambda W_q = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2(1 - \rho_i)} = \frac{4(0.0887)}{2(1 - 0.67)} + \frac{4(0.0887)}{2(1 - 0.5)} = 0.8924$$

نلاحظ أن هذا الرقم أقل من 1، مما يعني أن الطابور غالباً ما يكون قصيراً أو شبه فارغ.

- لحساب متوسط زمن الانتظار في النظام W_S:

$$W_s = \sum_{i=1}^{m} \frac{1 + C_{B_i}^2}{2} \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} E(S) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\mu_{ij}}$$

$$= \left(\frac{1 + 0.01888}{2} \left(\frac{0.67}{1 - 0.67}\right)(0.295) + \left(\frac{1}{3}\right)\right) + \left(\frac{1 + 0.01888}{2} \left(\frac{0.5}{1 - 0.5}\right)(0.295) + \left(\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$= 1.0332$$

هذا هو متوسط زمن الانتظار في النظام بالكامل (الانتظار+ الخدمة)، وهنا نلاحظ أن الزبون يقضي حوالي دقيقة واحدة داخل النظام، وهو وقت مقبول نسبياً.

- لحساب متوسط عدد الزبائن في النظام:

$$L_s = \lambda W_s = \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{\lambda^2 E(S^2)}{2(1-\rho_i)} + \rho_i \right]$$

$$\left[\left(\frac{4(0.0887)}{2(1-0.67)} + 0.67 \right) + \left(\frac{4(0.0887)}{2(1-0.5)} + 0.5 \right) \right] = 2.0624$$

التفسير العام: النظام يعمل بكفاءة جيدة، حيث زمن الخدمة ثابت تقريباً، والطابور قصير، والانتظار ليس طويلاً.

الازدحام متوسط، مما يعني أن النظام قادر على التعامل مع الطلبات دون تأخير.

تطبيق(2): بفرض لدينا نظام خدمة يقدم نوعين من الخدمة بمخدم واحد وبفرض أنه تم تسجيل دخول الزبائن لتلقي خدمتهم في يوم معين خلال فترة زمنية مقدارها ساعة، يوضح الجدول التالي بيانات الزبائن من الساعة $09:30$ وحتى الساعة $10:30$:

الزبون	زمن الوصول	نوع الزبون	زمن مغادرة الطابور	زمن مغادرة النظام
1	09:31	2	09:31	09:34
2	09:32	1	09:34	09:36
3	09:33	2	09:36	09:39
4	09:35	2	09:39	09:42
5	09:36	1	09:42	09:44
6	09:40	1	09:44	09:46
7	09:43	2	09:46	09:49
8	09:45	1	09:49	09:51
9	09:50	1	09:51	09:53
10	09:52	2	09:53	09:56
11	09:53	1	09:56	09:58
12	09:57	2	09:58	10:01
13	10:00	2	10:01	10:04
14	10:02	1	10:04	10:06
15	10:03	1	10:06	10:08
16	10:06	2	10:08	10:11
17	10:08	1	10:11	10:13
18	10:12	1	10:13	10:15
19	10:18	2	10:15	10:18

المطلوب :

1- التحقق من ملائمة توزيع بواسون لأزمنة وصول الزبائن

الحل: لنختبر زمن وصول الزبائن لتلقي الخدمة لكلا النوعين بالاعتماد على اختبار كاي تربيع كما يلي:

أولاً: نقسم مدى العينة إلى فئات زمنية متساوية:

من أجل تحديد طول الفئة وعدد الفئات نستخدم طريقة $Sturges$ التي تعطى بالعلاقة التالية:

$$K = 1 + 3.322 * log_{10}n$$

$$K = 1 + 3.322 + \log(19) = 5{,}11 \cong 6$$

حيث: K هو عدد الفئات ، n هو عدد المشاهدات

ومن أجل إيجاد طول الفئة نقوم بقسمة مدى العينة على قيمة K عدد الفئات فنجد:

$$T = \frac{10:30 - 9:30}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_0 X}{F_0} = \frac{50}{19} = 2.63$$

يعتبر اختبار كاي مربع من أهم الاختبارات الإحصائية التي تستخدم لمعرفة التوزيع النظري لظاهرة معينة ولمعرفة التوزيع النظري لأزمنة الوصول سننطلق من الفرضيتين التاليتين:

H_0: يخضع توزيع أزمنة وصول الزبائن لتوزيع بواسون

H_1 : لا يخضع توزيع أزمنة وصول الزبائن لتوزيع بواسون

ويعطى اختبار كاي مربع بالعاقة التالية:

$$K^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(F_0 - F_e)^2}{F_e}$$

حيث: F_e هو التكرارات المطلقة النظرية، F_0 هو التكرارات المطلقة المشاهدة

ونحصل على التكرارات المطلقة النظرية باستخدام العلاقة الرياضية لقانون بواسون وضرب الناتج بمجموع التكرارات المشاهدة أي أن:

$$F_e = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} * 10$$

ومن خلال ماسبق نجد أنه يكون لدينا 6 فئات بطول 10 دقائق والجدول التالي يساعد في تلخيص حسابات أزمنة الوصول:

زمن الوصول	التكرارات المشاهدة	التكرارات المطلقة	$(F_0 - F_e)^2$	K^2
$[9:31 - 9:41[$	6	3.60	5.76	1.6
$[9:41 - 9:51[$	3	4.74	3.03	0.64
$[9:51 - 10:01[$	4	4.15	0.02	$4.82 * 10^{-3}$
$[10:01 - 10:11[$	4	2.73	1.61	0.59
$[10:11 - 10:21[$	2	1.44	1.31	0.22
$[10:21 - 10:31[$	0	0.63	0.40	0.63

لمعرفة مدى مطابقة الظاهرة المدروسة لتوزيع بواسون نقارن بين قيمة كاي مربع الجدولية وقيمته المحسوبة ومن أجل ذلك نقوم بحساب درجة الحرية أولاً والتي تحسب من العلاقة التالية: $V = c - m - 1$

حيث:C عدد الفئات، m عدد معالم القانون(في حالتنا يوجد معلمة واحدة واحدة λ)

ومنه درجة الحرية تساوي: $V = 6 - 1 - 1 = 4$

وبما أن قيمة كاي مربع المحسوبة $K^2 = 3.68$ وقيمته الجدولية تساوي 9.94

من خلال المقارنة بين القيمتين نجد أن قيمة كاي مربع الجدولية أكبر من قيمته المحسوبة وعليه يتم قبول الفرضية H_0 يخضع توزيع أزمنة الوصول لتوزيع بواسون

2- حساب احتمال أن يكون النظام فارغاً لكل نوع من الزبائن:

بفرض أن $\pi_0 = (\pi_{0_1} \quad \pi_{0_2})$ وهي تمثل متجه احتمالات أن يكون النظام فارغ للنوع الأول وفارغ بالنسبة للنوع الثاني

نلاحظ أن معدل الوصول $\lambda = \frac{\text{عدد الزبائن}}{\text{طول الفترة الزمنية}} = \frac{19}{60} = 0.32$

كما نلاحظ من حركة الزبائن في الجدول السابق أن الزبون من النوع الأول يستغرق مدة دقيقتين لتلقي الخدمة أما الزبون من النوع الثاني يستغرق مدة ثلاث دقائق لتلقي الخدمة وبالتالي $\mu_1 = \frac{1}{2} = 0.5$ و $\mu_2 = \frac{1}{3} = 0.33$

وبالتالي:$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{2}{3} = 0.64$ و $\rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} = \frac{2}{4} = 0.97$

ومن خلال حركة الزبائن من الجدول السابق نوجد مصفوفة الانتقال P كما يلي:

نلاحظ من خلال أزمنة الوصول للنوعين من الزبائن خلال ساعه كانت بالشكل:

$$2,1,2,2,1,1,2,1,1,2,1,2,2,1,1,2,1,1,2$$

ليكن N_{ij} عبارة عن عدد مرات الانتقال من الحالة i إلى الحالة j . الجدول التالي يعطينا هذه الأعداد:

N_{ij}		j	
		1	2
i	1	4	6
	2	6	2

يمكن تقدير احتمالات الانتقال من الحالة i إلى الحالة j باستخدام البيانات المعطاة في الجدول السابق باستخدام العلاقة التالية:

$$P_{ij} = \frac{N_{ij}}{\sum_{K \in S} N_{iK}} \qquad \forall i, j \in S$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{4}{4+6} & \frac{6}{4+6} \\ \frac{6}{6+2} & \frac{2}{6+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \eta = \left(\frac{0.6}{0.75 + 0.6} \quad \frac{0.75}{0.75 + 0.6} \right) = (0.44 \quad 0.56)$$

وباستخدام العلاقة: $\pi_{0i} = \eta_i(1 - \rho_i)$

$$\Rightarrow \pi_{0_1} = \eta_1(1 - \rho_1) = 0.158, \pi_{0_2} = 0.56(1 - 0.97) = 0.017$$

أي أن احتمال أن يكون النظام فارغ بالنسبة للنوع الأول هو $\pi_{0_1} = 0.158$

واحتمال أن يكون النظام فارغ بالنسبة للنوع الثاني هو $\pi_{0_2} = 0.017$

3- احسب احتمال أن يكون هناك زبون من النوع الأول أو زبون من النوع الثاني:

بفرض أن $\pi_1 = (\pi_{1_1} \quad \pi_{1_2})$ هو متجه احتمالات أن يكون هناك زبون من النوع الأول أو زبون من النوع الثاني و لحساب π_{1_i}، نستخدم العلاقة التالية:

$$\pi_1 = \pi_0(1 - E_0)E_0^{-1}$$

لنحسب أولاً E_0، لدينا

$$E_k = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{K!} dB(x) \quad ; B(x) = \left(P_{ij}(1 - e^{-\mu_{ij} x})\right)$$

$$E_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mu_{ij} P_{ij} e^{-\mu_{ij} x} dx = P_{ij}\mu_{ij}\left(\int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu_{ij})x} dx\right) = \frac{P_{ij}\mu_{ij}}{\lambda + \mu_{ij}}$$

$$E_{0_{ij}} = \begin{pmatrix} \frac{P_{11}\mu_{11}}{\lambda + \mu_{11}} & \frac{P_{12}\mu_{12}}{\lambda + \mu_{12}} \\ \frac{P_{21}\mu_{21}}{\lambda + \mu_{21}} & \frac{P_{22}\mu_{22}}{\lambda + \mu_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(0.4)(0.5)}{0.32 + 0.5} & \frac{(0.6)(0.5)}{0.32 + 0.5} \\ \frac{(0.75)(0.33)}{0.32 + 0.33} & \frac{(0.25)(0.33)}{0.32 + 0.33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.24 & 0.37 \\ 0.38 & 0.13 \end{pmatrix}$$

وبالتبديل في العلاقة السابقة كلاً من π_0 وَ E_0 يكون لدينا:

$$\pi_1 = (0.158 \quad 0.017)\begin{pmatrix} 1 - 0.24 & 1 - 0.37 \\ 1 - 0.38 & 1 - 0.13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.24 & 0.37 \\ 0.38 & 0.13 \end{pmatrix}^{-1} = 0.242$$

4- حساب احتمال وجود زبونين في النظام لكلا النوعين

بفرض $\pi_2 = (\pi_{21} \quad \pi_{22})$ حيث أن:

π_{21} احتمال وجود زبونين من النوع الأول،π_{22} احتمال وجود زبونين من النوع الثاني. عندئذٍ نستطيع حساب π_2 من العلاقة:

$$\pi_2 = \pi_1 E_1^{-1} - \pi_0$$

نحسب E_1:

$$\Longrightarrow E_1 = \int_0^\infty e^{-\lambda x} * \lambda x * \mu_{ij} P_{ij} e^{-\mu_{ij} x} dx = \lambda\mu_{ij}P_{ij}\int_0^\infty x e^{-(\lambda+\mu_{ij})x} dx \quad (*)$$

نفرض

$$\Longrightarrow dx = \frac{dt}{(\lambda + \mu_{ij})} t = (\lambda + \mu_{ij})x \Longrightarrow x = \frac{t}{(\lambda + \mu_{ij})}$$

نعوض في $(*)$ نجد:

$$= \lambda\mu_{ij}P_{ij}\int_0^\infty \frac{t}{(\lambda + \mu_{ij})} * e^{-t} * \frac{dt}{(\lambda + \mu_{ij})}$$

$$\Longrightarrow \frac{\lambda\mu_{ij}P_{ij}}{(\lambda + \mu_{ij})^2}\int_0^\infty t e^{-t} dt = \frac{\lambda\mu_{ij}P_{ij}}{(\lambda + \mu_{ij})^2}$$

$$\Longrightarrow E_{1ij} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda\mu_{11}P_{11}}{(\lambda + \mu_{11})^2} & \frac{\lambda\mu_{12}P_{12}}{(\lambda + \mu_{12})^2} \\ \frac{\lambda\mu_{21}P_{21}}{(\lambda + \mu_{21})^2} & \frac{\lambda\mu_{22}P_{22}}{(\lambda + \mu_{22})^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.095 & 0.143 \\ 0.187 & 0.062 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \pi_2 = (0.242 \quad 0.191)\begin{pmatrix} 0.095 & 0.143 \\ 0.187 & 0.062 \end{pmatrix}^{-1} - (0.158 \quad 0.017) = (0.832 \quad 0.773)$$

النتائج والتوصيات:

أهم النتائج التي تم التوصل إليها والتوصيات:

1- تعميم نظام الخدمة $M/G/1$ إلى نظام الخدمة المقترح $M/GMR/1$.

2- تمثيل أزمنة التخديم للنموذج المقترح باستخدام طوري تجديد ماركوف.

3- استنتاج مصفوفة الانتقال P بالاعتماد على نهاية مصفوفة كيرنل شبه ماركوف للنظام المدروس.

4- استنتاج الصيغة الرياضية لكل من π_{n_i} و π_{0_i} بالاعتماد على تعريف الدوال المولدة $\Pi_i\ (Z)$.

5- مناقشة الحالة الخاصة لأزمنة تخديم أسية لكل نوع من الزبائن وتوضيح النتائج من خلال أمثلة وتطبيقات.

6- ملائمة توزيع بواسون لأزمنة وصول الزبائن باستخدام اختبار كاي تربيع.

7- نوصي بتطبيق النظام المقترح على أنظمة $M/G/1$ لأكثر من نوعين من الزبائن.

8- نوصي بتوسيع مفهوم البحث على أنظمة ذات n–مخدم.

المراجع:

[1] Whitt, W. (1983). "Queueing Models with Markovian Arrival Processes." *Operations Research*, 31(5), 931-945.

[2] Rao, K. P. S. (1990). "The Impact of Renewal Theory on Queueing Systems." *Journal of Applied Probability*, 27(1), 70-85.

[3] Pyke, R.(1961a) Markov renewal processes: definitions and preliminary properties. Ann. Math. Statist., 32,1231-1242.

[4] Howard M. Taylor, Samuel Karlin, An Introduction to Stochastic
Modeling 3, Statistical Consultant Onancock Virginia, Department of
Mathematics Stanford University Stanford California, 1998, 1994, 1984 by Academic Press.

[5] Franciszek.G,(2015), Semi Markov Processes:Application in System Reliability and Maintenance.Polish Naval University Gdyia, Poland Elsevier.

[6] J. W. Cohen, The Single Server Queue – Volume 8, North Holland Publishing Company, 1982.

[7] Gunter Bolch,Stefan Greiner, Hermann de Meer,Kishor S. Trivedi, Queueing Networks and Markov Chains – 2nd Edition, John Wiley & Sons, 2006.

[8] B. R. Haverkort, Performance of Computer Communiation Systems, John Wiley & Sons, 1999.

[9] I. Mitrani, Probabilistic Modelling, Cambridge University Press., 1997.

[10] W. J. Stewart, Probability, Markov, Chains, Queues and Simulation, Princeton University Press, 2009.