وحدانية الحل المعمم لمعادلات Ignaczak التنسورية في الديناميك الخطي اللاتناظري

خضر منهل الصالح[1] أ . د. منتجب الحسن[2] أ . د. منير مخلوف[3]

(الإيداع: 15 تشرين الثاني 2025، القبول: 8 كانون الثاني 2026)

الملخص:

يتناول هذا البحث مسألة Ignaczak التنسورية للقيم الحدّية والابتدائيّة [1,2] لجسم مرن دقيق الاستقطاب، غير متجانس ومتماثل المناحي، ضمن إطار الديناميك الخطي اللاتناظري [3,4].

في المرجع [5] ناقش Ignaczak وجود ووحدانية الحل المعمَّم [6] لمسألة القيم الحدّية والابتدائيّة لجسم مرن تقليدي ضمن المرونة الخطية التقليدية غير المتجانسة والمتماثلة المناحي، في حين تم في المرجع [7] تعميم نتائج الوجود فقط لتشمل الديناميك الخطي اللاتناظري.

في هذا البحث، نعرض أولًا أهم النتائج الواردة في عمل [7] Klecha والمتعلقة بوجود الحل المعمَّم لمسألة Ignaczak التنسورية، ثم نثبت وحدانية هذا الحل المعمَّم. كما نصوغ ونبرهن مبرهنة هامة تتعلق بفضاء Hilbert المناسب لهذه المسألة. وفي الختام، نعرض مجموعة من المسائل المفتوحة للمناقشة المستقبلية.

الكلمات المفتاحية: وحدانية الحل المعمم – مسألة Ignaczak التنسورية للقيم الحدية والابتدائية – الجسم مرن دقيق الاستقطاب غير المتجانس ومتماثل المناحي.

[1] طالب دكتوراه في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة حمص.

[2] أستاذ في قسم الرياضيات (الرياضيات التطبيقية- ميكانيك رياضي)– كلية العلوم – جامعة حمص

3 أستاذ في قسم الرياضيات (الرياضيات البحتة- تحليل تابعي) – كلية العلوم – جامعة حمص

Uniqueness of the Generalized Solution to the Ignaczak Tensorial Equations in Linear Asymmetric Dynamic

Khedr Alsaleh † & Dr. Mountajab Al–Hasan* & Dr. Mouneer Makhloof ‡

(Received: 15 November 2025, Accepted: 8 January 2026)

Abstract:

This paper deals with the Ignaczak tensorial initial–boundary value problem [1,2] for an elastic body within the framework of non-homogeneous, isotropic linear asymmetric dynamics [3,4].
In [5], Ignaczak discussed the existence and uniqueness of the generalized solution [6] to the corresponding problem in classical linear non-homogeneous isotropic elasticity. Subsequently, in [7], Klecha generalized the existence result to include linear non-homogeneous isotropic asymmetric dynamics.

In the present work, we first briefly review the essential results established in [7] concerning the existence of the generalized solution. Next, we prove the uniqueness of this solution. Furthermore, we formulate and prove an important theorem related to the appropriate Hilbert space. Finally, we conclude the paper by presenting several open problems for further discussion.

Key word: Unique of generalized solution, Ignaczak tensorial initial– boundary value problem– non– homogeneous, isotropic micro polar body.

† Ph.D. Student in Applied Mathematics, Department of Mathematics، Faculty of Science – Homs University,
* Professor in Applied Mathematics, Department of Mathematics، Faculty of Science-Homs University.
‡ Professor in Theoretical Mathematics, Department of Mathematics، Faculty of Science-Homs University.

1. مقدمة:

تشكل دراسة السلوك الديناميكي للأجسام المرنة ذات البنية الدقيقة (microstructure) أحد المجالات الحيوية في ميكانيكا المواد المتقدمة، لما لها من تطبيقات واسعة في الهندسة والفيزياء التطبيقية. ومن بين النماذج الرياضية التي قدمت لوصف سلوك هذه الأجسام، تبرز معادلات Ignaczak التنسورية (Ignaczak tensorial equations) التي تقدم صياغة شاملة لمسائل القيم الحدية والابتدائية في إطار المرونة الخطية التقليدية.

في سياق تطوير هذه النماذج، تم الانتقال من دراسة الأجسام المرنة التقليدية إلى دراسة الأجسام ذات الاستقطاب الدقيق (micropolar) في إطار الديناميك الخطي اللاتناظري (linear asymmetric dynamics) ، والذي يأخذ في الاعتبار درجات حرية دورانية إضافية. وقد تناول الباحث Ignaczak في عمل سابق [5] مسألة وجود ووحدانية الحل المعمم للمعادلات التنسورية في المرونة الخطية التقليدية، بينما قام Klecha [7] بتعميم نتائج الوجود لتنطبق على الأجسام في الديناميك الخطي اللاتناظري غير المتجانس ومتماثل المناحي.

2. هدف البحث وأهميّة البحث:

يهدف هذا البحث إلى استكمال هذه المسيرة العلمية من خلال إثبات **وحدانية الحل المعمم** لمسألة Ignaczak التنسورية للقيم الحدية والابتدائية في إطار الديناميك الخطي اللاتناظري. كما يسعى البحث إلى تقديم إسهام نظري هام من خلال صياغة وإثبات مبرهنة حول فضاء Hilbert المرتبط بهذا النظام الفيزيائي.

تكتسب هذه الدراسة أهميتها من قدرتها على تدعيم الأسس الرياضية للنمذجة المتقدمة للمواد ذات البنى الدقيقة، وهو ما ينعكس إيجابًا على مجالات مثل ميكانيكا الصفائح الرقيقة، وهندسة المواد المركبة، وتحليل المنشآت الدقيقة.

من خلال هذا العمل، نسعى إلى تقديم إطار رياضي متكامل ومتين لمسائل القيم الحدية والابتدائية في الديناميك اللاتناظري، مما يفتح الباب أمام مزيد من الدراسات التطبيقية والنظرية في هذا المجال العلمي الواعد.

3. طرائق البحث وأدواته:

سيعتمد البحث في منهجيته على تعميم الطرائق التحليلية المستخدمة في المرونة التقليدية، مع الاستفادة من أدوات التحليل الدالي ونظرية فضاءات Hilbert.

4. النتائج والمناقشة:

I.عرض مختصر لما يهمنا من نتائج البحث [7]:

أولاً: تبعية الحل التقليدي المستمرة على المعطيات:

لتكن $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ منطقة بسيطة الترابط ومحدودة يشغلها الجسم المرن دقيق الاستقطاب غير المتجانس والمتماثل المناحي ضمن الديناميك الخطي اللاتناظري [2,3]. لتكن أيضاً $\rho(\mathbf{x}), J(\mathbf{x})$ ،على الترتيب، الكثافة الحجمية، والعطالة الدورانية للجسم المعتبر، ولتكن أيضاً $\mu(\mathbf{x}), \lambda(\mathbf{x}), \alpha(\mathbf{x}), \beta(\mathbf{x}), \gamma(\mathbf{x}), \varepsilon(\mathbf{x})$ الدوال الحقيقية الموجبة، التي تصف الخواص المرنة للجسم المدروس. نفترض أن كل من $\rho(\mathbf{x})$ و $J(\mathbf{x})$ قابل للمفاضلة باستمرار على $\bar{\Omega}$ (لصاقة Ω)، ويحققان المتراجحات:

$$0 < \rho_0 \le \rho(\mathbf{x}) \le \rho_1 < +\infty \quad \text{على } \bar{\Omega} \tag{4.1}$$

$$0 < J_0 \le J(\mathbf{x}) \le J_1 < +\infty \quad \text{على } \bar{\Omega} \tag{4.2}$$

ليكن $\hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{x},t), \hat{\mu}_{ij}(\mathbf{x},t)\ ;\ i,j=1,2,3$ مقطعان تنسوريان من المرتبة الثانية، غير متناظران في الحالة العامة ومستقلان ومعرفان على $\bar{\Omega} \times [0,\infty[$ ، ولنفرض أن التوابع $\mu(\mathbf{x}), \lambda(\mathbf{x}), \alpha(\mathbf{x}), \beta(\mathbf{x}), \gamma(\mathbf{x}), \varepsilon(\mathbf{x})$ مستمرة في $\bar{\Omega}$ ومختارة بحيث تحقق المتراجحة:

$$2U_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\hat{\sigma}_{ij},\hat{\mu}_{ij})=\frac{1}{2\mu}\left[\hat{\sigma}_{(ij)}\hat{\sigma}_{(ij)}-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\hat{\sigma}_{kk}^2\right]+\frac{1}{2\alpha}\hat{\sigma}_{[ij]}\hat{\sigma}_{[ij]}+$$
$$+\frac{1}{2\gamma}\left[\hat{\mu}_{(ij)}\hat{\mu}_{(ij)}-\frac{\beta}{3\beta+2\gamma}\hat{\mu}_{kk}^2\right]+\frac{1}{2\varepsilon}\hat{\mu}_{[ij]}\hat{\mu}_{[ij]}\geq 0 \qquad (4.3)$$

لأجل كل ثنائية $\langle\hat{\sigma}_{ij},\hat{\mu}_{ij}\rangle$ معرفة على $\bar{\Omega}\times[0,\infty[$ وكل $\mathbf{x}\in\bar{\Omega}$. تعني المتراجحة (4.3) أن طاقة المرونة (الطاقة الداخلية) للجسم المدروس هي مقدار غير سالب لأجل ثنائية $\langle\hat{\sigma}_{ij},\hat{\mu}_{ij}\rangle$ معرفة على $\bar{\Omega}\times[0,\infty[$ وكل $(\mathbf{x},t)\in\bar{\Omega}\times[0,\infty[$.

لنضع الآن: $3k(\mathbf{x})=3\lambda(\mathbf{x})+2\mu(\mathbf{x}),3g(\mathbf{x})=3\beta(\mathbf{x})+2\gamma(\mathbf{x})$

بما أن دوال المرونة $\mu(\mathbf{x}),\lambda(\mathbf{x}),\alpha(\mathbf{x}),\beta(\mathbf{x}),\gamma(\mathbf{x}),\varepsilon(\mathbf{x})$ مستمرة في $\bar{\Omega}$ يمكننا أن نفرض:

$$0<\mu_0\leq\mu(\mathbf{x})\leq\mu_1<+\infty \text{ في } \bar{\Omega}, \qquad (4.4)$$
$$0<k_0\leq k(\mathbf{x})\leq k_1<+\infty \text{ في } \bar{\Omega}, \qquad (4.5)$$
$$0<\gamma_0\leq\gamma(\mathbf{x})\leq\gamma_1<+\infty \text{ في } \bar{\Omega}, \qquad (4.6)$$
$$0<g_0\leq g(\mathbf{x})\leq g_1<+\infty \text{ في } \bar{\Omega}, \qquad (4.7)$$
$$0<\alpha_0\leq\alpha(\mathbf{x})\leq\alpha_1<+\infty \text{ في } \bar{\Omega}, \qquad (4.8)$$
$$0<\varepsilon_0\leq\varepsilon(\mathbf{x})\leq\varepsilon_1<+\infty \text{ في } \bar{\Omega}, \qquad (4.9)$$

حيث $(\mu_0,k_0,\gamma_0,g_0,\alpha_0,\varepsilon_0)$ الحدود الدنيا و $(\mu_1,k_1,\gamma_1,g_1,\alpha_1,\varepsilon_1)$ هي الحدود العليا لدوال المرونة.

إن المتراجحات السابقة (4.9)–(4.4) تمكننا من صياغة وإثبات المبرهنة التالية.

مبرهنة 4.1:

تحقق الطاقة الداخلية $U_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\hat{\sigma}_{ij},\hat{\mu}_{ij})$ تحقق المتراجحات التالية:

$$A^{-1}\left(\hat{\sigma}_{ij}\hat{\sigma}_{ij}+\hat{\mu}_{ij}\hat{\mu}_{ij}\right)\leq\frac{1}{2\mu}\left[\hat{\sigma}_{(ij)}\hat{\sigma}_{(ij)}-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\hat{\sigma}_{kk}^2\right]+\frac{1}{2\alpha}\hat{\sigma}_{[ij]}\hat{\sigma}_{[ij]}+$$
$$+\frac{1}{2\gamma}\left[\hat{\mu}_{(ij)}\hat{\mu}_{(ij)}-\frac{\beta}{3\beta+2\gamma}\hat{\mu}_{kk}^2\right]+\frac{1}{2\varepsilon}\hat{\mu}_{[ij]}\hat{\mu}_{[ij]}\leq B^{-1}\left(\hat{\sigma}_{ij}\hat{\sigma}_{ij}+\hat{\mu}_{ij}\hat{\mu}_{ij}\right), \qquad (4.10)$$

حيث:

$$A^{-1}=\min\left(\frac{1}{3k_1},\frac{1}{2\mu_1},\frac{1}{2\alpha_1},\frac{1}{3g_1},\frac{1}{2\gamma_1},\frac{1}{2\varepsilon_1}\right),\ B^{-1}=\max\left(\frac{1}{3k_0},\frac{1}{2\mu_0},\frac{1}{2\alpha_0},\frac{1}{3g_0},\frac{1}{2\gamma_0},\frac{1}{2\varepsilon_0}\right).$$

تعطى مسألة Ignaczak التنسورية للقيم الحدية والابتدائية للجسم المرن دقيق الاستقطاب، المعتبر، بالشكل التالي:

$$\left(\rho^{-1}\sigma_{sj,s}\right)_{,i}-J^{-1}\in_{ijk}\left(\in_{kmn}\sigma_{mn}+\mu_{sk,s}\right)$$
$$-\frac{1}{2\mu}\left[\ddot{\sigma}_{(ij)}-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\ddot{\sigma}_{kk}\delta_{ij}\right]-\frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}_{[ij]}=-p_{ij}, \qquad (4.11)$$

$$\left[J^{-1}\left(\in_{jmn}\sigma_{mn}+\mu_{sj,s}\right)\right]_{,i}-\frac{1}{2\gamma}\left[\ddot{\mu}_{(ij)}-\frac{\beta}{3\beta+2\gamma}\ddot{\mu}_{kk}\delta_{ij}\right]-\frac{1}{2\varepsilon}\ddot{\mu}_{[ij]}=-g_{ij}, \qquad (4.12)$$

وهنا: $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)$ و $\mu_{ij}=\mu_{ij}(\mathbf{x},t)$ على الترتيب هما مقطع إجهاد القوة التنسوري ومقطع إجهاد العزم التنسوري، وهما غير متناظران ومن المرتبة الثانية، يطلب إيجادهما، بينما $p_{ij}=p_{ij}(\mathbf{x},t)$ و $g_{ij}=g_{ij}(\mathbf{x},t)$ هما

مقاطعان تنسوريان من المرتبة الثانية غير متناظران، ومعطيان بدلالة لمركبات الديكارتية لمقطع القوة الحجمية، المتجهي، المعلوم: $X_i = X_i(\mathbf{x},t)$ وبدلالة المركبات الديكارتية لمقطع العزم الحجمي، المتجهي، المعلوم: $Y_i = Y_i(\mathbf{x},t)$ من خلال العلاقتين:

$$p_{ij} = \left(\rho^{-1}X_j\right)_{,i} - J^{-1}\in_{kij} Y_k \ , \ g_{ij} = \left(J^{-1}Y_j\right)_{,i} \tag{4.13}$$

القوسان الدليان $(\ldots)$، $[\ldots]$ على الترتيب هما الجزء التناظري والجزء التناظري العكسي للمصفوفة؛ $a_{(ij)} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right)$ و $a_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} - a_{ji}\right)$، كما أن: $\in_{ijk}$ تمثل المركبات الديكارتية لتنسور Levi-Chevita ، النسبي، بالوزن $w = \frac{1}{2}$، وهنا ننوه أننا نرمز بالفاصلة الدليلية للمشتق الجزئي بالنسبة لمتحولات الموضع: $f_{,i} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ، كما نرمز بالنقطة للمشتق الجزئي بالنسبة للزمن: $\dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} \equiv \partial_t f$ ، كما سنستخدم الطريقة التنسورية في الجمع (رموز Einstein)، حيث الأدلة اللاتينية: i,j,k تأخذ القيم: 1,2,3. تخضع المعادلات السابقة للشروط الحدية والابتدائية التالية:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x},0) = \sigma^0_{ij}(\mathbf{x}) \qquad \text{على } \bar{\Omega} \tag{4.14}$$

$$\dot{\sigma}_{ij}(\mathbf{x},0) = \dot{\sigma}^0_{ij}(\mathbf{x}) \qquad \text{على } \bar{\Omega} \tag{4.15}$$

$$\mu_{ij}(\mathbf{x},0) = \mu^0_{ij}(\mathbf{x}) \qquad \text{على } \bar{\Omega} \tag{4.16}$$

$$\dot{\mu}_{ij}(\mathbf{x},0) = \dot{\mu}^0_{ij}(\mathbf{x}) \qquad \text{على } \bar{\Omega} \tag{4.17}$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)n_i(\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{على } \partial\Omega\times[0,\infty[\tag{4.18}$$

$$\mu_{ij}(\mathbf{x},t)n_i(\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{على } \partial\Omega\times[0,\infty[\tag{4.19}$$

وهنا الثنائية: $\left\langle \sigma^0_{ij}(\mathbf{x}), \mu^0_{ij}(\mathbf{x}) \right\rangle$، وكذلك الثنائية: $\left\langle \dot{\sigma}^0_{ij}(\mathbf{x}), \dot{\mu}^0_{ij}(\mathbf{x}) \right\rangle$ معطاتان، وتمثلان على الترتيب القيم الابتدائية لكل من حقول الإجهادات والقيم الابتدائية لسرع هذه الحقول. أخيرا نشير إلى أن: $n_i(\mathbf{x})$ تمثل المركبات الديكارتية لمتجه واحدة ناظم السطح $\partial\Omega$ والموجه نحو خارج $\partial\Omega$.

ليكن K الفضاء الخطي الحقيقي، المكون من مجموعة كل الثنائيات المرتبة من الشكل $\mathbf{S} = \left\langle \alpha_{ij}, \beta_{ij} \right\rangle$ المعرفة $\forall (\mathbf{x},t) \in \bar{\Omega}\times[0,\infty[$ ، والمحققة للشروط:

$$\alpha_{ij}(\mathbf{x},t)n_i(\mathbf{x}) = 0 \, , \, \beta_{ij}(\mathbf{x},t)n_i(\mathbf{x}) = 0 \ ; \ \forall (\mathbf{x},t) \in \partial\Omega\times[0,\infty[\tag{4.20}$$

تعريف 4.1: ندعو الثنائية المرتبة $\left\langle \sigma_{ij}(\mathbf{x},t), \mu_{ij}(\mathbf{x},t) \right\rangle \in \mathrm{K}$ المحققة لمسألة القيم الابتدائية (4.17)–(4.11)، والمحققة أيضاً لشروط الانتظام (أو الملاسة):

$$\sigma_{ij} \in C^2\left[\Omega\times(0,\infty)\right] \cap C^1\left[\bar{\Omega}\times(0,\infty)\right], \tag{4.21}$$

$$\mu_{ij} \in C^2\left[\Omega\times(0,\infty)\right] \cap C^1\left[\bar{\Omega}\times(0,\infty)\right], \tag{4.22}$$

ندعوها حلاً تقليدياً (حلاً قوياً) للمسألة (4.19)–(4.11).

نتيجة 4.1: إذا كانت الثنائية $\left\langle \sigma_{ij}(\mathbf{x},t), \mu_{ij}(\mathbf{x},t) \right\rangle$ تشكل حلاً تقليدياً للمسألة السابقة (4.19)–(4.11) فإن شروط الانتظام (أو الملاسة) التالية تكون محققة من خلال المعطيات:

$$\left\langle p_{ij},g_{ij}\right\rangle \in C\left[\Omega\times(0,\infty)\right]\times C\left[\Omega\times(0,\infty)\right]\ ,\ \left\langle \sigma_{ij}^{0},\mu_{ij}^{0}\right\rangle \in C^{1}(\bar{\Omega})\times C^{1}(\bar{\Omega})\ ,\quad \left\langle \dot{\sigma}_{ij}^{0},\dot{\mu}_{ij}^{0}\right\rangle \in C(\bar{\Omega})\times C(\bar{\Omega})\,, \tag{4.23}$$

كما ينتج عن توافق الشروط الحدية والابتدائية، أن كلا الثنائيتين $\left\langle \sigma_{ij}^{0},\mu_{ij}^{0}\right\rangle$ و$\left\langle \dot{\sigma}_{ij}^{0},\dot{\mu}_{ij}^{0}\right\rangle$ تنتميان إلى K.

لنفرض أن $\left\langle \sigma_{ij}(\mathbf{x},t),\mu_{ij}(\mathbf{x},t)\right\rangle$ تشكل حلاً تقليدياً (حلاً قوي) للمسألة (4.19)–(4.11)، ولنعرف التكامل:

$$H_1(t)=\int_{\Omega}\Big[\sigma_{ij}\,\sigma_{ij}+\mu_{ij}\,\mu_{ij}+\rho^{-1}\sigma_{sj,s}\,\sigma_{ij,i}+ +J^{-1}(\in_{jpq}\sigma_{pq}+\mu_{pj,p})(\in_{jmn}\sigma_{mn}+\mu_{mj,m})+2U_{\boldsymbol{\sigma\mu}}\left(\dot{\sigma}_{ij},\dot{\mu}_{ij}\right)\Big]d\Omega\,, \tag{4.24}$$

وبحساب $\dot{H}_1(t)$ نحصل على:

$$\frac{1}{2}\dot{H}_1(t)=\int_{\Omega}\Big[\sigma_{ij}\,\sigma_{ij}+\mu_{ij}\,\dot{\mu}_{ij}+\rho^{-1}\sigma_{sj,s}\,\dot{\sigma}_{ij,i}+ +J^{-1}(\in_{jpq}\sigma_{pq}+\mu_{pj,p})(\in_{jmn}\dot{\sigma}_{mn}+\dot{\mu}_{mj,m})+\frac{\partial}{\partial t}U_{\boldsymbol{\sigma\mu}}\left(\dot{\sigma}_{ij},\dot{\mu}_{ij}\right)\Big]d\Omega\,, \tag{4.25}$$

تعطي المبرهنة التالية $\dot{H}_1(t)$ بدلالة p_{ij},g_{ij}.

مبرهنة 4.2: إن $\dot{H}_1(t)$ يملك الصيغة المبسطة التالية:

$$\frac{1}{2}\dot{H}_1(t)=\int_{\Omega}\Big[\sigma_{ij}\,\sigma_{ij}+\mu_{ij}\,\dot{\mu}_{ij}\Big]\,d\Omega+\int_{\Omega}\Big[p_{ij}\,\dot{\sigma}_{ij}+g_{ij}\,\dot{\mu}_{ij}\Big]\,d\Omega\,, \tag{4.26}$$

نتيجة 4.2: إن $\dot{H}_1(t)$ يحقق المتراجحة التكاملية التالية:

$$\dot{H}_1(t)\le\int_{\Omega}\sigma_{js}\,\sigma_{js}\,d\Omega+\int_{\Omega}\mu_{js}\,\mu_{js}d\Omega+2\int_{\Omega}\dot{\sigma}_{js}\,\dot{\sigma}_{js}\,d\Omega+2\int_{\Omega}\dot{\mu}_{js}\,\dot{\mu}_{js}\,d\Omega+P(t)\,, \tag{4.27}$$

حيث: $P(t)=P_1(t)+P_2(t)\,,\ P_1(t)=\int_{\Omega}p_{js}\,p_{js}\,\partial\Omega\,,\ P_2(t)=\int_{\Omega}g_{js}\,g_{js}\,\partial\Omega$

باستخدام المتراجحة (4.10) والنتيجة السابقة يمكن صياغة وإثبات صحة البرهنة التالية:

مبرهنة 4.3: إن $H_1(t)$ تحقق المتراجحة التكاملية التالية:

$$\dot{H}_1(t)-(2A+1)H_1(t)\le P(t) \tag{4.28}$$

نتيجة 4.3: إن $H_1(t)$ تحقق المتراجحة التالة على المجال $[0,t]$:

$$H_1(t)\le e^{(2A+1)t}H_1(0)+\int_0^t e^{(2A+1)(t-\tau)}P(\tau)\,d\tau \tag{4.29}$$

ونتج عن المتراجحة السابقة أنه إذا كان $H_1(0)$ صغير بالقدر الكافي عندئذٍ من أجل أي $t\le T<\infty$ يكون $H_1(t)$ كمية صغيرة اختيارية بشرط أن تكون $P(t)$ كمية صغيرة بالقدر الكافي.

نتيجة 4.4: لنضع

$$H_0(t)=\int_{\Omega}\left(\sigma_{kl}\,\sigma_{kl}+\mu_{kl}\,\mu_{kl}\right)\partial\Omega \tag{4.30}$$

من تعريف $H_1(t)$ ومن $H_0(t)$ ينتج أن:

$$H_0(t)\le H_1(t)\ ;\ \forall t\in[0,T] \tag{4.31}$$

بالتالي إذا كانت $H_1(t)$ دالة صغيرة على المجال $[0,T]$ فتكون أيضاً $H_0(t)$ صغيرة على نفس المجال.

نتيجة 4.5: بما أن كل من $H_0(t)$ و $H_1(t)$ داليّاً تربيعيّاً على K فيمكن أن نضع:

$$H_0(t) := \left\| \left\langle \sigma_{ij}, \mu_{ij} \right\rangle \right\|^2_{L_2(\Omega)}(t) \; ; \; \forall t \in [0,T] \tag{4.32}$$

$$H_1(t) := \left\| \left\langle \sigma_{ij}, \mu_{ij} \right\rangle \right\|^2_{E(\Omega)}(t) \; ; \; \forall t \in [0,T] \tag{4.33}$$

يمكننا صياغة النتيجة 4.3 بالشكل التالي:

إذا كان $\left\langle \sigma_{ij}, \mu_{ij} \right\rangle$ تمثل حل تقليدي للمسألة (4.19)–(4.11) عندها تأخذ المتراجحة (4.29) الشكل:

$$\left\| \left\langle \sigma_{ij}, \mu_{ij} \right\rangle \right\|^2_{E(\Omega)}(t) \le e^{(2A+1)t} \left\| \left\langle \sigma_{ij}, \mu_{ij} \right\rangle \right\|^2_{E(\Omega)}(0) + \\ + \int_0^t e^{(2A+1)(t-\tau)} \left\| \left\langle p_{ij}, g_{ij} \right\rangle \right\|^2_{L_2(\Omega)}(\tau) d\tau. \tag{4.34}$$

حيث:

$$\left\| \left\langle p_{ij}, g_{ij} \right\rangle \right\|^2_{L_2(\Omega)}(t) = P(t)$$

إن النتيجة السابقة المتمثلة بالمتراجحة (4.34) تمكننا من صياغة وإثبات المبرهنة التالية حول التبعية المستمرة للحل التقليدي على المعطيات.

مبرهنة 4.4:(حول التبعية المستمرة للحل التقليدي على المعطيات):

لتكن $\left\langle \sigma_{ij}^{(k)}, \mu_{ij}^{(k)} \right\rangle \; (k=1,2)$ حلان تقليديان للمسألة (4.19)–(4.11) متوافقان على الترتيب مع المعطيات $\left\langle \dot{\sigma}_{ij}^{0(k)}, \dot{\mu}_{ij}^{0(k)} \right\rangle$، $\left\langle \sigma_{ij}^{0(k)}, \mu_{ij}^{0(k)} \right\rangle$ ، $\left\langle p_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)} \right\rangle$ بحيث يتحقق الشرطان:

$$\left\| \left\langle \sigma_{ij}^{(1)}, \mu_{ij}^{(1)} \right\rangle - \left\langle \sigma_{ij}^{(2)}, \mu_{ij}^{(2)} \right\rangle \right\|_{E(\Omega)}(0) \le \sqrt{\varepsilon_1} \quad , \tag{4.35}$$

$$\left\| \left\langle p_{ij}^{(1)}, g_{ij}^{(1)} \right\rangle - \left\langle p_{ij}^{(2)}, g_{ij}^{(2)} \right\rangle \right\|_{L_2(\Omega)}(t) \le \sqrt{\varepsilon_2} \quad , \tag{4.36}$$

حيث ε_1 ، ε_2 عددان موجبان صغيران بالقدر الكافي. عندئذ لأجل كل $t \in [0,T]$ يتحقق الشرط:

$$\left\| \left\langle \sigma_{ij}^{(1)}, \mu_{ij}^{(1)} \right\rangle - \left\langle \sigma_{ij}^{(2)}, \mu_{ij}^{(2)} \right\rangle \right\|_{L_2(\Omega)}(t) \le \left\| \left\langle \sigma_{ij}^{(1)}, \mu_{ij}^{(1)} \right\rangle - \left\langle \sigma_{ij}^{(2)}, \mu_{ij}^{(2)} \right\rangle \right\|_{E(\Omega)}(t) \le \sqrt{\varepsilon} \, , \tag{4.37}$$

حيث ε عدد موجب صغير بالقدر الكافي.

ثانياً: وجود الحل المعمم لمسألة Ignaczak التنسورية للقيم الحدية والابتدائية في الديناميك اللاتناظري:

ليكن $L_2(\Omega)$ فضاء Hilbert المؤلف من جميع الثنائيات $\left\langle \sigma_{ij}, \mu_{ij} \right\rangle$ مع الجداء الداخلي والنظيم المولد به، التاليين:

$$\left(\left\langle \sigma_{ij}^{(1)}, \mu_{ij}^{(1)} \right\rangle, \left\langle \sigma_{ij}^{(2)}, \mu_{ij}^{(2)} \right\rangle \right)_{L_2(\Omega)}(t) = \int_\Omega \left[\sigma_{ij}^{(1)} \sigma_{ij}^{(2)} + \mu_{ij}^{(1)} \mu_{ij}^{(2)} \right] d\Omega \; ; \; \forall t \in [0,T] \tag{4.38}$$

$$\left\| \left\langle \sigma_{ij}, \mu_{ij} \right\rangle \right\|_{L_2(\Omega)}(t) = \sqrt{\left(\left\langle \sigma_{ij}, \mu_{ij} \right\rangle, \left\langle \sigma_{ij}, \mu_{ij} \right\rangle \right)_{L_2(\Omega)}(t)} \; ; \; \forall t \in [0,T] \tag{4.39}$$

وليكن أيضاً $E(\Omega)$ فضاء Hilbert الحقيقي المكون من الثنائيات $\left\langle \sigma_{ij}, \mu_{ij} \right\rangle$ المزود بالجداء الداخلي والنظيم، التاليين:

$$\left(\left\langle \sigma_{ij}^{(1)},\mu_{ij}^{(1)}\right\rangle,\left\langle \sigma_{ij}^{(2)},\mu_{ij}^{(2)}\right\rangle\right)_{E(\Omega)}(t)=\int_{\Omega}\Big\{\sigma_{ij}^{(1)}\,\sigma_{ij}^{(2)}+\mu_{ij}^{(1)}\,\mu_{ij}^{(2)}+\rho^{-1}\,\sigma_{sj,s}^{(1)}\,\sigma_{ij,i}^{(2)}+$$
$$+J^{-1}\left[\in_{jpq}\sigma_{pq}^{(1)}+\mu_{pj,p}^{(1)}\right]\left[\in_{jmn}\sigma_{mn}^{(2)}+\mu_{mj,m}^{(2)}\right]+$$
$$+\frac{1}{2\mu}\left[\dot{\sigma}_{(ij)}^{(1)}\,\dot{\sigma}_{(ij)}^{(2)}-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\dot{\sigma}_{kk}^{(1)}\,\dot{\sigma}_{ss}^{(2)}\right]+\frac{1}{2\alpha}\dot{\sigma}_{[ij]}^{(1)}\;\dot{\sigma}_{[ij]}^{(2)}+ \tag{4.40}$$
$$+\frac{1}{2\gamma}\left[\dot{\mu}_{(ij)}^{(1)}\,\dot{\mu}_{(ij)}^{(2)}-\frac{\beta}{3\beta+2\gamma}\dot{\mu}_{kk}^{(1)}\,\dot{\mu}_{ss}^{(2)}\right]+\frac{1}{2\varepsilon}\dot{\mu}_{[ij]}^{(1)}\;\dot{\mu}_{[ij]}^{(2)}\Big\}\partial\Omega\;;\;\forall t\in[0,T]$$

$$\left\|\left\langle \sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle\right\|_{E(\Omega)}(t)=\sqrt{\left(\left\langle \sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle,\left\langle \sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle\right)_{E(\Omega)}(t)}\;\;;\;\forall t\in[0,T] \tag{4.41}$$

وهنا ننوه إلى أن المشتقات الجزئية التي تظهر داخل التكاملات في (4.40) هي مشتقات معممة.

ينتج عن تعريف فضائي Hilbert $E(\Omega),\,L_2(\Omega)$ أن كل ثنائية $\left\langle \sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle\in E(\Omega)$ تنتمي أيضاً لـ $L_2(\Omega)$ أي أن: $\forall t\in[0,T]$. $E(\Omega)\subset L_2(\Omega)$.

تعريف 4.2: لتكن $\left\langle \sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle\in E(\Omega)$ $\forall t\in[0,T]$. نقول أن هذه الثنائية مستمرة في $E(\Omega)$ بالنسبة للزمن $t\in[0,T]$ إذا وفقط إذا كان لأجل أي $\varepsilon>0$ يوجد $\eta(\varepsilon)>0$، بحيث إذا كان $|h|<\eta(\varepsilon)$ فيكون:

$$\left\|\left\langle \sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle\Big|_{t+h}-\left\langle \sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle\Big|_{t}\right\|_{E(\Omega)}(t)<\varepsilon\;\;;\;\forall t\in[0,T] \tag{4.42}$$

تعريف 4.3: نقول عن متتالية الثنائيات $\left\langle \sigma_{ij}^{(k)},\mu_{ij}^{(k)}\right\rangle\in E(\Omega)$ (حيث: $\forall t\in[0,T]$ و $k=1,2,3,\ldots$)، أنها متقاربة بانتظام في $E(\Omega)$ من الثنائية $\left\langle \sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle\in E(\Omega)$ إذا وفقط إذا كان أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon>0$ يوجد عدد طبيعي $N(\varepsilon)>0$ ، بحيث إذا كان: $k\geq N(\varepsilon)$ فإن:

$$\left\|\left\langle \sigma_{ij}^{(k)},\mu_{ij}^{(k)}\right\rangle-\left\langle \sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle\right\|_{E(\Omega)}(t)<\varepsilon\;\;;\;\forall t\in[0,T] \tag{4.43}$$

باستخدام متراجحة المثلث في $E(\Omega)$ يمكننا إثبات صحة المبرهنة المساعدة التالية:

مبرهنة مساعدة 4.1: إذا كانت $\left\langle \sigma_{ij}^{(k)},\mu_{ij}^{(k)}\right\rangle$ متتالية من الثنائيات المستمرة في $E(\Omega)$ بالنسبة للزمن $t\in[0,T]$ ، وكانت هذه المتتالية متقاربة بانتظام في $E(\Omega)$ من الثنائية $\left\langle \sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle\in E(\Omega)$. عندئذ تكون الثنائية $\left\langle \sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle$ مستمرة في $E(\Omega)$ بالنسبة للزمن $[0,T]$.

تعريف 4.4: المقصود بالحل المعمم (الضعيف) لمسألة القيم الحدية والابتدائية (4.19)–(4.11) هو النهاية في $E(\Omega)$ لمتتالية الثنائيات $\left\langle \sigma_{ij}^{(k)},\mu_{ij}^{(k)}\right\rangle\in \mathrm{K}$ ، المحققة للمعادلات:

$$\mathscr{L}\left\langle \sigma_{ij}^{(k)},\mu_{ij}^{(k)}\right\rangle =-\left\langle p_{ij}^{(k)},g_{ij}^{(k)}\right\rangle ,$$
$$\left\langle \sigma_{ij}^{(k)},\mu_{ij}^{(k)}\right\rangle \Big|_{t=0}=\left\langle \sigma_{ij}^{(0)(k)},\mu_{ij}^{(0)(k)}\right\rangle , \qquad (4.44)$$
$$\left\langle \sigma_{ij}^{(k)},\mu_{ij}^{(k)}\right\rangle \Big|_{t=0}=\left\langle \sigma_{ij}^{(0)(k)},\mu_{ij}^{(0)(k)}\right\rangle ,$$

حيث $\mathscr{L}$ هو المؤثر التفاضلي الخطي المعين(المعرف) من خلال (4.11) و (4.12) وحيث $\left\langle \sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle$، $\left\langle p_{ij}^{(k)},g_{ij}^{(k)}\right\rangle$ مختارة بحيث تحقق:

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\left\langle p_{ij}^{(k)},g_{ij}^{(k)}\right\rangle -\left\langle p_{ij},g_{ij}\right\rangle \right\|_{L_2(\Omega)}(t)=0\ ;\ \forall t\in[0,T], \qquad (4.45)$$

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\left\langle \sigma_{ij}^{(k)},\mu_{ij}^{(k)}\right\rangle -\left\langle \sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle \right\|_{E(\Omega)}(0)=0. \qquad (4.46)$$

مبرهنة 4.5: تملك مسألة القيم الحدية والابتدائيّة (4.19)–(4.11) حل معمم واحد على الأقل في $E(\Omega)$ إذا تحقق الشرطان:

$$\left\|\left\langle p_{ij},g_{ij}\right\rangle \right\|_{L_2(\Omega)}(t)<+\infty\ ;\ \forall t\in[0,T], \qquad (4.47)$$

$$\left\|\left\langle \sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle \right\|_{E(\Omega)}(0)<+\infty\ . \qquad (4.48)$$

نتيجة 4.6: ينتج عن المبرهنة السابقة وعن استمرارية عناصر متتالية الثنائيات $\left\langle \sigma_{ij}^{(k)},\mu_{ij}^{(k)}\right\rangle \in E(\Omega)$ في $E(\Omega)$ بالنسبة للزمن $t\in[0,T]$ ، أن الثنائيّة $\left\langle \sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle$ أيضاً مستمرّة في $E(\Omega)$ بالنسبة للزمن $t\in[0,T]$.

II. وحدانية الحل المعمم للمسألة (4.19)–(4.11) وفضاء Hilbert $L_2(Q_T)$:

قبل الدخول بصياغة وإثبات مبرهنة حول وحدانية الحل المعمم للمسألة (4.19)–(4.11)، نناقش فيمايلي النتيجتين التاليتين:

نتيجة 4.7: إن الشرط (4.48) يكون محققاً مثلا من أجل:

$$\int_\Omega\left[\sigma_{ij}^0\sigma_{ij}^0+\mu_{ij}^0\mu_{ij}^0+\sigma_{sj,s}^0\sigma_{ij,i}^0+(\in_{jpq}\sigma_{pq}+\mu_{pj,p}^0)(\in_{jmn}\sigma_{mn}^0+\mu_{nj,n}^0)\right]d\Omega<+\infty\ , \qquad (4.49)$$

$$\int_\Omega\left(\dot\sigma_{ij}^0\dot\sigma_{ij}^0+\dot\mu_{ij}^0\dot\mu_{ij}^0\right)d\Omega<+\infty \qquad (4.50)$$

ينتج البرهان مباشرة من المتراجعات (4.1) و(4.2) و(4.10).

نتيجة 4.8: إن استمرارية الحل المعمم $\left\langle \Sigma_{ij},\psi_{ij}\right\rangle \in E(\Omega)$ بالنسبة للزمن $t\in[0,T]$ يؤدي إلى الشروط الابتدائية لمسألة القيم الحدية والابتدائية (4.19)–(4.11) تكون محققة بالمعنى التالي:

$$\left\|\left\langle \Sigma_{ij},\psi_{ij}\right\rangle -\left\langle \sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle \right\|_{E(\Omega)}(0)=0\ , \qquad (4.51)$$

مبرهنة 4.6: (حول وحدانية الحل في $E(\Omega)$ لمسألة القيم الحدية والابتدائية (4.19)–(4.11)):

إن مسألة القيم الحدية والابتدائية (4.19)–(4.11) تملك على الأكثر حل معمم واحد في $E(\Omega)$.

البرهان: لإثبات صحة هذه المبرهنة يكفي إثبات أنه إذا كانت المسألة (4.19)–(4.11) التي معطياتها متجانسة (معطياتها معدومة) تملك حل معمم في $E(\Omega)$ هو الحل الصفري $\langle 0,0\rangle$ وذلك $\forall\, t\in[0,T]$. باستخدام المتراجحة (4.34) وحقيقة أن:

$$\left\|\left\langle \Sigma_{ij},\psi_{ij}\right\rangle\right\|_{E(\Omega)}(t)=\lim_{k\to\infty}\left\|\left\langle \Sigma_{ij}^{(k)},\psi_{ij}^{(k)}\right\rangle\right\|_{E(\Omega)}(t)\quad ;\ \forall\, t\in[0,T] \tag{4.52}$$

نجد مباشرة أن:

$$\left\|\left\langle \Sigma_{ij},\psi_{ij}\right\rangle\right\|_{E(\Omega)}(t)=0\quad ;\ \forall\, t\in[0,T] \tag{4.53}$$

بالتالي:

$$\left\langle \Sigma_{ij},\psi_{ij}\right\rangle=\langle 0,0\rangle\quad ;\ \forall\, t\in[0,T]$$

وبذلك يكون قد انتهى البرهان.

تعريف 4.5: (فضاء Hilbert $L_2(Q_T)$)

إن أسرة جميع الثنائيات $\left\langle \bar{\sigma}_{ij},\bar{\mu}_{ij}\right\rangle$ التي هي من الصف $C^2\left[\bar{\Omega}\times[0,\infty)\right]\times C^2\left[\bar{\Omega}\times[0,\infty)\right]$ والمحققة للشروط:

$$\bar{\Omega}\ \text{على}\quad \bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x},0)=\dot{\bar{\sigma}}_{ij}(\mathbf{x},0)=0\,, \tag{4.54}$$

$$\bar{\Omega}\ \text{على}\quad \bar{\mu}_{ij}(\mathbf{x},0)=\dot{\bar{\mu}}_{ij}(\mathbf{x},0)=0\,, \tag{4.55}$$

$$\bar{\Omega}\ \text{على}\quad \bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x},T)=\dot{\bar{\sigma}}_{ij}(\mathbf{x},T)=0\,, \tag{4.56}$$

$$\bar{\Omega}\ \text{على}\quad \bar{\mu}_{ij}(\mathbf{x},T)=\dot{\bar{\mu}}_{ij}(\mathbf{x},T)=0\,, \tag{4.57}$$

$$\partial\Omega\times[0,T]\ \text{على}\quad \bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x},t)\,n_i(\mathbf{x})=0\,, \tag{4.58}$$

$$\partial\Omega\times[0,T]\ \text{على}\quad \bar{\mu}_{ij}(\mathbf{x},t)\,n_i(\mathbf{x})=0\,, \tag{4.59}$$

تشكل فضاء خطي حقيقي، وإذا زودنا هذا الفضاء بالجداء الداخلي:

$$\left(\left\langle \sigma_{ij}^{(1)},\mu_{ij}^{(1)}\right\rangle,\left\langle \sigma_{ij}^{(2)},\mu_{ij}^{(2)}\right\rangle\right)_{L_2(Q_T)}=\int_0^T dt\int_\Omega d\Omega\left[\sigma_{ij}^{(1)}\sigma_{ij}^{(2)}+\mu_{ij}^{(1)}\mu_{ij}^{(2)}\right], \tag{4.60}$$

حيث: $Q_T=\Omega\times[0,T]$، فإن هذا الفضاء مع الجداء الداخلي يشكل فضاء Hilbert الذي نرمز له بالرمز $L_2(Q_T)$.

قبل الشروع في صياغة وبرهان المبرهنة حول فضاء Hilbert $L_2(Q_T)$، يلزمنا إثبات صحة المبرهنة المساعدة التالية:

مبرهنة مساعدة 4.2: ليكن $\left\langle \sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle$ حلاً تقليدياً لمسألة القيم الحدية والابتدائية (4.19)–(4.11) ، موافقاً للمعطيات $\left\langle p_{ij},g_{ij}\right\rangle$ و$\left\langle \sigma_{ij}^0,\mu_{ij}^0\right\rangle$ و$\left\langle \dot{\sigma}_{ij}^0,\dot{\mu}_{ij}^0\right\rangle$. عندئذ بسهولة يمكن إثبات ما يلي:

$$\begin{gathered}\left(\left\langle p_{ij},g_{ij}\right\rangle,\left\langle \bar{\sigma}_{ij},\bar{\mu}_{ij}\right\rangle\right)_{L_2(Q_T)}+\left(\left\langle \sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle,\mathcal{L}\left\langle \bar{\sigma}_{ij},\bar{\mu}_{ij}\right\rangle\right)_{L_2(Q_T)}=0\ ,\\ \forall\left\langle \bar{\sigma}_{ij},\bar{\mu}_{ij}\right\rangle\in L_2(Q_T)\end{gathered} \tag{4.61}$$

البرهان:

بضرب طرفي المعادلة الأولى في:

$$\mathcal{L}\left\langle \sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle=-\left\langle p_{ij},g_{ij}\right\rangle, \tag{4.62}$$

بـ $\bar{\sigma}_{ij}$ والمعادلة الثانية فيها بـ $\bar{\mu}_{ij}$ نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$\bar{\sigma}_{ij}\left(\rho^{-1}\sigma_{sj,s}\right)_{,i}-J^{-1}\in_{ijk}\bar{\sigma}_{ij}\left(\in_{kmn}\sigma_{mn}+\mu_{sk,s}\right)$$
$$-\frac{1}{2\mu}\left[\bar{\sigma}_{(ij)}\ddot{\sigma}_{(ij)}-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\bar{\sigma}_{ss}\ddot{\sigma}_{kk}\right]-\frac{1}{2\alpha}\bar{\sigma}_{[ij]}\ddot{\sigma}_{[ij]}=-p_{ij}\bar{\sigma}_{ij}\,, \tag{4.63}$$

$$\bar{\mu}_{ij}\left[J^{-1}\left(\in_{jmn}\sigma_{mn}+\mu_{sj,s}\right)\right]_{,i}-\frac{1}{2\gamma}\left[\bar{\mu}_{(ij)}\ddot{\mu}_{(ij)}-\frac{\beta}{3\beta+2\gamma}\bar{\mu}_{ss}\ddot{\mu}_{kk}\right]$$
$$-\frac{1}{2\varepsilon}\bar{\mu}_{[ij]}\ddot{\mu}_{[ij]}=-g_{ij}\bar{\mu}_{ij}\,, \tag{4.64}$$

حيث هنا استخدمنا العلاقات التالية:

$$a_{ij}b_{(ij)}=a_{(ij)}b_{(ij)}\,,\ a_{ij}b_{[ij]}=a_{[ij]}b_{[ij]} \tag{4.65}$$

بجمع العلاقتين (4.63) و (4.64)، نجد:

(4.66)

$$-(p_{ij}\bar{\sigma}_{ij}+g_{ij}\bar{\mu}_{ij})=\bar{\sigma}_{ij}\left(\rho^{-1}\sigma_{sj,s}\right)_{,i}-J^{-1}\in_{ijk}\bar{\sigma}_{ij}\left(\in_{kmn}\sigma_{mn}+\mu_{sk,s}\right)+$$
$$+\bar{\mu}_{ij}\left[J^{-1}\left(\in_{jmn}\sigma_{mn}+\mu_{sj,s}\right)\right]_{,i}-\frac{1}{2\mu}\left[\bar{\sigma}_{(ij)}\ddot{\sigma}_{(ij)}-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\bar{\sigma}_{ss}\ddot{\sigma}_{kk}\right]-\frac{1}{2\alpha}\bar{\sigma}_{[ij]}\ddot{\sigma}_{[ij]}$$
$$-\frac{1}{2\gamma}\left[\bar{\mu}_{(ij)}\ddot{\mu}_{(ij)}-\frac{\beta}{3\beta+2\gamma}\bar{\mu}_{ss}\ddot{\mu}_{kk}\right]-\frac{1}{2\varepsilon}\bar{\mu}_{[ij]}\ddot{\mu}_{[ij]}$$

بمكاملة الطرفين على Q_T ومن ثم باستخدام تعريف الجداء الداخلي في $L_2(Q_T)$ نجد:

(4.67)

$$-\left(\left\langle p_{ij},g_{ij}\right\rangle,\left\langle\bar{\sigma}_{ij},\bar{\mu}_{ij}\right\rangle\right)_{L_2(Q_T)}=\left(\mathscr{L}\left\langle\sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle,\left\langle\bar{\sigma}_{ij},\bar{\mu}_{ij}\right\rangle\right)_{L_2(Q_T)}=$$
$$\int_0^T dt\int_\Omega d\Omega\Big\{\bar{\sigma}_{ij}\left(\rho^{-1}\sigma_{sj,s}\right)_{,i}-J^{-1}\in_{ijk}\bar{\sigma}_{ij}\left(\in_{kmn}\sigma_{mn}+\mu_{sk,s}\right)+$$
$$+\bar{\mu}_{ij}\left[J^{-1}\left(\in_{jmn}\sigma_{mn}+\mu_{sj,s}\right)\right]_{,i}-\frac{1}{2\mu}\left[\bar{\sigma}_{(ij)}\ddot{\sigma}_{(ij)}-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\bar{\sigma}_{ss}\ddot{\sigma}_{kk}\right]-\frac{1}{2\alpha}\bar{\sigma}_{[ij]}\ddot{\sigma}_{[ij]}$$
$$-\frac{1}{2\gamma}\left[\bar{\mu}_{(ij)}\ddot{\mu}_{(ij)}-\frac{\beta}{3\beta+2\gamma}\bar{\mu}_{ss}\ddot{\mu}_{kk}\right]-\frac{1}{2\varepsilon}\bar{\mu}_{[ij]}\ddot{\mu}_{[ij]}\Big\}$$

ولكن لدينا:

$$\int_0^T dt\int_\Omega d\Omega\ \bar{\sigma}_{ij}\left(\rho^{-1}\sigma^{(p)}_{sj,s}\right)_{,i}=$$
$$=\int_0^T dt\int_\Omega d\Omega\left\{\left(\rho^{-1}\bar{\sigma}_{ij,i}\right)_{,s}\sigma^{(p)}_{sj}-\left(\bar{\sigma}_{ij}\rho^{-1}\sigma^{(p)}_{sj}\right)_{,s}+\left[\bar{\sigma}_{ij}\rho^{-1}\sigma^{(p)}_{sj,s}\right]_{,i}\right\}= \tag{4.68}$$
$$=\int_0^T dt\int_\Omega d\Omega\,\sigma_{sj}\left(\rho^{-1}\bar{\sigma}_{ij,s}\right)_{,s}$$

كما أنه بسهولة يمكن إثبات أن:

$$\int_0^T dt \int_\Omega d\Omega \left\{ -J^{-1} \in_{ijk} \bar{\sigma}_{ij} \left(\in_{kmn} \sigma_{mn} + \mu_{sk,s} \right) + \bar{\mu}_{ij} \left[J^{-1} \left(\in_{jmn} \sigma_{mn} + \mu_{sj,s} \right) \right]_{,i} \right\} =$$

$$\int_0^T dt \int_\Omega d\Omega \left\{ -J^{-1} \in_{ijk} \bar{\sigma}_{ij} \left(\in_{kmn} \sigma_{mn} + \mu_{sk,s} \right) + \right.$$

$$\left. + \left[J^{-1} \bar{\mu}_{ij} \left(\in_{jmn} \sigma_{mn} + \mu_{sj,s} \right) \right]_{,i} - J^{-1} \bar{\mu}_{ij,i} \left(\in_{jmn} \sigma_{mn} + \mu_{sj,s} \right) \right\} = \quad (4.69)$$

$$\int_0^T dt \int_\Omega d\Omega \left[-J^{-1} \left(\in_{kij} \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\mu}_{ik,i} \right) \left(\in_{kmn} \sigma_{mn} + \mu_{sk,s} \right) \right] =$$

$$= \int_0^T dt \int_\Omega d\Omega \left\{ -J^{-1} \in_{ijk} \sigma_{ij} \left(\in_{kmn} \bar{\sigma}_{mn} + \bar{\mu}_{sk,s} \right) + \mu_{ij} \left[J^{-1} \left(\in_{jmn} \bar{\sigma}_{mn} + \bar{\mu}_{sj,s} \right) \right]_{,i} \right\}$$

كما يمكن إثبات أن:

$$\int_0^T dt \int_\Omega d\Omega \; \bar{\sigma}_{ij} \ddot{f} = \int_0^T dt \int_\Omega d\Omega \left[\ddot{\bar{\sigma}}_{ij} f + \left(\bar{\sigma}_{ij} \dot{f} \right)^{\cdot} - \left(\dot{\bar{\sigma}}_{ij} f \right)^{\cdot} \right] = \int_0^T dt \int_\Omega d\Omega \; \ddot{\bar{\sigma}}_{ij} f \,, \quad (4.70)$$

$$\int_0^T dt \int_\Omega d\Omega \; \bar{\mu}_{ij} \ddot{g} = \int_0^T dt \int_\Omega d\Omega \left[\ddot{\bar{\mu}}_{ij} g + \left(\bar{\mu}_{ij} \dot{g} \right)^{\cdot} - \left(\dot{\bar{\mu}}_{ij} g \right)^{\cdot} \right] = \int_0^T dt \int_\Omega d\Omega \; \ddot{\bar{\mu}}_{ij} g \,, \quad (4.71)$$

حيث تنتج (4.71)–(4.68) عن خواص الاشتقاق الجزئي وعن مبرهنة الـ div وعن الشروط الحدية المتجانسة (4.18) و(4.19) وعن الشروط الحدية والابتدائية المتجانسة (4.59)– (4.54). الآن، باستخدام (4.71)–(4.68)، ومن ثم باستخدام تعريف الجداء الداخلي في $L_2(Q_T)$ ، نحصل من العلاقة (4.67)، مباشرةً على العلاقة:

$$\begin{aligned} -\left(\left\langle p_{ij}, g_{ij} \right\rangle, \left\langle \bar{\sigma}_{ij}, \bar{\mu}_{ij} \right\rangle \right)_{L_2(Q_T)} &= \left(\mathcal{L} \left\langle \sigma_{ij}, \mu_{ij} \right\rangle, \left\langle \bar{\sigma}_{ij}, \bar{\mu}_{ij} \right\rangle \right)_{L_2(Q_T)} \\ &= \left(\left\langle \sigma_{ij}, \mu_{ij} \right\rangle, \mathcal{L} \left\langle \bar{\sigma}_{ij}, \bar{\mu}_{ij} \right\rangle \right)_{L_2(Q_T)} \end{aligned} \quad (4.72)$$

وبذلك يكون قد انتهى البرهان.

مبرهنة 4.7: يحقق الحل المعمم $\left\langle \sigma_{ij}, \mu_{ij} \right\rangle \in E(\Omega)$ لمسألة لقيم الحدية والابتدائية (4.19)–(4.11) العلاقة:

$$\left(\left\langle \sigma_{ij}, \mu_{ij} \right\rangle, \mathcal{L} \left\langle \bar{\sigma}_{ij}, \bar{\mu}_{ij} \right\rangle \right)_{L_2(Q_T)} + \left(\left\langle p_{ij}, g_{ij} \right\rangle, \left\langle \bar{\sigma}_{ij}, \bar{\mu}_{ij} \right\rangle \right)_{L_2(Q_T)} = 0 \quad (4.73)$$

وذلك أيا كانت $\left\langle \bar{\sigma}_{ij}, \bar{\mu}_{ij} \right\rangle$ من $L_2(Q_T)$.

البرهان:

لتكن $\left\langle p_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)} \right\rangle, \left\langle \sigma_{ij}^{(k)}, \mu_{ij}^{(k)} \right\rangle$ هي الحقول التنسورية التي تظهر في التعريف 4.4، والموافقة للحل المعمم $\left\langle \sigma_{ij}, \mu_{ij} \right\rangle \in E(\Omega)$. وفقاً للمبرهنة المساعدة السابقة تتحقق العلاقة التالية:

$$\left(\left\langle p_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)} \right\rangle, \left\langle \bar{\sigma}_{ij}, \bar{\mu}_{ij} \right\rangle \right)_{L_2(Q_T)} + \left(\left\langle \sigma_{ij}^{(k)}, \mu_{ij}^{(k)} \right\rangle, \mathcal{L} \left\langle \bar{\sigma}_{ij}, \bar{\mu}_{ij} \right\rangle \right)_{L_2(Q_T)} = 0, \quad \forall k = 1,2,3,... \quad (4.74)$$

وبحسب خواص الجداء الداخلي والنظيم في $L_2(Q_T)$ نجد:

$$\left|\left(\left\langle\sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle,\mathcal{L}\left\langle\bar{\sigma}_{ij},\bar{\mu}_{ij}\right\rangle\right)_{L_2(Q_T)}+\left(\left\langle p_{ij},g_{ij}\right\rangle,\left\langle\bar{\sigma}_{ij},\bar{\mu}_{ij}\right\rangle\right)_{L_2(Q_T)}\right|=$$

$$\left|\left(\left\langle\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{(k)},\mu_{ij}-\mu_{ij}^{(k)}\right\rangle,\mathcal{L}\left\langle\bar{\sigma}_{ij},\bar{\mu}_{ij}\right\rangle\right)_{L_2(Q_T)}+\right.$$

$$\left.+\left(\left\langle p_{ij}-p_{ij}^{(k)},g_{ij}-g_{ij}^{(k)}\right\rangle,\left\langle\bar{\sigma}_{ij},\bar{\mu}_{ij}\right\rangle\right)_{L_2(Q_T)}\right| \qquad (4.75)$$

$$\leq \left\|\left\langle\bar{\sigma}_{ij},\bar{\mu}_{ij}\right\rangle\right\|_{L_2(Q_T)}\times\left\|\left\langle p_{ij}-p_{ij}^{(k)},g_{ij}-g_{ij}^{(k)}\right\rangle\right\|_{L_2(Q_T)}+$$

$$+\left\|\mathcal{L}\left\langle\bar{\sigma}_{ij},\bar{\mu}_{ij}\right\rangle\right\|_{L_2(Q_T)}\times\left\|\left\langle\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{(k)},\mu_{ij}-\mu_{ij}^{(k)}\right\rangle\right\|_{L_2(Q_T)}$$

وبما أن: $\left\langle\sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle\in E(\Omega)$ هو حل معمم للمسألة (4.19)–(4.11)، فإنه يوجد عدد صحيح موجب $N(\varepsilon)>0$ بحيث:

$$k\geq N(\varepsilon)\text{ لأجل كل: }\left\|\left\langle p_{ij}-p_{ij}^{(k)},g_{ij}-g_{ij}^{(k)}\right\rangle\right\|_{L_2(Q_T)}<\varepsilon \qquad (4.76)$$

$$k\geq N(\varepsilon)\text{ لأجل كل: }\left\|\left\langle\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{(k)},\mu_{ij}-\mu_{ij}^{(k)}\right\rangle\right\|_{L_2(Q_T)}<\varepsilon \qquad (4.77)$$

ينتج عن العلاقات (4.75)–(4.77) أن الثنائية $\left\langle\sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle\in E(\Omega)$ تحقق العلاقة (4.73)، وبذلك يكون قد انتهى البرهان.

نتيجة 4.8: (الشروط الكافية التي تجعل الحل المعمم للمسألة (4.19)–(4.11) حلاً تقليدي لها)

إذا كان $\left\langle\sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle\in C^2(Q_T)\times C^2(Q_T)$، عندئذٍ بالسير بطريقة مشابهة لما فعلناه في المبرهنة المساعدة 4.2 ، نجد بعد الحساب البسيط أن:

$$\left(\left\langle\sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle,\mathcal{L}\left\langle\bar{\sigma}_{ij},\bar{\mu}_{ij}\right\rangle\right)_{L_2(Q_T)}=\left(\mathcal{L}\left\langle\sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle,\left\langle\bar{\sigma}_{ij},\bar{\mu}_{ij}\right\rangle\right)_{L_2(Q_T)} \qquad (4.78)$$

ينتج عن ذلك وعن (4.73) وخواص الجداء الداخلي أن:

$$\left(\mathcal{L}\left\langle\sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle+\left\langle p_{ij},g_{ij}\right\rangle,\left\langle\bar{\sigma}_{ij},\bar{\mu}_{ij}\right\rangle\right)_{L_2(Q_T)}=0 \qquad (4.79)$$

إضافة لما تقدم إذا فرضنا أيضاً أن: $\left\langle p_{ij},g_{ij}\right\rangle\in C(Q_T)\times C(Q_T)$ عندها ومن (4.79) ينتج أن:

$$\mathcal{L}\left\langle\sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle=-\left\langle p_{ij},g_{ij}\right\rangle\text{ على }\Omega\times(0,T) \qquad (4.2.44)$$

هذا يعني أنه إذا كان الحل المعمم $\left\langle\sigma_{ij},\mu_{ij}\right\rangle$ أملساً بما فيه الكفاية، وكانت القوة الحجمية منتظمة بما فيه الكفاية، عندئذ فإن هذا الحل المعمم يحقق المعادلة التنسورية للحركة، نقطياً، وبالتالي يتطابق هذا الحل المعمم للمسألة المدروسة، مع حلها الكلاسيكي.

5. الاستنتاجات والمقترحات:

الاستنتاجات: في البحث أثبتنا وحدانية الحل المعمم لمسألة Ignaczak للقيم الحدية والابتدائية للجسم المرن الدقيق غير المتجانس ومتماثل المناحي في إطار الديناميك الخطي اللاتناظري، كما صغنا وأثبتنا ومبرهنة حول فضاء Hilbert $L_2(Q_T)$ لهذا الجسم.

يمكن أن تلعب هذه الحل المعمم المذكور دوراً هاماً عند كتابة مسألة Ignaczak للقيم الحدية والابتدائية بشكلها الضعيف بهدف إيجاد حلولها العددية بالخطأ الأصغر.

المقترحات: نقترح مناقشة المسائل التالية:

1) وجود ووحدانية الحل المعمم لمسألة Ignaczak للقيم الحدية والابتدائية لأجل الجسم المرن الدقيق غير المتجانس ومتماثل المناحي في إطار الترموديناميك الخطي اللاتناظري، حيث التوصيل الحراري تقليدي وفقاً لقانون Fourier [8,9,10] في التوصيل الحراري.
2) إعادة ما تقدم ذكره من أجل توصيل حراري معمم بزمن استرخاء واحد.
3) إعادة ما تقدم ذكره من أجل توصيل حراري معمم بزمني استرخاء.

المراجع

[1] – Ignaczak , J , 1963 - A completeness problem for stress equations of motion in the linear elasticity , Arch.Mech. **15** , 225-234 .
[2] - Ignaczak , J , 1971 - Tensorial equations of motion for elastic materials with microstructure , in : Trends of Elasticity and Thermoelasticity, Witold Nowacki Ann.Volume , Wolters-Noordhoff Groningen , 90 – 111;
[3] – Eringen , A . C , **1966** - *Linear theory of micropolar elasticity*, J.Math. Mech., 15 , 909 – 930.
[4] –Nowacki, W , **1986** - Theory of Asymmetric Elasticity , Warsaw , PWN.
[5] – Ignaczak , J , 1971 - Existence of generalized tensori in linear elastodynamics , Arch.Mech. **23** , 113-422 .
[6] – Sobolev, S. L, **1964**-*Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Pergamon Press LTD**.**,

[7] –Klecha , T , 1973 - Existence of generalized tensorial fields in linear asymmetric elastodynamics, Bull. Acad. Polon. Sci. , sér. Sci. Tech., 21 , 2 , 111-119.
[8]- Dyszlewicz , J, **2004** - Micropolar Theory of Elasticity , in : Series Lectures. Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol.15, 356 p, Springer .
[9] – Al-Hasan,M , Dyszlewicz,J , 2001-Stress-temperature equations of motion of Ignaczak type for a three – dimensional problem of micropolar thermoelasticity , Journal of Thermal Stresesses ,24, p. 709 -722.
[10] – Al-Hasan,M ,Dyszlewicz,J,2014,Coupled Dynamic Micropo-lar Problems of Thermoelasticity: Stress–Temperature Equations of Motion of Ignaczak Type. In: Hetnarski R.B. (eds) Encyclopaedia of Thermal Stresses. Springer, Dordrecht, p. 740 – 753.