تشكيل قاعدة لفضاءات نووية باستخدام دوال هرميت

بسمه هشام الحمدو* أ.د.منير مخلوف** أ.د.ابراهيم إبراهيم***

(الإيداع: 19 تشرين الثاني 2025، القبول: 24 تشرين الثاني)

الملخص:

في هذا البحث سنشكل قاعدة بواسطة دوال هرميت في فضاء نووي هو فضاء شفارتز الشهير $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$، أو ما يطلق عليه اسم فضاء الدوال المتناقصة بسرعة، والفضاء الثنوي له$\boldsymbol{S'}(\mathbb{R})$ ، أو ما يطلق عليه اسم فضاء التوزيعات المتزايدة ببطء . هذان الفضاءان يعتبران من أهم فضاءات الدوال نظراً لتطبيقاتهما المتعددة في التحليل الدالي ونظرية المعادلات التفاضلية ونظرية التوزيعات وغيرها. وسوف نشكل قاعدة في هذين الفضائين مؤلفة من دوال هرميت المعروفة بحيث إن كل دالة (من $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$) وكل توزيع (من $\boldsymbol{S'}(\mathbb{R})$) يكتب بشكل سلسلة متقاربة من نفس العنصر في الفضاء ذاته.

الكلمات المفتاحية : الفضاءات النووية ، القاعدة ، النشر المتعامد ، الدوال الخاصة ، التوزيعات.

*طالبة دراسات عليا(دكتوراه)-كلية العلوم-جامعة حمص

**أستاذ دكتور-كلية العلوم-جامعة حمص

***أستاذ دكتور-كلية العلوم-جامعة حمص

Construction Basis of Nuclear Spaces by Using Hermite Functions

Basma Hisham Alhamdo* **Prof.Dr.Monir Makhlouf**** **Prof.Dr.Ibrahim Ibrahim*****

(Received: 19 November 2025, Accepted: 24 November 2025)

Abstract:

In this paper we construct basis by using Hermite functions in the famous Schwartz spaces $\mathbf{S}(\mathbb{R})$, known as the space of rapidly decreasing functions, and in its dual space $\mathbf{S}'(\mathbb{R})$, known as the space of tempered distributions. These two spaces are considered among the most important function spaces due to their numerous applications in functional analysis, the theory of differential equations, distributions theory and others. We will form basis in these spaces consisting of the Hermite functions, where each function in $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ and each distribution in $\mathbf{S}'(\mathbb{R})$ can be written as series converging to the same element in the same space.

Key Words: Nuclear Spaces, Basis, Orthogonal Expansions, Special Functions, Distribution.

*Graduate Student(Doctorate)-Faculty of Science-Homs University

**Professor Doctor-Faculty of Science-Homs University

*** Professor Doctor-Faculty of Science-Homs University

- **مقدمة:**

الفضاءات النووية **(Nuclear Spaces)** هي نوع خاص من الفضاءات الطوبولوجية، لها أهميتها الخاصة في فروع شتى من الرياضيات، وقد أوجدها العالم الألماني**(Alexander Grothendieck)** في عام 1950، وتُعرَّف بالشكل التالي:

الفضاء النووي: هو فضاء خطي طبولوجي محدب موضعياً X ، حيث إن الطبولوجيا فيه معرفة بواسطة أسرة من أنصاف النظم $\{p\}$، ومن أجل كل نصف نظيم p يوجد نصف نظيم آخر q أكبر. هذا يعني أنه إذا كان $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ نصف نظيم على X، وكانت كرة الواحدة الموافقة له $B_{1,p}(O)$ ، فيوجد نصف نظيم آخر $q : X \longrightarrow \mathbb{R}$ بحيث إن كرة الواحدة الموافقة $B_{1,q}(O)$ محتواة في $B_{1,p}(O)$.

بعبارة أخرى: كل جوار للصفر O يحوي جواراً أصغر.

الطمر المستمر: لتكن X وY فضاءات باناخ، نقول أنX مطمور بشكل مستمر في Y ، و نرمز لذلك ب $X \circlearrowleft Y$، إذا كان لأجل أي $x \in X$ فإنَّ $x \in Y$، و كان تطبيق الطمر مستمر أي أنه لأجل $x \in X$ فإنَّ $\|x\|_Y \le \|x\|_X$، من المفيد التنويه هنا أن العديد من الفضاءات الهامة في التحليل هي فضاءات نووية. للمزيد عن هذه الفضاءات يمكن العودة للمراجع: [14] , [11] , [7] , [4] , [3] .

- **هدف البحث:**

تشكيل قاعدة لبعض الفضاءات النووية ، منها فضاء شفارتز $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ ، و هو فضاء الدوال المتناقصة بسرعة ، و الفضاء الثنوي له $\boldsymbol{S'}(\mathbb{R})$ و هو فضاء التوزيعات المتزايدة ببطء.

- **مواد و طرائق البحث:**

1− دوال هرميت ومؤثر هرميت [12] , [9] , [8] , [2] , [1]

تُعطى كثيرات حدود هرميت (Hermite polynomials) من الدرجة n بصيغة رودريج :

$$\boldsymbol{H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right] \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots} \qquad (1.1)$$

وتعطى دوال هرميت بالشكل:

$$\boldsymbol{h_n(x) = \left(2^n n!\sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots} \qquad (1.2)$$

هذه الدوال تشكل جملة متعامدة منظمة وتامة في فضاء هيلبرت $L_2(\mathbb{R})$، وهي الدوال الذاتية لمؤثر هرميت التفاضلي $H : D(H) \longrightarrow L_2(\mathbb{R})$ ، حيث:

$$Hf(x) = -f'' + x^2 f ,$$

وموافقة للقيم الذاتية [12] , [10]:

$$\lambda_n = 2n + 1 \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

هذه القيم الذاتية بسيطة (أي من الرتبة 1). إضافة لذلك: فإن دوال هرميت $h_n(x)$ تنتمي للفضاءات $L_p(\mathbb{R})$، حيث $1 \le p \le \infty$، ونظائمها تحقق التقديرات التالية [9]:

$$\|h_n\|_{L_p} \sim \begin{cases} n^{\frac{1}{2p}-\frac{1}{4}} & ; \quad 1 \le p < 4 \\ n^{-\frac{1}{8}} & ; \quad p = 4 \\ n^{-\frac{1}{6p}-\frac{1}{12}} & ; \quad 4 < p \le \infty \end{cases} \qquad (1.3)$$

تُعرَّف عوامل فوريه للدالة $L_p(\mathbb{R}) \ni f$ بالعلاقة:

$$a_n(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)h_n(x)dx \quad ; \quad n = 0,1,2,\dots \tag{1.4}$$

فتكون سلسلة فوريه (الشكلية) الموافقة لهذه الدالة هي:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)\, h_n(x) \ , \tag{1.5}$$

ومتتالية المجاميع الجزئية لهذه السلسلة:

$$S_N f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(f)\, h_n\,(x) \quad ; \quad N = 1, 2, \dots$$

تتقارب في الفضاء $L_p(-\infty,+\infty)$ من أجل القيم $\frac{4}{3} < p < 4$ فقط [10].

غايتنا في هذا البحث توسيع المجال السابق إلى المجال $1 \le p \le \infty$ بحيث يمكن نشر كل دالة بسلسلة من الشكل (1.5) متقاربة من الدالة نفسها. للحصول على ذلك نستخدم فضاءً نووياً تشكل دوال هرميت $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ قاعدة فيه، إنه الفضاء الشهير $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ المعروف باسم فضاء شفارتز (أو فضاء الدوال المتناقصة بسرعة)، ومن ثم نوجد الفضاء الثنوي له $\boldsymbol{S'}(\mathbb{R})$ المعروف باسم فضاء التوزيعات المتزايدة ببطء. في الفقرة التالية سندرس خواص هذين الفضائين بالاعتماد على مؤثر هرميت H ودواله الذاتية [5]. ولكن قبل ذلك نذكر المعلومات التالية عن هذا المؤثر (حيث نكتب L_2 فقط بدلاً من $L_2(\mathbb{R})$).

بحسب [12] فإن H مؤثر موجب محدد وذو طيف نقطي بحت. هذا يعني أن طيفه يحوي فقط القيم الذاتية λ_n. ومجموعة تعريفه هي:

$$D(H) = \left\{ f \in L_2 : \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 \, |\langle f , h_n\rangle|^2 < \infty \right\}, \tag{1.6}$$

كما أن:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \ \langle f , h_n\rangle h_n \quad ; \quad f \in D(H). \tag{1.7}$$

نعرف القوى الصحيحة للمؤثر H بالشكل:

$$H^0 = I \ \left(\text{مؤثرالمطابقة}\right) \ , \ \ H^1 = \mathrm{H} \ \ , \ \ H^2 = H^1(HA^1) \, , \dots \ \ , H^k = H^1(H^{k-1}) \ ,$$

فنجد ان:

$$D(H^k) = \left\{ f \in L_2 : \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{2k} \ |\langle f , h_n\rangle|^2 < \infty \right\} , \tag{1.8}$$

كما أن:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^k \ \langle f , h_n\rangle h_n \quad ; \quad f \in D(H^k). \tag{1.9}$$

2- الفضاء $S(\mathbb{R})$: [13] , [12]

تعريف (2-1): يرمز $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ لفضاء الدوال $\boldsymbol{\varphi(x)}$ القابلة للإشتقاق عدداً لانهائياً من المرات بمشتقات مستمرة على $\mathbb{R}$ ، والتي تحقق أحد الشروط التالية (المتكافئة فيما بينها) من أجل $\boldsymbol{m , l = 0, 1, 2, \dots}$:

$$(I) \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^m \varphi^{(l)}(x) \right| \le C_{m,l} < \infty \ ,$$

$$(II) \qquad \sup_{0\le\alpha\le l}\ \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+x^2)^m\left|\varphi^{(\alpha)}(x)\right| \le C_{m,l} < \infty\ ,$$

$$(III) \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^m \sum_{\alpha=0}^{l}\left|\varphi^{(\alpha)}(x)\right| \le C_{m,l} < \infty\ ,$$

$$(IV) \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+x^2)^m \sum_{\alpha=0}^{l}\left|\varphi^{(\alpha)}(x)\right| \le C_{m,l} < \infty\ ,$$

حيث $\varphi^{(\alpha)}(x)$ يرمز للمشتق من المرتبة α للدالة $\varphi(x)$، وسوف نثبت لاحقاً في المبرهنة $(3-6)$ أن الشروط السابقة تكافئ الشرط التالي:

$$(V) \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|H^k\varphi(x)\right| \le C_k < \infty \quad ; \quad k=0,1,2,\ldots.$$

ملاحظة $(2-2)$: (1) كل من العلاقات السابقة تُعَّرف نصف نظيم على $S(\mathbb{R})$ من أجل كل ثنائية $(m\,,l)$. أي أنه توجد أسرة من أنصاف النظم (المتكافئة فيما بينها)، وسوف نرمز لها بـ $p_{m\,,l}(\varphi)$.

(نشير هنا أننا اعتمدنا نفس الرمز $p_{m\,,l}(\varphi)$ لأن هذه لا تغيّر من الخواص الطبولوجية الأساسية مثل الاستمرار والمحدودية وماشابه). أما الشرط فنرمز له بـ $p_k(\varphi)$ ، وهو يكافئ $p_{m\,,l}(\varphi)$.

(2) الأسرة $\{p_{m\,,l}(\varphi)\}$ تجعل $S(\mathbb{R})$ فضاءً نووياً.

(3) أكثر من ذلك يكون $S(\mathbb{R})$ فضاء فريشيه مع هذه الأسرة [13].

(4) من التعريف السابق نجد من أجل كل $\varphi \in S(\mathbb{R})$:

$$\left|\varphi^{(\alpha)}(x)\right| \le \frac{C}{(1+x^2)^m} \longrightarrow 0 \quad ; \quad |x| \longrightarrow \infty\,.$$

وهذا يعني أن الدالة $\varphi(x)$ وجميع مشتقاتها تنتهي إلى الصفر عنما يكبر $|x|$ بلانتاه.

(5) من الواضح أن $S(\mathbb{R})$ مغلقة بالنسبة لعمليتي الاشتقاق والضرب بكثيرة حدود. بشكل خاص يكون:

$$(2.2) \qquad H^k\varphi \in S(\mathbb{R}) \quad ; \quad \forall\, \varphi \in S(\mathbb{R})\,.$$

كما أن دوال هرميت المعرفة بالعلاقة (1.2) تنتمي إلى $S(\mathbb{R})$. لذلك يكون لدينا بحسب (1.9) :

$$(2.3) \qquad H^k\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^k\, \langle \varphi\,, h_n\rangle h_n \quad ; \quad \varphi \in S(\mathbb{R})\,.$$

هذه السلسلة متقاربة في L_2 من φ نفسه. وسوف نبين بعد قليل أن التقارب يصح في $S(\mathbb{R})$.

تعريف $(2-3)$: نقول إن المتتالية $\{\varphi_N\}$ متقاربة في $S(\mathbb{R})$ من الدالة φ إذا كان:

$$p_{m\,,l}(\varphi_N-\varphi) \longrightarrow 0 \quad ; \quad N \longrightarrow \infty\,, \quad \forall\, m\,,l = 0,1,2,\ldots\,.$$

3- فضاء الاختبار $\mathcal{H}$

في هذه الفقرة سنوجد خواص الفضاء $S(\mathbb{R})$ بالاعتماد على عوامل فورييه لعناصره بالنسبة لدوال هرميت $h_n(x)$ ، مع الاستفادة من النظرية الطيفية لمؤثر هرميت H وقواه الصحيحة، حيث نشكل فضاءً $\mathcal{H}$ يحوي $S(\mathbb{R})$.

فيما يلي نعتبر أن $D(H^k)$ كما هي في (1.8).

تعريف $(3-1)$: نضع:

$$(3.1) \qquad \mathcal{H} = \bigcap_{k=0}^{\infty} D(H^k)$$

ونسميه فضاء الاختبار، ونزوده بالأسرة من أنصاف النظم:

$$(3.2) \qquad \|f|_k = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{2k}\ |\langle f\ ,h_n\rangle|^2\right)^{1/2} = \|H^k f\|_{L_2} \quad ; \quad k = 0,1,2,\dots.$$

ملاحظة (3−2): (1) من الواضح أن الأسرة $\left\{\ \|f|_k\right\}_{k=0}^{\infty}$ تحقق:

$$(3.3) \qquad \|f|_0 \le \|f|_1 \le \cdots \le \|f|_k \le \|f|_{k+1} \le \cdots \quad ; \quad f \in \mathcal{H}\ ,$$

أو بالشكل المكافئ:

$$(3.3)' \qquad \|f\|_{L_2} \le \|Hf\|_{L_2} \le \cdots \le \|H^k f\|_{L_2} \le \|H^{k+1} f\|_{L_2} \le \cdots\ ;\ \ f \in \mathcal{H}.$$

(2) من الواضح أن:

$$(3.4) \qquad f \in \mathcal{H} \iff \{\lambda_n^k\ \langle f\ ,h_n\rangle\} \in \ell_2\ .$$

(3) $\mathcal{H}$ فضاء نووي، وبعد قليل نثبت أنه تام، ثم نبين أن دوال هرميت تشكل قاعدة فيه.

تعريف (3−2): نقول إن المتتالية $\{f_N\}$ متقاربة في الفضاء $\mathcal{H}$ من الدالة f إذا كان:

$$\lim_{N\to\infty} \|f_N - f|_k = 0 \quad ; \quad \forall\ k = 0,1,2,\dots.$$

ونقول إن $\{f_N\}$ متتالية كوشي (أو متتالية أساسية) في $\mathcal{H}$ إذا كان:

$$\lim_{N,M\to\infty} \|f_N - f_M|_k = 0 \quad ; \quad \forall\ k = 0,1,2,\dots.$$

مبرهنة (3−3): $\mathcal{H}$ فضاء متعدد أنصاف النظم وتام مع الأسرة (3.2).

الإثبات: لتكن $\{f_N\}$ متتالية كوشي في $\mathcal{H}$. هذا يعني أن:

$$\|f_N - f_m|_k < \varepsilon \quad ; \quad N > M > N_0(\varepsilon).$$

وبما أن:

$$\|f_N - f_M\|_{L_2} \le \|f_N - f_m|_k < \varepsilon \quad ; \quad N > M > N_0(\varepsilon).$$

ينتج من ذلك أن $\{f_N\}$ متتالية كوشي في الفضاء L_2 ، فهي متقاربة، ولنفرض:

$$f_N \xrightarrow[N\to\infty]{} f \in L_2\ .$$

لذلك يكون: $\|f_N\|_{L_2}^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} \|f\|_{L_2}^2$. أي أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle f_N\ ,h_n\rangle|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f\ ,h_n\rangle|^2.$$

لدينا الآن:

$$\langle f_N\ ,h_n\rangle \xrightarrow[N\to\infty]{} \langle f\ ,h_n\rangle \quad ; \quad n = 0,1,2,\dots.$$

و كذلك:
$$\lambda_n^k\ \langle f_N\ ,h_n\rangle \xrightarrow[N\to\infty]{} \lambda_n^k \langle f\ ,h_n\rangle \quad ; \quad n = 0,1,2,\dots.$$

وبما أن $\{\lambda_n^k\ \langle f_N\ ,h_n\rangle\} \in \ell_2$ فيكون أيضاً $\{\lambda_n^k\ \langle f\ ,h_n\rangle\} \in \ell_2$.

وبحسب (3.4) يكون $f \in \mathcal{H}$، كما أن المتتالية $\{f_N\}$ متقاربة من f في $\mathcal{H}$. أي $\mathcal{H}$ تام.

مبرهنة (3−4): كل دالة $f \in \mathcal{H}$ يمكن نشرها بسلسلة فورييه من الشكل:

$$(3.5) \qquad f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f\ ,h_n\rangle\ h_n\ .$$

وهذه السلسلة متقاربة في $\mathcal{H}$ من f نفسه، أي أن دوال هرميت $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ تشكل قاعدة للفضاء $\mathcal{H}$.

الإثبات: معلوم أن (3.5) صحيحة في الفضاء L_2.

ليكن $f \in \mathcal{H}$ ، ولنأخذ متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة (3.5) :

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}\langle f\,,h_n\rangle\,h_n\quad;\quad N=1,2,\ldots.$$

فنجد أن $S_N\in\mathcal{H}$ ، كما أن:

$$f-S_N=\sum_{n=N+1}^{\infty}\langle f\,,h_n\rangle\,h_n\,.$$

لدينا الآن:

$$\|f-S_N\|_k^2=\sum_{n=N+1}^{\infty}\lambda_n^{2k}\,|\langle f\,,h_n\rangle|^2\xrightarrow[N\to\infty]{}0\,.$$

وهذا يعني أن المتتالية $\{S_N\}$ متقاربة في $\mathcal{H}$ من f نفسه، وبذلك نحصل على المطلوب.

نتيجة (3-5): كل سلسلة من الشكل: $\sum_{n=0}^{\infty}a_nh_n$ حيث $a_n\in\mathbb{C}$ ، تكون متقاربة في $\mathcal{H}$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

من أجل كل عدد صحيح غير سالب k ، تكون السلسلة العددية: $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{2k}\,|a_n|^2$ متقاربة. فإذا تحقق ذلك، ورمزنا بـ f لمجموعها، فيكون $a_n=\langle f\,,h_n\rangle$.ويتم التأكد من ذلك كما يلي:

ليكن $S_N=\sum_{j=0}^{N}\langle f\,,h_j\rangle\,h_j$ المجموع الجزئي للسلسلة، فيكون $S_N\in\mathcal{H}$، كما أن:

$$\|S_N\|_k^2=\sum_{n=0}^{N}\lambda_n^{2k}\left|\langle\sum_{j=0}^{N}\langle f\,,h_j\rangle\,h_j\,,h_n\rangle\right|^2=\sum_{n=0}^{N}\lambda_n^{2k}\,|a_n|^2\,.$$

بجعل $N\longrightarrow\infty$ نحصل على المطلوب.

مبرهنة (3-6): يصح الطمر المستمر $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})\hookrightarrow\mathcal{H}$ (أي أن $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ مجموعة جزئية من $\mathcal{H}$ ، كما أن التقارب في $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ يقتضي التقارب في $\mathcal{H}$).

الإثبات: لتكن $\{\varphi_N\}$ متتالية في $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ ومتقاربة من الدالة φ. هذا يعني بحسب (II):

$$\boldsymbol{p_{m,l}(\varphi_N-\varphi)=\sup_{0\le\alpha\le l}\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)^m\left|\varphi_N^{(\alpha)}(x)-\varphi^{(\alpha)}(x)\right|\xrightarrow[N\to\infty]{}0}\,.$$

وبما أن:

$$\left|\varphi_N^{(\alpha)}(x)-\varphi^{(\alpha)}(x)\right|\le p_{m,l}(\varphi_N-\varphi)\xrightarrow[N\to\infty]{}0\,,$$

ينتج أن التقارب في $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ يقتضي التقارب المنتظم لمتتالية المشتقات $\left\{\varphi_N^{(\alpha)}(x)\right\}$، وهذا أمر معروف.

بما أن المؤثر H^k مترافق ذاتياً ، فيكون:

$$\lambda_n^{2k}\langle f\,,h_n\rangle=\langle H^kf\,,h_n\rangle\quad;\quad n=0,1,2,\ldots.$$

لذلك يكون:

$$\|\varphi_N-\varphi\|_k^2=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{2k}\,|\langle\varphi_N-\varphi\,,h_n\rangle|^2=\sum_{n=0}^{\infty}|\langle H^k(\varphi_N-\varphi)\,,h_n\rangle|^2\,.$$

وبحسب التقارب المنتظم للمتتالية $\left\{\varphi_N^{(\alpha)}(x)\right\}$ يكون لدينا:

$$\begin{aligned}H(\varphi_N-\varphi)&=H\varphi_N-H\varphi=-\varphi_N''+x^2\varphi_N''-(-\varphi''+x^2\varphi)=\\&=(\varphi''-\varphi_N'')+x^2(\varphi_N''-\varphi)\xrightarrow[N\to\infty]{}0\,.\end{aligned}$$

وبشكل مشابه نجد:

$$H^2(\varphi_N-\varphi)=H\big(H(\varphi_N-\varphi)\big)\xrightarrow[N\to\infty]{}0\,.$$

وهكذا نجد بالتدريج أن:

$$H^k(\varphi_N-\varphi)=H\Big(H^{k-1}(\varphi_N-\varphi)\Big)\xrightarrow[N\to\infty]{}0\quad;\quad k=0,1,2,\ldots$$

وينتج من ذلك أن المتتالية $\{H^k\varphi_N(x)\}$ متقاربة في $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ من $H^k\varphi(x)$.

يكون أيضاً:

$$\langle H^k(\varphi_N-\varphi)\,,h_n\rangle\xrightarrow[N\to\infty]{}0\quad;\quad n=0,1,2,\ldots.$$

أي أن:

$$|\langle H^k(\varphi_N-\varphi)\,,h_n\rangle|<\varepsilon\quad;\quad N>N_0(\varepsilon)\ ,\ n=0,1,2,\ldots.$$

الآن: نختار N كبير بشكل كاف بحيث يكون:

$$|\langle H^k(\varphi_N-\varphi)\,,h_n\rangle|<\frac{\varepsilon}{2^n}\quad;\quad n=0,1,2,\ldots.$$

والآن: ليكن M عدداً طبيعياً، ولنحسب:

$$\sum_{n=0}^{M}|\langle H^k(\varphi_N-\varphi)\,,h_n\rangle|^2\le\sum_{n=0}^{M}\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right)^2\le\varepsilon^2\,.$$

وبما أن الطرف الأيمن مستقل عن M فيمكن ترك $M\longrightarrow\infty$ لنجد أن:

$$\|\varphi_N-\varphi|_k^2=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{2k}\,|\langle\varphi_N-\varphi\,,h_n\rangle|^2=\sum_{n=0}^{\infty}|\langle H^k(\varphi_N-\varphi)\,,h_n\rangle|^2\le\varepsilon^2.$$

وينتج من ذلك أن المتتالية $\{\varphi_N\}$ متقاربة في $\mathcal{H}$ من نفس النهاية φ.

لدينا الآن من أجل أي $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ ∋ φ:

$$H\varphi=-\varphi''+x^2\varphi\in\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}H^2\varphi=H(H\varphi)&=-(-\varphi''+x^2\varphi)''+x^2(-\varphi''+x^2\varphi)\,,\\&=\varphi''''-2x^2\varphi''-4x\varphi'+(x^4-2)\varphi\ \in\boldsymbol{S}(\mathbb{R})\,.\end{aligned}$$

وهكذا نجد بالتدريج أن:

$$H^k\varphi(x)=\sum_{j=0}^{2k}q_j(x)\,\varphi^{(j)}(x)\in\boldsymbol{S}(\mathbb{R})\ ,$$

حيث إن الطرف الأيمن في المساواة الأخيرة عبارة عن تركيب خطي لدوال من الشكل $x^m\varphi^{(l)}(x)$.

بناءً على ذلك يمكن إعادة تعريف الفضاء $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ على أنه فضاء الدوال $\varphi(x)$ التي تحقق الشرط:

$$(\boldsymbol{V})\qquad\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\boldsymbol{H^k\varphi(x)}\right|\le\boldsymbol{C_k}<\infty\quad;\quad\boldsymbol{k=0,1,2,\ldots}$$

وبما أن $H^k\varphi\in\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ من أجل $\varphi\in\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ فينتج أن $\varphi\in D(H^k)$، وبالتالي $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})\subset\mathcal{H}$.

بقي علينا إثبات صحة المتراجحة:

$$(3.6)\qquad\|\varphi|_k\le c\,p_{m,l}(\varphi)\quad;\quad\forall\varphi\in\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$$

لو فرضنا جدلاً أن هذه المتراجحة غير صحيحة، لوجدت متتالية $\{\varphi_N\}$ في $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ بحيث يكون:

$$\|\varphi_N|_k=1\quad,\quad\|\varphi_N|_k>N\,p_{N,N}(\varphi_N)\quad;\quad N=1,2,\ldots.$$

ولكن من أجل $m\,,l<N$ يكون:

$$p_{m,l}(\varphi_N) \leq p_{N,N}(\varphi_N) < \frac{1}{N} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$

وينتج من ذلك أن المتتالية $\{\varphi_N\}$ متقاربة من الصفر في $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ ، لكنها لايمكن أن تتقارب من الصفر في $\mathcal{H}$ ، وهذا يناقض ما أثبتناه آنفاً. بذلك يتم الإثبات.

مبرهنة (3-7): يصح الطمر المستمر $\mathcal{H} \hookrightarrow L_p$ ، حيث $1 \leq p \leq \infty$.

الإثبات: من أجل $p = 2$ الأمر واضح.

بالاستفادة من التقديرات (1.3) ، يمكن إيجاد عدد k (ربما يتعلق بـ p) بحيث يكون $\|h_n\|_{L_p} \leq c\, \lambda_n^k$.

لذلك يكون لدينا من أجل $f \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, h_n\rangle|\, \|h_n\|_{L_p} = c \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, h_n\rangle|\, \lambda_n^{k+1}\lambda_n^{-1} \\ &\leq c \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n^{k+1} |\langle f, h_n\rangle|)^2\, \lambda_n^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c' \|f|_{k+1} \end{aligned}$$

من ذلك ينتج أن $f \in L_p$، وبالتالي $\mathcal{H} \subset L_p$.

الآن لتكن $\{f_N\}$ متتالية في $\mathcal{H}$ ومتقاربة من f. عندئذ يكون لدينا بحسب المتراجحة السابقة:

$$\|f_N - f\|_{L_p} \leq c\, \|f_N - f|_{k+1} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0 .$$

وبذلك يتم المطلوب.

نتيجة (3-8): كل $f \in \mathcal{H}$ يمكن نشره بسلسلة من الشكل: $f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, h_n\rangle\, h_n$، وهذه السلسلة متقاربة في L_p من f نفسه.

ملاحظة (3-9): معلوم أن المجموعة $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ كثيفة في $L_p(\mathbb{R})$ من أجل $1 \leq p < \infty$. وبحسب المبرهنتين السابقتين يكون $\boldsymbol{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{H} \subset L_p(\mathbb{R})$، وبالتالي تكون $\mathcal{H}$ كثيفة في $L_p(\mathbb{R})$.

4- فضاء التوزيعات $\mathcal{H}'$: [5] , [6]

كالعادة يرمز $\mathcal{H}'$ للفضاء الثنوي للفضاء $\mathcal{H}$ المدروس في الفقرة السابقة. كل عنصر من $\mathcal{H}'$ هو دالي خطي من الشكل $F : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ يحقق خاصتي الخطية والاستمرار. ونسمي عناصر $\mathcal{H}'$ توزيعات، والمبرر يأتي لاحقاً.

مبرهنة (4-1): الدالي الخطي $F : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ ينتمي إلى $\mathcal{H}'$ إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعي k وعدد موجب c بحيث تتحقق المتراجحة:

$$(4.1) \qquad |F(f)| \leq c\, \|f|_k \quad ; \quad \forall\, f \in \mathcal{H} .$$

الإثبات: نفرض أن المتراجحة (4.1) محققة. ونعتبر أن $\{f_N\}$ متتالية في $\mathcal{H}$ ومتقاربة من f. عندئذ من كون F خطي بالفرض يكون لدينا:

$$|F(f_N - f)| \leq c\, \|f_N - f|_k \xrightarrow[N \to \infty]{} 0 .$$

من ذلك ينتج أن F مستمر، أي أن $F \in \mathcal{H}'$.

نعتبر الآن أن $F \in \mathcal{H}'$ ونفرض جدلاً عدم وجود العددين k و c. عندئذ: توجد متتالية $\{f_N\}$ في $\mathcal{H}$ بحيث إن $|F(f_N)| = 1$ ، كما أن:

$$1 = |F(f_N)| > N\, \|f_N|_N \quad ; \quad N = 1, 2, \dots .$$

ولكن من أجل $k \le N$ يكون:

$$\|f_N - 0|_k \ = \ \|f_N|_k \ \le \ \|f_N|_N < \frac{1}{N} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0 \ .$$

أي أن $0 \xrightarrow[N \to \infty]{} f_N$ وبالتالي $0 \xrightarrow[N \to \infty]{} F(f_N)$، وهذا غير ممكن لأن $|F(f_N)| = 1$.

ملاحظة (4-2): (1) نقول عن توزيعين $F , G \in \mathcal{H}'$ إنهما متساويان، ونكتب $F = G$، إذا كان:

$$F(f) = G(f) \quad ; \quad \forall f \in \mathcal{H} \ .$$

بشكل خاص: إذا كان $F(f) = 0$ فنسمي F التوزيع الصفري، ونكتب $F = 0$.

(2) نقول إن متتالية التوزيعات $\{F_N\}$ متقاربة من التوزيع F إذا كان:

$$F_N(f) \xrightarrow[N \to \infty]{} F(f) \quad ; \quad \forall f \in \mathcal{H} \ .$$

(3) نعرف عملية جمع توزيعين $F , G \in \mathcal{H}'$ (أو أكثر) بالشكل:

$$(F + G)(f) = F(f) + G(f) \quad ; \quad \forall f \in \mathcal{H} \ .$$

ونعرف عملية ضرب توزيع $F \in \mathcal{H}'$ بعدد عقدي λ بالشكل:

$$(\lambda F)(f) = \lambda F(f) \quad ; \quad \forall f \in \mathcal{H} \ .$$

مع هاتين العمليتين يصبح $\mathcal{H}'$ فضاءً خطياً، وهو تام بحسب [15,Theorem 1.8.3] .

(4) نعرف عوامل فورييه للتوزيع $F \in \mathcal{H}'$ بالشكل:

$$a_n(F) = F(h_n) \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

ملاحظة (4-3): فيما يلي نبين أن $\mathcal{H}'$ يحوي جميع الفضاءات $L_p(\mathbb{R})$.

ليكن $L_p(\mathbb{R})$ (مثبَّت)، حيث $1 \le p \le \infty$ ، ولنعرف الدالي $F_f : \mathcal{H} \ \longrightarrow \ \mathbb{C}$ بالشكل:

$$(4.2) \qquad F_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx \quad ; \quad \varphi \in \mathcal{H} \ .$$

إن F_f خطي . ويكون لدينا حسب متراجحة شفارتز (حيث $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) والمبرهنة (3-7):

$$(4.3) \qquad \left|F_f(\varphi)\right| \le \|f\|_{L_p} \, \|\varphi\|_{L_q} \le \|f\|_{L_p} \, \|\varphi|_k \quad ; \quad \varphi \in \mathcal{H} \ .$$

وبحسب المبرهنة (4-1) يكون $F_f \in \mathcal{H}'$.

والآن نشكل التطبيق Φ (وهو معرف تماماً بحسب ما ذكر آنفاً):

$$(4.4) \qquad \Phi : \, L_p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{H}' \quad ; \quad f \ \mapsto \ \Phi(f) = F_f \ .$$

نأخذ الآن دالتين $f , g \in L_p(\mathbb{R})$ ونعتبر أن F_f و F_g الداليين الموافقين لهما، عندئذ:

$$F_f = F_g \ \Leftrightarrow \ F_f(\varphi) = F_g(\varphi) \quad ; \quad \forall \varphi \in \mathcal{H} \ .$$

$$\Leftrightarrow \ \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)dx \quad ; \quad \varphi \in \mathcal{H} \ .$$

$$\Leftrightarrow \ \int_{\mathbb{R}} [f(x) - g(x)]\varphi(x)dx \ = 0 \quad ; \quad \varphi \in \mathcal{H} \ .$$

وبما أن $\mathcal{H}$ كثيفة في $L_p(\mathbb{R})$ فيكون $[f(x) - g(x)] = 0$ تقريباً في كل مكان، أي أن $f = g$ في $L_p(\mathbb{R})$. هذا يعني ان Φ تطبيق واحد- لواحد. لذلك تصح المطابقة:

$$(4.5) \qquad L_p \ni f \leftrightarrow \ F_f \in \mathcal{H}'$$

بناءً على هذه المطابقة يمكن اعتبار أنّ كل دالة $f \in L_p(\mathbb{R})$ تمثل توزيعاً $F_f \in \mathcal{H}'$ ، ويمكن أن نرمز بـ f لهذا التوزيع. لذلك يمكن كتابة (4.2) بالشكل:

$$(4.6) \qquad f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx \quad ; \quad \varphi \in \mathcal{H} \ , \ f \in L_p(\mathbb{R}).$$

وهنا لدينا الحالات الآتية:

من أجل $\varphi = h_n$ يكون:

$$(4.7) \qquad f(h_n) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = a_n(f) \quad ; \quad f \in L_p(\mathbb{R}). \quad -$$

من أجل $f = h_n$ يكون:

$$(4.8) \qquad h_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} h_n(x)\varphi(x)dx = \langle \varphi, h_n \rangle \quad ; \quad f \in L_2(\mathbb{R}). \quad -$$

– ومن أجل $f = h_n$ و $\varphi = h_m$ يكون:

$$(4.9) \qquad h_n(h_m) = \int_{\mathbb{R}} h_n(x)h_m(x)dx = \langle h_n, h_m \rangle = \delta_{n,m}. \quad -$$

أيضاً يمكن كتابة (4.2) بالشكل:

$$(4.10) \qquad |f(\varphi)| \le c. \|f\|_p \ \|\varphi|_k \quad ; \quad \varphi \in \mathcal{H}$$

وبذلك نحصل على الطمر المستمر $L_p(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{H}'$.

بشكل خاص: إذا أخذنا $\varphi = h_n$ في عبارة F_f نحصل على عوامل فورييه للتوزيع F_f وهي:

$$(4.11) \qquad a_n(F_f) = F_f(u_n) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \ h_n(x)dx = a_n(f) \ .$$

وهي نفسها عوامل فورييه للتابع الموافق f. طبعاً هذا ينسجم مع المطابقة (4.5)، حيث سنرى أدناه في نتيجة (4-5) أن الدالة f والتوزيع الموافق F_f لهما نفس سلسلة فورييه (التقارب في $\mathcal{H}'$ وليس بالضرورة في $L_p(\mathbb{R})$).

لدينا الآن المبرهنة الهامة الآتية:

مبرهنة (4-4): (1) كل توزيع $F \in \mathcal{H}'$ يمكن نشره بسلسلة من الشكل:

$$(4.12) \qquad F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(F)h_n \ .$$

(2) السلسلة $\sum_{n=01}^{\infty} a_n u_n$ حيث $a_n \in \mathbb{C}$ ، تكون متقاربة في $\mathcal{H}'$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي:

يوجد عدد طبيعي k بحيث تكون السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2k} |a_k|^2$ متقاربة. فإذا تحقق ذلك ورمزنا ورمزنا بـ F لمجموع السلسلة فيكون: $a_n = a_n(F)$.

الإثبات: (1) ليكن $F \in \mathcal{H}'$. عندئذ: من أجل كل $\varphi \in \mathcal{H}$ يكون لدينا بحسب (3.5) و (4.8) :

$$F(\varphi) = F\left(\sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, h_n \rangle h_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, h_n \rangle F(h_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\varphi) a_n(F) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(F) h_n\right)(\varphi) \ .$$

ومنه نحصل على السلسلة (4.12).

(2) لنأخذ متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n$:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n\, h_n \quad ; \quad N = 1,2,\dots$$

عندئذ من أجل أي $\varphi \in \mathcal{H}$ يكون:

$$|S_N(\varphi)| = \left|\sum_{n=0}^{N} a_n h_n(\varphi)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} a_n \langle \varphi, h_n \rangle\right| \leq \left(\sum_{n=0}^{N} \lambda_n^{-2k} |a_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N} \lambda_n^{2k} . |\langle \varphi, h_n \rangle|^2\right)^{1/2} .$$

فإذا كانت السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2k} |a_n|^2$ متقاربة ومجموعها c ، نجد أنّ:

$$|S_N(\varphi)| \leq c\, \|\varphi|_k \quad ; \quad \varphi \in \mathcal{H} .$$

بجعل $N \to \infty$ نحصل على المطلوب بحسب المبرهنة **(4−1)**.

نتيجة (4−5): ليكن $f \in L_p$ وليكن $F_f \in \mathcal{H}'$ التوزيع الموافق. عندئذ يكون (حيث التقارب في $\mathcal{H}'$):

$$F_f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(F_f) u_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) u_n = f ,$$

بذلك نحصل على نشر توزيعي (معمم) لكل تابع $f \in L_p$ ، حيث $1 \leq p \leq \infty$.

جدير بالذكر أن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) u_n$ تكون متقاربة في L_p من f فقط عندما $\frac{4}{3} < p < 4$، [10].

نتيجة (4−6): من أجل $F, G \in \mathcal{H}'$ يكون:

$$F = G \iff a_n(F) = a_n(G) \quad ; \quad n = 1,2, \dots.$$

ينتج ذلك من:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(F) h_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(G) h_n = G .$$

5− دوال هرميت كقاعدة للفضائين $S(\mathbb{R})$ و $S'(\mathbb{R})$

أثبتنا سابقاً أن دوال هرميت $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ تشكل قاعدة:

- في الفضاء $\mathcal{H}$ ، المبرهنة (4−3)،
- في الفضاء $\mathcal{H}'$ ، المبرهنة (4−4)،
- في الفضاءات L_p بمفهوم التوزيعات ، نتيجة (4−5).

وجدنا أيضاً أن $S(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{H}$ ، المبرهنة (3−6).

نرمز بـ $S'(\mathbb{R})$ لفضاء الداليات الخطية المستمرة على $S(\mathbb{R})$. كل دالي $T \in S'(\mathbb{R})$ يسمى توزيع متزايد ببطء (أو بطيء التزايد)، [13] , [12] , [7]، وله الشكل $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$.

نشير هنا أن $p_k(\varphi)$ و $p_{m,l}(\varphi)$ الواردة أدناه تعني أنصاف النظم المذكورة في الملاحظة (2−2)، وهي متكافئة فيما بينها.

تمهيدية (5−1): الدالي الخطي $F\ :\ S(\mathbb{R})\ \longrightarrow\ \mathbb{C}$ ينتمي إلى $S'(\mathbb{R})$ إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعي k وعدد موجب c بحيث تتحقق المتراجحة:

$$(5.1) \qquad |F(\varphi)| \leq c\ p_k(\varphi) \quad ; \quad \forall\ \varphi \in S(\mathbb{R})\,.$$

الإثبات: يتم بشكل مشابه لإثبات المبرهنة (4−1).

مبرهنة (5−2): $S'(\mathbb{R})\ \hookrightarrow\ \mathcal{H}'$.

الإثبات: ليكن $F \in \mathcal{H}'$. عندئذ يكون بحسب المبرهنة (4−4): $F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(F) h_n$، كما أن السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2k} |a_n(F)|^2$ متقاربة. يكون أيضاً من أجل كل $\varphi \in S(\mathbb{R})$:

$$|F(\varphi)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(F) h_n(\varphi)\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(F) \langle \varphi\,, h_n\rangle\right|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\leq\infty} \lambda_n^{-2k} |a_n(F)| |\langle H^{2k}\varphi\,, h_n\rangle|\,.$$

بحسب التقديرات (1.3) ، يكون $|h_n(x)| \leq c$. وبما أن:

$$|\langle H^k\varphi\,, h_n\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}} H^k\varphi(x) h_n(x) dx\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |H^k\varphi(x)| |h_n(x)| dx$$

$$\leq c \int_{\mathbb{R}} \frac{(1+x^2)|H^k\varphi(x)|}{1+x^2} dx$$

$$\leq c' \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+x^2)|H^k\varphi(x)| \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\leq c' \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+x^2)|H^k\varphi(x)| \leq c\ p_k(\varphi)\ ,$$

فيكون:

$$|F(\varphi)| \leq C' \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2k} |a_n(F)|^2\ p_{2k}(\varphi)$$

$$\leq C\ p_{2k}(\varphi) \quad ; \quad \varphi \in S(\mathbb{R})\,.$$

وحسب التمهيدية (5−1) يكون $F \in S'(\mathbb{R})$. بذلك يتم المطلوب.

مبرهنة (5−3): $S(\mathbb{R})\ \hookrightarrow\ \mathcal{H}$.

الإثبات: ليكن $\varphi \in \mathcal{H}$. عندئذ يكون بحسب المبرهنة (4−3):

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, h_n\rangle h_n\ ,$$

والسلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{2k} |\langle \varphi, h_n\rangle|^2$ متقاربة. وبحسب التقديرات (1.3) ومتراجحة شفارتز يكون:

$$\begin{aligned}
|H^k\varphi(x)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^k\langle\varphi,h_n\rangle h_n(x)\right| \\
&\le c\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^k|\langle\varphi,h_n\rangle| \\
&= c\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{k+1}|\langle\varphi,h_n\rangle|\quad \lambda_n^{-1} \\
&\le c\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{2(k+1)}|\langle\varphi,h_n\rangle|^2\,\lambda_n^{-2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{-2}\right)^{1/2} \\
&\le c'\,\|\varphi|_{k+1}.
\end{aligned}$$

لذلك يكون:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|H^k\varphi(x)| \le c'\,\|\varphi|_{k+1}\quad ;\quad \varphi\in\mathcal{H}.$$

وبحسب (IV) يكون $\varphi\in\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$، كما أن:

$$p_k(\varphi)\le c'\,\|\varphi|_{k+1}\quad ;\quad \varphi\in\mathcal{H}.$$

ومنه نحصل على المطلوب.

نتيجة (5–4): من المبرهنتين (3–6) و (3–5) ينتج أن أنصاف النظم $\|\varphi|_k$ و $p_k(\varphi)$ متكافئة فيما بينها، وبالتالي $\mathcal{H}=\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$. وبحسب المبرهنة (3–4) يمكن نشر كل $\varphi\in\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ بسلسلة من الشكل

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\langle\varphi,h_n\rangle h_n\ ,$$

ومتقاربة في $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ من φ نفسه.

يكون أيضاً $\mathcal{H}'=\boldsymbol{S}'(\mathbb{R})$ ، وكل توزيع $F\in\boldsymbol{S}'(\mathbb{R})$ يمكن نشره بسلسلة من الشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(F)h_n$$

ومتقاربة في $\boldsymbol{S}'(\mathbb{R})$ من F نفسه.

- **النتائج:**

1) تشكيل قاعدة لبعض الفضاءات النووية مثل $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ و $\boldsymbol{S}'(\mathbb{R})$.

2) استنتاج قاعدة معممة للفضاءات $L_p(\mathbb{R})$ حيث $1\le p\le\infty$.

- **التوصيات:**

1) إيجاد قاعدة معممة بمتحول عقدي $\boldsymbol{z}$ بدلاً من متحول حقيقي $\boldsymbol{x}$.

2) إيجاد قواعد بالاعتماد على دوال خاصة مختلفة مثل دوال لاجير و دوال بيسيل.

3) حل بعض المسائل في الفيزياء و ميكانيك الكم.

[1] **Bell, J.** (2015): Hermite functions.
Department of Mathematics, University of Toronto. September 9.

[2] **Doha, E.H. ; Ahmed, H.M. and El-Soubhy, S.I.** (2009):
Explicit formulae for the coefficients of integrated expansions of Laguerre and Hermite polynomials and their integrals.
Int. Trans. Special Func. **Vol. 20**, No. 7, 491–503.

[3] **Garrett, P.** (2017): Nuclear Space, Schwartz Kernel Theorem.
http://www. Math.umn.edu.

[4] **Grothendieck, A.** (1973): Topological Vector Spaces.
Gordon and Breach, London.

[5] **Ibrahim, I.** (2002) : On Eigenfunction Expansions of The Hermite Differential Operator on R^n.
Int. Trans. Special Func. **Vol. 13**, pp. 555–574.

[6] **Lamb, W. ; McGhee, D. F.** (2004): Eigenfunction Expansions For Generalized Functions of Several Variables.
Int. Trans. Special Func. **Vol. 15**, pp. 239–249.

[7] **Meise, R. ; Vogt, D.** : (2023): Introduction to Functional Analysis.
Oxford University Press.

[8] **Temme, N. M.** (1996): Special Functions. An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics.
John Wiley & Sons, New York.

[9] **Thangavelu, S.** (1993) : Lectures on Hermite and Laguerre Expansions. Vol.(42)
Princeton University Press.

[10] **Trebels, W.** (1973) : Multipliers for (C,α)- Bounded Fourier Expansions in Banach Spaces and Approximation Theory.
Springer Verlag, Berlin.

[11] **F. Treves** (2006): Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.

Dover Publications, New York.

[12] **Triebel, H.** (1992): Higher Analysis.
Johann Ambrosius Barth, Leipzig, Berlin.

[13] **WlokA, J.**(1982) : artielle Differentialgleichungen
(Sobolevräume und Randwertaufgaben).
BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft. Leipzig.

[14] **Y. C. Wong** (2006): Schwartz Spaces, Nuclear Spaces, and Tensor Product.
Springer, Berlin.

[15] **A. H. Zemanian** (1968): Generalized Integral Transformations.
John Wiley & Sons, Inc.