تقدير بايز النيتروسوفكي المُجزّأ

نزار التنجي*، د. محمد بشر زينه**، د. مصطفى مظهر رنّة**

(الإيداع: 26 آب 2025، القبول:29 تشرين الأول2025)

المخلص

في ظل زيادة حالات التعامل مع عدم التحديد في تطبيقات الحياة، تم تقديم المنطق النيتروسوفكي ومناهجه المُختلفة لحل مشاكل الغموض، وفي هذا السياق، عُرّفت نظرية الاحتمالات النيتروسوفكيّة والإحصاءات النيتروسوفكيّة وتم دراسة طرائق التقدير النُقطي للوسطاء المجهولة النيتروسوفكيّة. في هذا البحث، نُعرف تقدير بايز النيتروسوفكي المُجزّأ كامتداد لتقدير بايز الكلاسيكي من أجل المنطق النيتروسوفكي المُجزّأ، قدمنا بعض التعاريف الأساسية وتهميد كتعريف دوال الخسارة ودوال المخاطرة والمخاطرة البعدية النيتروسوفكيّة المُجزّأة وتوزيع غاما النيتروسوفكي المُجزّأة، ثم تم تعريف تقدير بايز النيتروسوفكي المُجزّأ للتعامل مع المتغيّرات العشوائيّة النيتروسوفكيّة المُجزّأة التي تخضع لتوزيعات احتمالية نيتروسوفكيّة مُجزّأة بوسطاء نيتروسوفكيّة مُجزّأة، تم إيجاد الصيغة الرياضية المُناسبة لتقدير وسيط نيتروسوفكيّ مُجزّأ مجهول الذي يُصغّر دالة المخاطرة النيتروسوفكيّة المُجزّأة البعدية. أخيرًا، تم تطبيق الطريقة بالنسبة لعينة من توزيع غاما نيتروسوفكيّ مُجزّأ لإيجاد تقدير الوسيط المجهول $\lambda_{RN}\sim Gamma(r_{*RN},\lambda_{*RN})$ بالنسبة لوسيطين معلومين، أوجدنا صيغة التقدير بالنسبة لدالة خسارة مربع الخطأ ودالة خسارة 0–1، حيث تم ملاحظة مقاربة شكل الصيغة مع الحالة الكلاسيكية مع مراعاة وجود محارف جبرية تُمثل عدم التحديد.

الكلمات المفتاحية: منهج بايز، عدم التحديد، نيتروسوفيك مُجزّأ، توزيع احتمالي، تقدير نقطي.

* طالب دراسات عليا (دكتوراه)، قسم الإحصاء الرياضي، كلية العلوم، جامعة حلب

** أستاذ مساعد، قسم الإحصاء الرياضي، كلية العلوم، جامعة حلب

Refined Neutrosophic Bayes Estimation

Nizar Altounji*, Dr. Mohamed Bisher Zeina, Dr. Moustafa Mazhar Ranneh****

(Received:26 Augast 2025, Accepted:29 December 2025)

Abstract:

Due to the increment count of cases dealing with uncertainty in real life applications, neutrosophic logic and its various approaches to solve vagueness were introduced. In this context, neutrosophic probability theory and neutrosophic statistics were defined, and point estimation methods of unknown neutrosophic parameters were studied. In this paper, we define the refined neutrosophic Bayes estimation as an extension of classical Bayes estimation for refined neutrosophic logic. We give some basic definitions such as refined neutrosophic loss function, risk function, posterior risk function and refined neutrosophic gamma distribution, then, refined neutrosophic Bayes estimator is defined to deal with refined neutrosophic random variables and refined neutrosophic probability distributions with refined neutrosophic parameters. A suitable mathematical formula is found to estimate an unknown refined neutrosophic parameter that minimizes the refined neutrosophic posterior risk function. Finally, we apply our method on a sample of refined neutrosophic gamma distribution to find the estimate of the unknown parameter $\lambda_{RN} \sim Gamma(r_{*RN}, \lambda_{*RN})$ for two known parameters, We find the estimation formula for the square error loss function and the $0-1$ loss function, where the form of the formula is observed to be similar to the classical case, taking into account the presence of algebraic literals representing indeterminacy.

Keywords: Bayesian Approach, Indeterminacy, Refined Neutrosophy, Probability Distribution, Point Estimation.

*Postgraduate Student (PhD), Dept of Mathematical Statistics, Faculty of Science, University of Aleppo

**Assistant Prof, Dept of Mathematical Statistics, Faculty of Science, University of Aleppo

1. مقدمة:

في ظل ازدياد المشاكل الرياضية المُرتبطة بمفهوم عدم التحديد، طُوِرت مفاهيم جديدة للتعامل مع الغموض كالمجموعات والأعداد الضبابية والنيتروسوفكيّة والبليثوجينيّة، حيث قدّم Zadeh [1] المنطق الضبابي (Fuzzy Logic) مُعرفًا المجموعة الضبابية A على فضاء E بأنها مجموعة مُمثلة بدالة $\mu_A: E \longrightarrow [0,1]$ تُدعى دالة الانتماء.

وقدّم Atanassov [2] المنطق الضبابي الحدسي (Intuitionistic Fuzzy Logic) وعرّفَ المجموعة الضبابية الحدسية A على فضاء E بأنها مجموعة مُمثلة بدالتين $\mu_A: E \longrightarrow [0,1]$ و$\gamma_A: E \longrightarrow [0,1]$ تُسمى كل منها بدالة الانتماء ودالة عدم الانتماء على الترتيب.

أما Smarandache [1] فقد طرح مفهوم المنطق النيتروسوفكي (Neutrosophic Logic) مُعرفًا المجموعة النيتروسوفكيّة وحيدة القيمة A على فضاء E بأنها مجموعة مُمثلة بثلاث دوال $T_A: E \longrightarrow [0,1]$، $I_A: E \longrightarrow [0,1]$ و$F_A: E \longrightarrow [0,1]$ وتدعى كل منها بدالة العضوية (الانتماء) ودالة عدم التحديد ودالة اللاعضوية (عدم الانتماء) على الترتيب.

ساهمت هذه النظريات في تطوير العديد من المجالات التطبيقية كالطب، الفيزياء، والتشفير الرقمي، بالإضافة لظهور امتدادات جديدة في التحليل الرياضي، نظرية الاحتمالات، نظرية التقدير، الذكاء الصنعي، وغيرها. [2–7]

في سياق نظرية الاحتمالات ونظرية التقدير، طرحَ Z. Tahir et al. [8] المُقدّرات النسبوية النيتروسوفكيّة (Neutrosophic Ratio–Type Estimators) لتقدير متوسط مجتمع باستخدام بيانات نيتروسوفكيّة، وقام N. Altounji et al. [9–10] بتقديم طريقة التقدير البعدي الأعظمي النيتروسوفكي المحرفي والبليثوجيني (Symbolic Neutrosophic and Plithogenic Maximum a Posteriori Estimation).

كما قدّم A. Hatip [11] المفهوم الجبري للمتحولات العشوائية النيتروسوفكيّة المُجزّأة (Refined Neutrosophic Random Variables).

2. هدف البحث:

تأتي أهمية هذا البحث كونه يُعرّف تقدير بايز النيتروسوفكي المُجزّأ، إذ سنقدم في هذا البحث الصياغة الرياضية للتعامل مع الوسطاء والمتغيرات العشوائية النيتروسوفكيّة المُجزّأة للتمكن من إيجاد تقدير بايز في الامتداد المذكور، مساهمًا في تعريف تقدير بايز بالنسبة للامتدادات النيتروسوفكيّة المحرفيّة، النيتروسوفكيّة المُجزّأة والبليثوجينية.

3. المواد وطرائق البحث:

1.3. النيتروسوفيك المحرفي والنيتروسوفيك المُجزّأ Literal and Refined Neutrosophy:

1.1.3. مجموعة الأعداد الحقيقيّة النيتروسوفكية وفق المحرف الجبري I Neutrosophic Real Set with Algebraic Structure I: [12]

ليكن لدينا $R(I) = \{a_0 + a_1 I; a_0, a_1 \in R, I^2 = I\}$ حقل نيتروسوفكي من الأعداد الحقيقيّة، حيث يُسمى $a + bI$ عددًا نيتروسوفكيًا. يُمثل a القسم المحدد وb القسم غير المحدد، ويُمثل المحرف الجبري I عدم التحديد محققًا $I^2 = I$.

نقول إن $a_N \geq_N b_N$ إذا تحققت المترجحتين: $a_1 \geq b_1, a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$.

من أجل $a_N = a_1 + a_2 I$ و$b_N = b_1 + b_2 I$ عددين من $R(I)$ يكون:

---

[1] Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets, Information and Control, 8(3): 338–353

[2] Atanassov, K. T. (1986). Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets Syst, 20(1): 87–96

$$a_N + b_N = a_1 + b_1 + I(a_2 + b_2) \quad (1)$$

$$a_N - b_N = a_1 - b_1 + I(a_2 - b_2) \quad (2)$$

$$a_N \times b_N = a_1 b_1 + I(a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2) \quad (3)$$

$$\frac{a_N}{b_N} = \frac{a_1}{b_1} + I\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1(b_1 + b_2)};\ b_1, (b_1 + b_2) \neq 0 \quad (4)$$

2.1.3. الإيزومتريّة AH Isometry: [12]

تُعطى إيزومترية AH من بُعد واحد وصورتها العكسيّة بالعلاقتين الآتيتين:

$$T: R(I) \to R^2 ; T(a_0 + a_1 I) = \ (a_0, a_0 + a_1) \quad (5)$$

$$T^{-1}: R^2 \to R(I) ; T^{-1}(a_0, a_1) = \ a_0 + (a_1 - a_0)I \quad (6)$$

3.1.3. المتحولات العشوائية النيتروسوفكيّة المحرفيّة Literal Neutrosophic Random Variables: [12]

يُعرّف المتغير العشوائي النيتروسوفكي المحرفي X_N كالآتي:

$$X_N: \Omega_N \to R(I);\ \Omega_N = \Omega_1 \times \Omega_2(I)$$

$$X_N = X_1 + X_2 I;\ \ I^2 = I$$

4.1.3. مجموعة الأعداد الحقيقيّة النيتروسوفكية المُجزّأة Refined Neutrosophic Real Set: [13–14]

ليكن لدينا $R(I_1, I_2) = \{a + bI_1 + cI_2; a, b, c \in R, {I_1}^2 = I_1,\ {I_2}^2 = I_2,\ I_1.I_2 = I_2.I_1 = I_1\}$ حقل نيتروسوفكي مُجزّأ من الأعداد الحقيقيّة. يُمثل a القسم المحدد و b, c القسم غير المحدد، وتُعبّر المحارف الجبرية I_1 و I_2 عن عدم التحديد مع خاصة الامتصاص التي تأخذ الدليل الأصغر عند الجداء، أي تحقق: ${I_1}^2 = I_1,\ {I_2}^2 = I_2,\ I_1.I_2 = I_2.I_1 = I_1$.

نقول إن $a_{RN} \geq_{RN} b_{RN}$ إذا تحققت المترجحات:

$$a_0 \geq b_0, a_0 + a_1 + a_2 \geq b_0 + b_1 + b_2, a_0 + a_2 \geq b_0 + b_2$$

من أجل $a_{RN} = a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2$ و $b_{RN} = b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_2$ عددين من $R(I_1, I_2)$ يكون:

$$a_{RN} + b_{RN} = a_0 + b_0 + I_1(a_1 + b_1) + I_2(a_2 + b_2) \quad (7)$$

$$a_{RN} - b_{RN} = a_0 - b_0 + I_1(a_1 - b_1) + I_2(a_2 - b_2) \quad (8)$$

$$a_{RN} \times b_{RN} = a_0 b_0 + I_1(a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1) + I_2(a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_2 b_2) \quad (9)$$

$$\frac{a_{RN}}{b_{RN}} = \frac{a_0}{b_0} + I_1\frac{(a_1 b_0 - a_0 b_1)(b_0 + b_2) + (a_2 b_1 b_0 - a_0 b_1 b_2)}{b_0(b_0 + b_1)(b_0 + b_2)} + I_2\frac{a_2 b_0 - a_0 b_2}{b_0(b_0 + b_2)};\ b_0, (b_0 + b_1), (b_0 + b_2) \neq 0 \quad (10)$$

5.1.3. الإيزومتريّة AH Isometry: [13]

تُعطى إيزومترية AH من بُعد واحد وصورتها العكسيّة بالعلاقتين الآتيتين:

$$T: R(I_1, I_2) \to R^3 ; T(a + bI_1 + cI_2) = \ (a, a + b + c, a + c) \quad (11)$$

$$T^{-1}: R^3 \to R(I_1, I_2) ; T^{-1}(a, b, c) = \ a + (b - c)I_1 + (c - a)I_2 \quad (12)$$

6.1.3. المتحولات العشوائية النيتروسوفكيّة المُجزّأة Refined Neutrosophic Random Variables: [13]

يُعرّف المتغير العشوائي النيتروسوفكي المُجزّأ X_{RN} كالآتي:

$$X_{RN}: \Omega_{RN} \to R(I_1, I_2);\ \Omega_{RN} = \Omega_0 \times \Omega_1(I_1) \times \Omega_2(I_2)$$

$$X_{RN} = X_0 + X_1 I_1 + X_2 I_2;\ {I_1}^2 = I_1, {I_2}^2 = I_2, I_1.I_2 = I_2.I_1 = I_1$$

7.1.3. بعض الدوال النيتروسوفكيّة المُجزّأة الشهيرة Some Known Refined Neutrosophic Functions:

- **دالة القوة النيتروسوفكيّة المُجزّأة Refined Neutrosophic Power Function:** [13]

$$f(x_{RN}) = {x_{RN}}^{a_{RN}};\ x_{RN}, a_{RN} \in R(I_1, I_2)$$

من أجل $(a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2)^{n_0+n_1 I_1+n_2 I_2};\ a_0, a_1, a_2, n_0, n_1, n_2 \in R$، تُعطى قوة عدد حقيقي نيتروسوفكي مُجزّأ بالعلاقة الآتية:

$$(a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2)^{n_0+n_1 I_1+n_2 I_2} = {a_0}^{n_0} + [(a_0 + a_1 + a_2)^{n_0+n_1+n_2} - (a_0 + a_2)^{n_0+n_2}]I_1 + [(a_0 + a_2)^{n_0+n_2} - {a_0}^{n_0}]I_2 \quad (13)$$

- **الدالة الأُسيّة النيتروسوفكيّة المُجزّأة Refined Neutrosophic Exponential Function:** [13]

$$f(x_{RN}) = e^{x_{RN}};\ x_{RN} \in R(I_1, I_2)$$

من أجل $a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2; a_0, a_1, a_2 \in R$، تُعطى الدالة الأُسية النيتروسوفكيّة المُجزّأة لعدد حقيقي نيتروسوفكي مُجزّأ بالعلاقة الآتية:

$$e^{a_0+a_1 I_1+a_2 I_2} = e^{a_0} + [e^{a_0+a_1+a_2} - e^{a_0+a_2}]I_1 + [e^{a_0+a_2} - e^{a_0}]I_2 \quad (14)$$

- **دالة غاما النيتروسوفكيّة المُجزّأة Refined Neutrosophic Gamma Function:** [13]

$$f(x_{RN}) = \Gamma(x_{RN});\ x_{RN} \in R(I_1, I_2)$$

من أجل $a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2; a_0, a_1, a_2 \in R$ حيث $a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2 \geq_{RN} 0 + 0I_1 + 0I_2$، تُعطى دالة غاما النيتروسوفكيّة المُجزّأة لعدد حقيقي نيتروسوفكي مُجزّأ بالعلاقة الآتية:

$$\Gamma(a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2) = \Gamma(a_0) + [\Gamma(a_0 + a_1 + a_2) - \Gamma(a_0 + a_2)]I_1 + [\Gamma(a_0 + a_2) - \Gamma(a_0)]I_2 \quad (15)$$

- **دالة بيتا النيتروسوفكيّة المُجزّأة Refined Neutrosophic Beta Function:** [13]

$$f(x_{RN}, y_{RN}) = \beta(x_{RN}, y_{RN});\ x_{RN}, y_{RN} \in R(I_1, I_2)$$

من أجل $a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2, b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_2; a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in R$ حيث $a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2 \geq_{RN} 0 + 0I_1 + 0I_2$، تُعطى دالة بيتا النيتروسوفكيّة المُجزّأة بالعلاقة الآتية:

$$\beta(a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2, b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_2) = \frac{\Gamma(a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2)\Gamma(b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_2)}{\Gamma(a_0 + a_1 I_1 + a_2 I_2 + b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_2)} = \beta(a_0, b_0) + [\beta(a_0 + a_1 + a_2, b_0 + b_1 + b_2) - \beta(a_0 + a_2, b_0 + b_2)]I_1 + [\beta(a_0 + a_2, b_0 + b_2) - \beta(a_0, b_0)]I_2 \quad (16)$$

2.3. تقدير بايز Bayes Estimation: [15-16]

ليكن $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ متغيّر عشوائي له توزيع احتمالي $F(X;\theta)$، حيث أن θ هو وسيط مجهول، ولتكن $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ عينة بحجم n من المشاهدات المستقلة مسحوبة من $F(X;\theta)$. من أجل القيام بتقدير الوسيط المجهول باستخدام مُقدر بايز، نفرض أن θ هو متغيّر عشوائي يخضع لتوزيع احتمالي بدالة كثافة احتمالية نرمز لها بـ $\pi(\theta)$، حيث يُسمى التوزيع الاحتمالي للوسيط المجهول بالتوزيع الاحتمالي القبلي، نقوم بهذا الفرض لنتمكن من إشراك أية معلومات سابقة (قبلية) عن الوسيط في عملية التقدير.

نستخدم دالة المعقولية العُظمى $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$ للعينة المستقلّة لحساب ما يُسمى بدالة الكثافة الاحتمالية البعدية للوسيط θ لنحصل على التوزيع الاحتمالي للوسيط علمًا أن لدينا المشاهدات $\boldsymbol{x}$، ويُسمى بالتوزيع الاحتمالي البعدي:

$$f(\theta|\boldsymbol{x}) = \frac{f(\theta|\boldsymbol{x})f(\theta)}{f(\boldsymbol{x})} = \frac{L(\theta)\pi(\theta)}{f(\boldsymbol{x})} \propto L(\theta)\pi(\theta) \qquad (17)$$

(يُقصد بالرمز $\propto$ بالتناسب: من أجل أي a وb، إذا وُجد ثابت $q \neq 0$ بحيث يكون: $a = qb$، عندئذ يمكن صياغة العلاقة بالتناسب $a \propto b$ ، ويدعى q بثابت التناسب، في حالتنا تكون $f(\boldsymbol{x})$ لا تلعب دور في شكل التوزيع الاحتمالي الناتج).

عندئذٍ: يكون تقدير الوسيط هو الذي يُصغّر الدالة $Risk(\theta,t|\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x})$ (دالة المخاطرة البعدية) بحسب التوزيع الاحتمالي البعدي، أي:

$$\hat{\theta} = \underset{t}{argmin}\, Risk(\theta,t|\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) \qquad (18)$$

(حيث أن $argmin(.)$ هي دالة تُعطي العنصر الذي يجعل دالة المخاطرة البعدية في حدّها الأصغر).

حيث تُعطى دالة المخاطرة البعدية بالعلاقة:

$$Risk(\theta,t|\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) = \int Loss(\theta,t) f(\theta|\boldsymbol{x}) d\theta \qquad (19)$$

ويُقصد بـ $Loss(\theta,t)$ دالة الخسارة (مقدار الخطأ الحاصل في تقدير الوسيط).

إن المُقدر الذي يُصغّر المخاطرة البعدية يختلف بحسب دالة الخسارة المُستخدمة،

من أجل دالة خسارة مربع الخطأ: $Loss(\theta,\hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$، يكون مقدر بايز هو المتوسط للتوزيع الاحتمالي البعدي،

من أجل دالة خسارة القيمة المُطلقة: $Loss(\theta,\hat{\theta}) = |\theta - \hat{\theta}|$، يكون مقدر بايز هو الوسيط للتوزيع الاحتمالي البعدي،

وأخيرًا، من أجل دالة خسارة 0–1: $Loss(\theta,\hat{\theta}) = \mathbb{I}(\theta \neq \hat{\theta})$، يكون مقدر بايز هو المنوال للتوزيع الاحتمالي البعدي. (حيث أن: $\mathbb{I}(.)$ هي دالة الواحدة).

4. أساسيات المُقدّر المطروح:

نقدم في هذا القسم تعاريف مُختلفة في التوزيعات الاحتمالية ونظرية التقدير النيتروسوفكيّة المُجزّأة التي تُشكل البُنية الأساسية لصياغة مُقدر بايز النيتروسوفكي المُجزّأ، حيث يمكن على سبيل المثال التعبير عن عدم التحديد الحاصل من أدوات قياس المشاهدات بالمحرف الجبري I_1 وعدم التحديد الحاصل من عوامل الظاهرة المدروسة غير القابلة للضبط بالمحرف الجبري I_2.

1.4. توزيع غاما النيتروسوفكي المُجزّأ Refined Neutrosophic Gamma Distribution:

نُعرّف دالة الكثافة الاحتماليّة النيتروسوفكيّة المُجزّأة لمتغيّر عشوائي نيتروسوفكي مُجزّأ X_{RN} حيث $x_{RN} >_{RN} 0$ يخضع لتوزيع غاما النيتروسوفكي المُجزّأ بوسيطين $\lambda_{RN}, r_{RN} >_{RN} 0$ بالشكل:

$$f(x_{RN}) = \frac{{\lambda_{RN}}^{r_{RN}}}{(r_{RN}-1)!} {x_{RN}}^{r_{RN}-1} e^{-\lambda_{RN} x_{RN}} \qquad (20)$$

ويكون الشكل النيتروسوفكي المُجزّأ القياسي للدالة (20) هو كالآتي:

$$\begin{aligned} f(x_{RN}) = {} & \frac{{\lambda_0}^{r_0}}{(r_0-1)!} {x_0}^{r_0-1} e^{-\lambda_0 x_0} + \\ & \left[\frac{(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^{r_0+r_1+r_2}}{(r_0+r_1+r_2-1)!}(x_0+x_1+x_2)^{r_0+r_1+r_2-1} e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)(x_0+x_1+x_2)}\right. \\ & \left. - \frac{(\lambda_0+\lambda_2)^{r_0+r_2}}{(r_0+r_2-1)!}(x_0+x_2)^{r_0+r_2-1} e^{-(\lambda_0+\lambda_2)(x_0+x_2)}\right] I_1 \\ & + \left[\frac{(\lambda_0+\lambda_2)^{r_0+r_2}}{(r_0+r_2-1)!}(x_0+x_2)^{r_0+r_2-1} e^{-(\lambda_0+\lambda_2)(x_0+x_2)} - \frac{{\lambda_0}^{r_0}}{(r_0-1)!} {x_0}^{r_0-1} e^{-\lambda_0 x_0}\right] I_2 \end{aligned} \qquad (21)$$

البرهان:

لبرهان (21)، لدينا:

$$T[f(x_{RN})] = T\left[\frac{{\lambda_{RN}}^{r_{RN}}}{(r_{RN}-1)!}{x_{RN}}^{r_{RN}-1}e^{-\lambda_{RN}x_{RN}}\right]$$

$$= T\left[\frac{(\lambda_0+\lambda_1I_1+\lambda_2I_2)^{r_0+r_1I_1+r_2I_2}}{(r_0+r_1I_1+r_2I_2-1)!}(x_0+x_1I_1 + x_2I_2)^{r_0+r_1I_1+r_2I_2-1}e^{-(\lambda_0+\lambda_1I_1+\lambda_2I_2)(x_0+x_1I_1+x_2I_2)}\right]$$

$$= T\left[\frac{(\lambda_0+\lambda_1I_1+\lambda_2I_2)^{r_0+r_1I_1+r_2I_2}}{(r_0+r_1I_1+r_2I_2-1)!}\right]T[(x_0+x_1I_1 + x_2I_2)^{r_0+r_1I_1+r_2I_2-1}]T\left[e^{-(\lambda_0+\lambda_1I_1+\lambda_2I_2)(x_0+x_1I_1+x_2I_2)}\right]$$

$$= \frac{(\lambda_0,\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2,\lambda_0+\lambda_2)^{(r_0,r_0+r_1+r_2,r_0+r_2)}}{((r_0-1)!,(r_0+r_1+r_2-1)!,(r_0+r_2-1)!)}(x_0,x_0+x_1+x_2,x_0 + x_2)^{(r_0-1,r_0+r_1+r_2-1,r_0+r_2-1)}e^{-(\lambda_0,\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2,\lambda_0+\lambda_2)(x_0,x_0+x_1+x_2,x_0+x_2)}$$

$$= \left(\frac{{\lambda_0}^{r_0}}{(r_0-1)!},\frac{(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^{r_0+r_1+r_2}}{(r_0+r_1+r_2-1)!},\frac{(\lambda_0+\lambda_2)^{r_0+r_2}}{(r_0+r_2-1)!}\right)({x_0}^{r_0-1},(x_0+x_1+x_2)^{r_0+r_1+r_2-1},(x_0 + x_2)^{r_0+r_2-1})\left(e^{-\lambda_0x_0},e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)(x_0+x_1+x_2)},e^{-(\lambda_0+\lambda_2)(x_0+x_2)}\right)$$

$$= \left(\frac{{\lambda_0}^{r_0}}{(r_0-1)!}{x_0}^{r_0-1}e^{-\lambda_0x_0},\frac{(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^{r_0+r_1+r_2}}{(r_0+r_1+r_2-1)!}(x_0+x_1 + x_2)^{r_0+r_1+r_2-1}e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)(x_0+x_1+x_2)},\frac{(\lambda_0+\lambda_2)^{r_0+r_2}}{(r_0+r_2-1)!}(x_0 + x_2)^{r_0+r_2-1}e^{-(\lambda_0+\lambda_2)(x_0+x_2)}\right)$$

$$\Rightarrow T^{-1}\left[T[f(x_{RN})]\right] = f(x_{RN})$$

$$= T^{-1}\left(\frac{{\lambda_0}^{r_0}}{(r_0-1)!}{x_0}^{r_0-1}e^{-\lambda_0x_0},\frac{(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^{r_0+r_1+r_2}}{(r_0+r_1+r_2-1)!}(x_0+x_1 + x_2)^{r_0+r_1+r_2-1}e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)(x_0+x_1+x_2)},\frac{(\lambda_0+\lambda_2)^{r_0+r_2}}{(r_0+r_2-1)!}(x_0 + x_2)^{r_0+r_2-1}e^{-(\lambda_0+\lambda_2)(x_0+x_2)}\right)$$

$$= \frac{{\lambda_0}^{r_0}}{(r_0-1)!}{x_0}^{r_0-1}e^{-\lambda_0x_0} + \left[\frac{(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^{r_0+r_1+r_2}}{(r_0+r_1+r_2-1)!}(x_0+x_1+x_2)^{r_0+r_1+r_2-1}e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)(x_0+x_1+x_2)} - \frac{(\lambda_0+\lambda_2)^{r_0+r_2}}{(r_0+r_2-1)!}(x_0+x_2)^{r_0+r_2-1}e^{-(\lambda_0+\lambda_2)(x_0+x_2)}\right]I_1 +$$

$$\left[\frac{(\lambda_0+\lambda_2)^{r_0+r_2}}{(r_0+r_2-1)!}(x_0+x_2)^{r_0+r_2-1}e^{-(\lambda_0+\lambda_2)(x_0+x_2)} - \frac{{\lambda_0}^{r_0}}{(r_0-1)!}{x_0}^{r_0-1}e^{-\lambda_0x_0}\right]I_2$$

2.4. دوال الخسارة، المخاطرة، والمخاطرة البعدية النيتروسوفكيّة المُجزّأة Refined Neutrosophic Loss, Risk and Expected Loss:

ليكن لدينا $\theta_{RN} = \theta_0 + \theta_1 I_1 + \theta_2 I_2$ وسيط نيتروسوفكي مُجزّأ لتوزيع احتمالي نيتروسوفكي مُجزّأ، وليكن $\hat{\theta}_{RN} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 I_1 + \hat{\theta}_2 I_2$ تقدير للوسيط θ_{RN}، نُعطي شكل دالة الخسارة النيتروسوفكيّة المُجزّأة القياسي بالعلاقة الآتية:

$$\begin{aligned} Loss(\theta_{RN}, \hat{\theta}_{RN}) &= Loss(\theta_0, \hat{\theta}_0) + \\ [Loss(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2, \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2) &- Loss(\theta_0 + \theta_2, \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_2)] I_1 \\ &+ [Loss(\theta_0 + \theta_2, \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_2) - Loss(\theta_0, \hat{\theta}_0)] I_2 \end{aligned} \quad (22)$$

وشكل دالة المخاطرة النيتروسوفكيّة المُجزّأة القياسي بالعلاقة:

$$\begin{aligned} Risk(\theta_{RN}, \hat{\theta}_{RN}) &= E[Loss(\theta_{RN}, \hat{\theta}_{RN})] = Risk(\theta_0, \hat{\theta}_0) + \\ [Risk(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2, \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2) &- Risk(\theta_0 + \theta_2, \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_2)] I_1 \\ &+ [Risk(\theta_0 + \theta_2, \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_2) - Risk(\theta_0, \hat{\theta}_0)] I_2 \end{aligned} \quad (23)$$

وبفرض X_{RN} متحول عشوائي نيتروسوفكي مُجزّأ، نُصيغ شكل دالة المخاطرة البعديّة النيتروسوفكيّة المُجزّأة القياسي كالآتي:

$$\begin{aligned} Risk(\theta_{RN}, \hat{\theta}_{RN} | X_{RN}) &= E[Loss(\theta_{RN}, \hat{\theta}_{RN}) | X_{RN}] = \\ Risk(\theta_0, \hat{\theta}_0 | X_0) &+ \\ [Risk(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2, \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 | X_0 + X_1 + X_2) &- Risk(\theta_0 + \theta_2, \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_2 | X_0 + X_2)] I_1 \\ &+ [Risk(\theta_0 + \theta_2, \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_2 | X_0 + X_2) - Risk(\theta_0, \hat{\theta}_0 | X_0)] I_2 \end{aligned} \quad (24)$$

البرهان:

لإيجاد (22) نكتب بالاعتماد على تطبيق الإيزومتريّة:

$$Loss(\theta_{RN}, \hat{\theta}_{RN}) = Loss(\theta_0 + \theta_1 I_1 + \theta_2 I_2, \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 I_1 + \hat{\theta}_2 I_2)$$

$$T[Loss(\theta_{RN}, \hat{\theta}_{RN})] = Loss(T[\theta_0 + \theta_1 I_1 + \theta_2 I_2], T[\hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 I_1 + \hat{\theta}_2 I_2])$$

$$= Loss\left((\theta_0, \theta_0 + \theta_1 + \theta_2, \theta_0 + \theta_2), (\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_2)\right)$$

$$= \left(Loss(\theta_0, \hat{\theta}_0), Loss(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2, \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2), Loss(\theta_0 + \theta_2, \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_2)\right)$$

ومنه بأخذ الصورة العكسية T^{-1}:

$$\Rightarrow T^{-1}\left[T[Loss(\theta_{RN}, \hat{\theta}_{RN})]\right] =$$

$$T^{-1}\left[\left(Loss(\theta_0, \hat{\theta}_0), Loss(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2, \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2), Loss(\theta_0 + \theta_2, \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_2)\right)\right]$$

$$\begin{aligned} &= Loss(\theta_0, \hat{\theta}_0) + [Loss(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2, \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2) - Loss(\theta_0 + \theta_2, \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_2)] I_1 \\ &+ [Loss(\theta_0 + \theta_2, \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_2) - Loss(\theta_0, \hat{\theta}_0)] I_2 \end{aligned}$$

يمكن إثبات العلاقتين (23) و(24) بذات الخطوات.

5. تقدير بايز النيتروسوفكي المُجزّأ Refined Neutrosophic Bayes Estimation:

ليكن $X_{RN}: \Omega_{RN} \longrightarrow R(I_1, I_2)$ متغيّر عشوائي نيتروسوفكي مُجزّأ له توزيع احتمالي نيتروسوفكي مُجزّأ $F(X_{RN}; \theta_{RN})$، حيث أن θ_{RN} هو وسيط نيتروسوفكي مُجزّأ مجهول، ولتكن $\boldsymbol{X}_{RN} = (X_{RN_1}, X_{RN_2}, \dots, X_{RN_n})$ عينة بحجم n من المشاهدات المستقلة مسحوبة من $F(X_{RN}; \theta_{RN})$. بفرض أن θ_{RN} يخضع لتوزيع احتمالي نيتروسوفكي مُجزّأ قبلي بدالة كثافة احتمالية نيتروسوفكيّة مُجزّأة $\pi(\theta_{RN})$ و $L(\theta_{RN}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_{RN_i}; \theta_{RN})$ دالة المعقولية العُظمى النيتروسوفكيّة المُجزّأة.

نُعرّف دالة الكثافة الاحتمالية النيتروسوفكيّة المُجزّأة البعدية للوسيط θ_{RN} بالشكل:

$$f(\theta_{RN} | \boldsymbol{x}_{RN}) \propto L(\theta_{RN}) \pi(\theta_{RN}) \quad (25)$$

والتي نُصيغها بالشكل القياسي لها كالآتي:

$$f(\theta_{RN}|\boldsymbol{x}_{RN}) \propto L(\theta_0)\pi(\theta_0) + [L(\theta_0+\theta_1+\theta_2)\pi(\theta_0+\theta_1+\theta_2) - L(\theta_0+\theta_2)\pi(\theta_0+\theta_2)]I_1 + [L(\theta_0+\theta_2)\pi(\theta_0+\theta_2) - L(\theta_0)\pi(\theta_0)]I_2 \quad (26)$$

ويكون $\hat{\theta}_{RN}$ تقدير الوسيط النيتروسوفكي المُجزّأ الذي يُصغّر دالة المخاطرة النيتروسوفكيّة المُجزّأة البعدية بحسب التوزيع الاحتمالي النيتروسوفكي المُجزّأ البعدي:

$$\hat{\theta}_{RN} = \underset{t}{argmin}\, Risk\left(\theta_{RN}, \hat{\theta}_{RN}|\boldsymbol{X}_{RN} = \boldsymbol{x}_{RN}\right) \quad (27)$$

هو المتوسط، أو الوسيط، أو المنوال للتوزيع الاحتمالي النيتروسوفكي المُجزّأ البعدي.

البرهان:

لإيجاد (26) نكتب بالاعتماد على تطبيق الإيزومتريّة:

$$f(\theta_{RN}|\boldsymbol{x}_{RN}) = f(\theta_0+\theta_1I_1+\theta_2I_2|\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_1I_1+\boldsymbol{x}_2I_2)$$
$$T[f(\theta_{RN}|\boldsymbol{x}_{RN})] = f(T[\theta_0+\theta_1I_1+\theta_2I_2]|T[\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_1I_1+\boldsymbol{x}_2I_2])$$
$$= f\left((\theta_0, \theta_0+\theta_1+\theta_2, \theta_0+\theta_2)\middle|(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_2)\right)$$
$$= \left(f(\theta_0|\boldsymbol{x}_0), f(\theta_0+\theta_1+\theta_2|\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2), f(\theta_0+\theta_2|\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_2)\right)$$
$$= \left(\frac{f(\boldsymbol{x}_0|\theta_0)f(\theta_0)}{f(\boldsymbol{x}_0)}, \frac{f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2|\theta_0+\theta_1+\theta_2)f(\theta_0+\theta_1+\theta_2)}{f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)}, \frac{f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_2|\theta_0+\theta_2)f(\theta_0+\theta_2)}{f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_2)}\right)$$
$$= \left(\frac{L(\theta_0)\pi(\theta_0)}{f(\boldsymbol{x}_0)}, \frac{L(\theta_0+\theta_1+\theta_2)\pi(\theta_0+\theta_1+\theta_2)}{f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)}, \frac{L(\theta_0+\theta_2)\pi(\theta_0+\theta_2)}{f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_2)}\right)$$

وبما أن:

$$\frac{L(\theta_0)\pi(\theta_0)}{f(\boldsymbol{x}_0)} \propto L(\theta_0)\pi(\theta_0)$$
$$\frac{L(\theta_0+\theta_1+\theta_2)\pi(\theta_0+\theta_1+\theta_2)}{f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)} \propto L(\theta_0+\theta_1+\theta_2)\pi(\theta_0+\theta_1+\theta_2)$$
$$\frac{L(\theta_0+\theta_2)\pi(\theta_0+\theta_2)}{f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_2)} \propto L(\theta_0+\theta_2)\pi(\theta_0+\theta_2)$$

كما في الحالة الكلاسيكية (إذ أن شكل التوزيع الاحتمالي الناتج لا يتأثر بالمقام أيضًا). عندئذ نجد أن:

$$T[f(\theta_{RN}|\boldsymbol{x}_{RN})] \propto \left(L(\theta_0)\pi(\theta_0), L(\theta_0+\theta_1+\theta_2)\pi(\theta_0+\theta_1+\theta_2), L(\theta_0+\theta_2)\pi(\theta_0+\theta_2)\right)$$
$$\Longrightarrow T^{-1}[T[f(\theta_{RN}|\boldsymbol{x}_{RN})]] = f(\theta_{RN}|\boldsymbol{x}_{RN}) \propto L(\theta_0)\pi(\theta_0) + [L(\theta_0+\theta_1+\theta_2)\pi(\theta_0+\theta_1+\theta_2) - L(\theta_0+\theta_2)\pi(\theta_0+\theta_2)]I_1 + [L(\theta_0+\theta_2)\pi(\theta_0+\theta_2) - L(\theta_0)\pi(\theta_0)]I_2$$

أما بالنسبة للعلاقة (25) يمكن إيجادها بسهولة بنشر جداء الدالتين $L(\theta_{RN})$ و$\pi(\theta_{RN})$ والقيام بحل المعادلة الناتجة، مما يؤدي لإيجاد الصيغة في العلاقة (26) أيضًا ومنه يتم المطلوب.

وأخيرًا، لتصغير دالة المخاطرة البعدية النيتروسوفكيّة المُجزّأة $Risk\left(\theta_{RN}, \hat{\theta}_{RN}|\boldsymbol{X}_{RN} = \boldsymbol{x}_{RN}\right)$، بحسب العلاقة (16)، نقوم بتصغير: $Risk\left(\theta_0, \hat{\theta}_0|\boldsymbol{X}_0\right)$، و$Risk\left(\theta_0+\theta_1+\theta_2, \hat{\theta}_0+\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2|\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2\right)$، أي بالرد إلى الحالة الكلاسيكية، يتم ذلك بحسب دالة الخسارة المُستخدمة، فمن أجل دالة خسارة مربع الخطأ يكون:

$$\hat{\theta}_{RN} = E(\theta_{RN}|\boldsymbol{X}_{RN}) \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\theta}_0 = E(\theta_0|\boldsymbol{X}_0) \\ \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 = E(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2|\boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2) \\ \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_2 = E(\theta_0 + \theta_2|\boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{X}_2) \end{cases}$$

أي يكون التقدير الذي يصغر المخاطرة البعدية هو المتوسط البعدي والذي يمكن إيجاده بسهولة بحسب التوزيع الاحتمالي النيتروسوفكي المُجزأ البعدي الناتج.

باستخدام دوال خسارة أُخرى يكون التقدير هو الوسيط البعدي أو المنوال البعدي.

6. تطبيق:

ليكن لدينا $X_{RN_1}, X_{RN_2}, \dots, X_{RN_n} \sim Gamma(r_{RN}, \lambda_{RN})$ بوسيط r_{RN} معلوم وλ_{RN} مجهول، للقيام بتقدير الوسيط المجهول باستخدام طريقة تقدير بايز النيتروسوفكي المُجزأ، قمنا بفرض أن $\lambda_{RN} \sim Gamma(r_{*RN}, \lambda_{*RN})$ بوسيطين معلومين، نضع بحسب (21):

$$\pi(\lambda_{RN}) = \frac{{\lambda_{*RN}}^{r_{*RN}}}{(r_{*RN}-1)!}{\lambda_{RN}}^{r_{*RN}-1}e^{-\lambda_{*RN}\lambda_{RN}}$$

$$= \frac{{\lambda_{*0}}^{r_{*0}}}{(r_{*0}-1)!}{\lambda_0}^{r_{*0}-1}e^{-\lambda_{*0}\lambda_0} +$$

$$\left[\frac{(\lambda_{*0}+\lambda_{*1}+\lambda_{*2})^{r_{*0}+r_{*1}+r_{*2}}}{(r_{*0}+r_{*1}+r_{*2}-1)!}(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^{r_{*0}+r_{*1}+r_{*2}-1}e^{-(\lambda_{*0}+\lambda_{*1}+\lambda_{*2})(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)}\right.$$

$$\left. - \frac{(\lambda_{*0}+\lambda_{*2})^{r_{*0}+r_{*2}}}{(r_{*0}+r_{*2}-1)!}(\lambda_0+\lambda_2)^{r_{*0}+r_{*2}-1}e^{-(\lambda_{*0}+\lambda_{*2})(\lambda_0+\lambda_2)}\right] I_1 +$$

$$\left[\frac{(\lambda_{*0}+\lambda_{*2})^{r_{*0}+r_{*2}}}{(r_{*0}+r_{*2}-1)!}(\lambda_0+\lambda_2)^{r_{*0}+r_{*2}-1}e^{-(\lambda_{*0}+\lambda_{*2})(\lambda_0+\lambda_2)} - \frac{{\lambda_{*0}}^{r_{*0}}}{(r_{*0}-1)!}{\lambda_0}^{r_{*0}-1}e^{-\lambda_{*0}\lambda_0}\right] I_2$$

و:

$$L(\lambda_{RN}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{{\lambda_{RN}}^{r_{RN}}}{(r_{RN}-1)!}{x_{RN}}_i^{r_{RN}-1}e^{-\lambda_{RN}x_{RN_i}}$$

والتي يمكن كتابتها بحسب الإيزومترية بالشكل:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{{\lambda_0}^{r_0}}{(r_0-1)!}{x_{0_i}}^{r_0-1}e^{-\lambda_0 x_{0_i}} +$$

$$\left[\prod_{i=1}^{n} \frac{(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^{r_0+r_1+r_2}}{(r_0+r_1+r_2-1)!}\left(x_{0_i}+x_{1_i}+x_{2_i}\right)^{r_0+r_1+r_2-1}e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)(x_{0_i}+x_{1_i}+x_{2_i})}\right.$$

$$\left. - \prod_{i=1}^{n} \frac{(\lambda_0+\lambda_2)^{r_0+r_2}}{(r_0+r_2-1)!}\left(x_{0_i}+x_{2_i}\right)^{r_0+r_2-1}e^{-(\lambda_0+\lambda_2)(x_{0_i}+x_{2_i})}\right] I_1 +$$

$$\left[\prod_{i=1}^{n} \frac{(\lambda_0+\lambda_2)^{r_0+r_2}}{(r_0+r_2-1)!}\left(x_{0_i}+x_{2_i}\right)^{r_0+r_2-1}e^{-(\lambda_0+\lambda_2)(x_{0_i}+x_{2_i})} - \prod_{i=1}^{n} \frac{{\lambda_0}^{r_0}}{(r_0-1)!}{x_{0_i}}^{r_0-1}e^{-\lambda_0 x_{0_i}}\right] I_2$$

بحسب (26) نكتب:

$$f(\lambda_{RN}|\boldsymbol{x}_{RN}) \propto \frac{{\lambda_0}^{nr_0}}{\left((r_0-1)!\right)^n}e^{-\lambda_0 \Sigma x_{0_i}}\frac{{\lambda_{*0}}^{r_{*0}}}{(r_{*0}-1)!}{\lambda_0}^{r_{*0}-1}e^{-\lambda_{*0}\lambda_0}\prod_{i=1}^{n}{x_{0_i}}^{r_0-1} +$$

$$\left[\frac{(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^{n(r_0+r_1+r_2)}}{((r_0+r_1+r_2-1)!)^n}e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)\Sigma(x_{0_i}+x_{1_i}+x_{2_i})}\frac{(\lambda_{*0}+\lambda_{*1}+\lambda_{*2})^{r_{*0}+r_{*1}+r_{*2}}}{(r_{*0}+r_{*1}+r_{*2}-1)!}(\lambda_0+\lambda_1\right.$$
$$+\lambda_2)^{r_{*0}+r_{*1}+r_{*2}-1}e^{-(\lambda_{*0}+\lambda_{*1}+\lambda_{*2})(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)}\prod_{i=1}^{n}\left(x_{0_i}+x_{1_i}+x_{2_i}\right)^{(r_0+r_1+r_2-1)}$$
$$-\frac{(\lambda_0+\lambda_2)^{n(r_0+r_2)}}{((r_0+r_2-1)!)^n}e^{-(\lambda_0+\lambda_2)\Sigma(x_{0_i}+x_{2_i})}\frac{(\lambda_{*0}+\lambda_{*2})^{r_{*0}+r_{*2}}}{(r_{*0}+r_{*2}-1)!}(\lambda_0$$
$$\left.+\lambda_2)^{r_{*0}+r_{*2}-1}e^{-(\lambda_{*0}+\lambda_{*2})(\lambda_0+\lambda_2)}\prod_{i=1}^{n}\left(x_{0_i}+x_{2_i}\right)^{(r_0+r_2-1)}\right]I_1+$$
$$\left[\frac{(\lambda_0+\lambda_2)^{n(r_0+r_2)}}{((r_0+r_2-1)!)^n}e^{-(\lambda_0+\lambda_2)\Sigma(x_{0_i}+x_{2_i})}\frac{(\lambda_{*0}+\lambda_{*2})^{r_{*0}+r_{*2}}}{(r_{*0}+r_{*2}-1)!}(\lambda_0\right.$$
$$+\lambda_2)^{r_{*0}+r_{*2}-1}e^{-(\lambda_{*0}+\lambda_{*2})(\lambda_0+\lambda_2)}\prod_{i=1}^{n}\left(x_{0_i}+x_{2_i}\right)^{(r_0+r_2-1)}$$
$$\left.-\frac{{\lambda_0}^{nr_0}}{((r_0-1)!)^n}e^{-\lambda_0\Sigma x_{0_i}}\frac{{\lambda_{*0}}^{r_{*0}}}{(r_{*0}-1)!}{\lambda_0}^{r_{*0}-1}e^{-\lambda_{*0}\lambda_0}\prod_{i=1}^{n}{x_{0_i}}^{r_0-1}\right]I_2$$

$$=\frac{{\lambda_{*0}}^{r_{*0}}\prod_{i=1}^{n}{x_{0_i}}^{r_0-1}}{((r_0-1)!)^n(r_{*0}-1)!}{\lambda_0}^{nr_0+r_{*0}-1}e^{-\lambda_0(\lambda_{*0}+\Sigma x_{0_i})}+$$
$$\left[\frac{(\lambda_{*0}+\lambda_{*1}+\lambda_{*2})^{r_{*0}+r_{*1}+r_{*2}}\prod_{i=1}^{n}\left(x_{0_i}+x_{1_i}+x_{2_i}\right)^{(r_0+r_1+r_2-1)}}{((r_0+r_1+r_2-1)!)^n(r_{*0}+r_{*1}+r_{*2}-1)!}(\lambda_0+\lambda_1\right.$$
$$+\lambda_2)^{n(r_0+r_1+r_2)+r_{*0}+r_{*1}+r_{*2}-1}e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)\left((\lambda_{*0}+\lambda_{*1}+\lambda_{*2})+\Sigma(x_{0_i}+x_{1_i}+x_{2_i})\right)}$$
$$-\frac{(\lambda_{*0}+\lambda_{*2})^{r_{*0}+r_{*2}}\prod_{i=1}^{n}\left(x_{0_i}+x_{2_i}\right)^{(r_0+r_2-1)}}{((r_0+r_2-1)!)^n(r_{*0}+r_{*2}-1)!}(\lambda_0$$
$$\left.+\lambda_2)^{n(r_0+r_2)+r_{*0}+r_{*2}-1}e^{-(\lambda_0+\lambda_2)\left((\lambda_{*0}+\lambda_{*2})+\Sigma(x_{0_i}+x_{2_i})\right)}\right]I_1+$$
$$\left[\frac{(\lambda_{*0}+\lambda_{*2})^{r_{*0}+r_{*2}}\prod_{i=1}^{n}\left(x_{0_i}+x_{2_i}\right)^{(r_0+r_2-1)}}{((r_0+r_2-1)!)^n(r_{*0}+r_{*2}-1)!}(\lambda_0\right.$$
$$+\lambda_2)^{n(r_0+r_2)+r_{*0}+r_{*2}-1}e^{-(\lambda_0+\lambda_2)\left((\lambda_{*0}+\lambda_{*2})+\Sigma(x_{0_i}+x_{2_i})\right)}$$
$$\left.-\frac{{\lambda_{*0}}^{r_{*0}}\prod_{i=1}^{n}{x_{0_i}}^{r_0-1}}{((r_0-1)!)^n(r_{*0}-1)!}{\lambda_0}^{nr_0+r_{*0}-1}e^{-\lambda_0(\lambda_{*0}+\Sigma x_{0_i})}\right]I_2$$

نلاحظ وجود ثوابت في المعادلة الناتجة، والتي من الممكن التخلص منهم دون وجود تأثير على شكل التوزيع الاحتمالي الناتج. إذًا، يمكن أخذ الصورة الإيزومترية وإقصاء الثوابت وأخذ الصورة العكسية للتطبيق الإيزومتري بعد ذلك، فنجد أن:

$$\Rightarrow f(\lambda_{RN}|\boldsymbol{x}_{RN})\propto {\lambda_0}^{nr_0+r_{*0}-1}e^{-\lambda_0(\lambda_{*0}+\Sigma x_{0_i})}+$$

$$\Big[(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^{n(r_0+r_1+r_2)+r_{*0}+r_{*1}+r_{*2}-1}e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)\left((\lambda_{*0}+\lambda_{*1}+\lambda_{*2})+\sum(x_{0_i}+x_{1_i}+x_{2_i})\right)}$$
$$-(\lambda_0+\lambda_2)^{n(r_0+r_2)+r_{*0}+r_{*2}-1}e^{-(\lambda_0+\lambda_2)\left((\lambda_{*0}+\lambda_{*2})+\sum(x_{0_i}+x_{2_i})\right)}\Big]I_1$$
$$+\Big[(\lambda_0+\lambda_2)^{n(r_0+r_2)+r_{*0}+r_{*2}-1}e^{-(\lambda_0+\lambda_2)\left((\lambda_{*0}+\lambda_{*2})+\sum(x_{0_i}+x_{2_i})\right)}$$
$$-\lambda_0{}^{nr_0+r_{*0}-1}e^{-\lambda_0(\lambda_{*0}+\sum x_{0_i})}\Big]I_2$$

ومنه، نكون قد حصلنا على دالة كثافة احتمالية نيتروسوفكيّة مُجزّأة لتوزيع غاما نيتروسوفكي مُجزّأ بالوسيطين:

$\lambda_{RN}|\boldsymbol{X}_{RN}\sim Gamma(nr_{RN}+r_{*RN},\lambda_{*RN}+\sum x_{RN_i})$ أي: $\lambda_{*RN}+\sum x_{RN_i}$ و $nr_{RN}+r_{*RN}$

باختيار دالة خسارة مربع الخطأ، يكون تقدير الوسيط المجهول هو المتوسط البعدي:

$$\hat{\lambda}_{RN}=\frac{nr_{RN}+r_{*RN}}{\lambda_{*RN}+\sum x_{RN_i}}\Leftrightarrow\begin{cases}\hat{\lambda}_0=\dfrac{nr_0+r_{*0}}{\lambda_{*0}+\sum x_{0_i}}\\ \hat{\lambda}_0+\hat{\lambda}_1+\hat{\lambda}_2=\dfrac{n(r_0+r_1+r_2)+r_{*0}+r_{*1}+r_{*2}}{(\lambda_{*0}+\lambda_{*1}+\lambda_{*2})+\sum(x_{0_i}+x_{1_i}+x_{2_i})}\\ \hat{\lambda}_0+\hat{\lambda}_2=\dfrac{n(r_0+r_2)+r_{*0}+r_{*2}}{(\lambda_{*0}+\lambda_{*2})+\sum(x_{0_i}+x_{2_i})}\end{cases}$$

حيث أنّ الشكل القياسي للتقدير الناتج هو:

$$\hat{\lambda}_{RN}=\hat{\lambda}_0+\left[(\hat{\lambda}_0+\hat{\lambda}_1+\hat{\lambda}_2)-(\hat{\lambda}_0+\hat{\lambda}_2)\right]I_1+\left[(\hat{\lambda}_0+\hat{\lambda}_2)-(\hat{\lambda}_0)\right]I_2$$

أو باختيار دالة خسارة 0–1، يكون تقدير الوسيط المجهول هو المنوال البعدي من أجل $nr_{RN}+r_{*RN}\geq_{RN}1$:

$$\hat{\lambda}_{RN}=\frac{nr_{RN}+r_{*RN}-1}{\lambda_{*RN}+\sum x_{RN_i}}\Leftrightarrow\begin{cases}\hat{\lambda}_0=\dfrac{nr_0+r_{*0}-1}{\lambda_{*0}+\sum x_{0_i}}\\ \hat{\lambda}_0+\hat{\lambda}_1+\hat{\lambda}_2=\dfrac{n(r_0+r_1+r_2)+r_{*0}+r_{*1}+r_{*2}-1}{(\lambda_{*0}+\lambda_{*1}+\lambda_{*2})+\sum(x_{0_i}+x_{1_i}+x_{2_i})}\\ \hat{\lambda}_0+\hat{\lambda}_2=\dfrac{n(r_0+r_2)+r_{*0}+r_{*2}-1}{(\lambda_{*0}+\lambda_{*2})+\sum(x_{0_i}+x_{2_i})}\end{cases}$$

ولا يوجد منوال (أي لا يوجد تقدير للوسيط المجهول) في حال $nr_{RN}+r_{*RN}<_{RN}1$.

مثال عددي:

ليكن لدينا عينة مستقلة من المشاهدات النيتروسوفكية المُجزّأة:

$$1.48+2.32I_1+3.01I_2$$
$$0.52+0.93I_1+0.16I_2$$
$$1.1+0.73I_1-0.72I_2$$
$$0.85+1.35I_1+0.67I_2$$
$$1.3+1.15I_1-0.22I_2$$

وليكن $r_{RN}=1.5+2I_1+2.5I_2$، $r_{*RN}=1+1.2I_1+1.4I_2$، و $\lambda_{*RN}=1+1.5I_1+1.9I_2$.

من أجل دالة خسارة مربع الخطأ، نحسب تقدير الوسيط المجهول بحساب كلًا من $\hat{\lambda}_0$، $\hat{\lambda}_0+\hat{\lambda}_1+\hat{\lambda}_2$، و$\hat{\lambda}_0+\hat{\lambda}_2$، أي:

$$\hat{\lambda}_0=\frac{nr_0+r_{*0}}{\lambda_{*0}+\sum x_{0_i}}=\frac{5\times1.5+1}{1+(1.48+0.52+1.1+0.85+1.3)}=1.36$$

و:

$$\hat{\lambda}_0+\hat{\lambda}_1+\hat{\lambda}_2=\frac{n(r_0+r_1+r_2)+r_{*0}+r_{*1}+r_{*2}}{(\lambda_{*0}+\lambda_{*1}+\lambda_{*2})+\sum(x_{0_i}+x_{1_i}+x_{2_i})}$$

$$=\frac{5\times(1.5+2+2.5)+1+1.2+1.4}{(1+1.5+1.9)+(1.48+2.32+3.01+0.52+0.93+0.16+\cdots+1.3+1.15-0.22)}$$

$$=1.799$$

و:

$$\hat{\lambda}_0+\hat{\lambda}_2=\frac{n(r_0+r_2)+r_{*0}+r_{*2}}{(\lambda_{*0}+\lambda_{*2})+\sum(x_{0_i}+x_{2_i})}$$

$$=\frac{5\times(1.5+2.5)+1+1.4}{(1+1.9)+(1.48+3.01+0.52+0.16+\cdots+1.3-0.22)}=2.027$$

ومنه:

$$\hat{\lambda}_{RN}=\hat{\lambda}_0+[(\hat{\lambda}_0+\hat{\lambda}_1+\hat{\lambda}_2)-(\hat{\lambda}_0+\hat{\lambda}_2)]I_1+[(\hat{\lambda}_0+\hat{\lambda}_2)-(\hat{\lambda}_0)]I_2$$

$$=1.36+[1.799-2.027]I_1+[2.027-1.36]I_2$$

$$\Rightarrow\hat{\lambda}_{RN}=1.36-0.228I_1+0.667I_2$$

7. المناقشة Discussion:

بالنظر إلى شكل مُقدّر بايز النيتروسوفكي المُجزّأ وآلية التعامل معه، نلحظ تشابهه رياضيًّا مع مُقدّر بايز الكلاسيكي ولكن مع وجود محارف جبريّة تمثل عدم التحديد. ففي الحالة الكلاسيكية، لو قمنا بالعودة للتوزيع البعدي للوسيط المجهول الذي يخضع لتوزيع غاما قبلي ولمُقدّر بايز له من أجل دالة خسارة مربع الخطأ كما في التطبيق السابق، فسنجد أن:

$$\hat{\lambda}=\frac{nr+r_*}{\lambda_*+\sum x_i}$$

بمقارنة التقديرين الناتجين في الحالة النيتروسوفكية المُجزّأة والحالة الكلاسيكية، نجد أن المُقدّر المطروح لا يُخالف نتائج الحالة الكلاسيكية جذريًا، ولكنه يُضيف تمثيل عدم التحديد بمحارف جبريّة I_1 وI_2. إنّ المُقدّر المطروح يهدف للتعامل مع وسيط وعينة من متحولات عشوائية نيتروسوفكية مُجزّأة، وهي حالة مُختلفة عن الحالة الكلاسيكية التي يكون فيها الوسيط والعينة المسحوبة مُحددين (لا يوجد عدم تحديد)، فيمكن اعتباره تعميمًا للحالة الكلاسيكية.

أيضًا، لو قمنا بإيجاد تقدير بايز النيتروسوفكي المحرفي من أجل وسيط وعينة من متحولات عشوائية نيتروسوفكية محرفية من أجل دالة خسارة مربع الخطأ كما في [9] ، لوجدنا تشابه رياضي كبير مع التقدير الناتج في هذا العمل، إذ يكمن وجه الاختلاف في نوع الوسيط والعينة التي نتعامل معها، في النيتروسوفيك المحرفي، لدنيا محرف جبري واحد I لتمثيل عدم التحديد، أما في النيتروسوفيك المُجزّأ، لدينا محرفين جبرين I_1, I_2، ومنه أيضًا تختلف الإيزومتريّة المُستخدمة.

ليس بالضرورة أن يكون أحد المُقدّرين أفضل من الآخر، أو أن تكون تجزئة المحرف I إلى محرفين I_1, I_2 غير قابلة للتطبيق، فكل مُقدّر يتعامل مع نوع مختلف من العناصر ($R(I)$ و$R(I_1,I_2)$).

لكن، يختلف مُقدّر بايز النيتروسوفكي المُجزّأ المطروح بشكل جذري عن مثيله في الحالة الضبابية [4]، ذلك لأن عملية الاستدلال البايزي الضبابي بشكل عام تتعامل بشكل أساسي مع مفهوم دوال الانتماء (العضوية)، ولا توجد دوال عدم تحديد في المنطق الضبابي كما في المنطق النيتروسوفكي، بالإضافة لذلك، في حالة النيتروسوفيك المُجزّأ (المنهجية المُعتمدة لتمثيل عدم التحديد في هذا العمل)، يتمثل عدم التحديد بمحارف جبرية I_1, I_2، أي لا تعتمد على دوال عضوية وعدم تحديد.

8. الخاتمة Conclusion:

تم في هذا البحث تقديم تقدير بايز النيتروسوفكي المُجزّأ، مساهمًا في استكشاف امتدادات تقدير بايز في المنطق النيتروسوفكي، حيث تم أولًا تعريف دوال الخسارة والمخاطرة والمخاطرة البعدية النيتروسوفكيّة المُجزّأة ثم عرفنّا تقدير بايز النيتروسوفكي المُجزّأ.

وتم تطبيق الطريقة على عينة مسحوبة من توزيع غاما نيتروسوفكي مُجزّأ مع وسيط مجهول يخضع لتوزيع غاما نيتروسوفكي مُجزّأ أيضًا، تشابهت صياغة المقدر النيتروسوفكي المُجزّأ مع صياغة المقدر في الحالة الكلاسيكية مع أخذ محارف عدم التحديد المُجزّأة بعين الاعتبار.

9. التوصيات Recommendations:

نوصي بتركيز الأبحاث المستقبلية على دراسة المُقدّر المطروح في هذا البحث بالنسبة لوسيطين نيتروسوفكيين مُجزّأين مجهولين أو أكثر، وإيجاد حلول عددية للوسيط النيتروسوفكي المُجزّأ المجهول بالتعامل مع دالة الكثافة الاحتمالية النيتروسوفكيّة المُجزّأة البعدية بدلًا من التعامل مع دالة المخاطرة النيتروسوفكيّة المُجزّأة البعدية.

ونقترح إنشاء حزمة برمجية لتطبيق الطريقة المطروحة على بيانات نيتروسوفكية مُجزّأة حقيقية ووسيط نيتروسوفكي مُجزّأ مجهول بالنسبة لتوزيعات احتمالية نيتروسوفكيّة مُجزّأة مُختلفة للمساهمة في تطبيقات ومصفوفات التشفير.

10. المراجع:

[1] Smarandache, F. (2002). Neutrosophy, A New Branch of Philosophy, Multiple Valued Logic / An International Journal, 8(3): 297–384.

[2] Abobala, M., Sankari, H. and Zeina, M. B. (2024). On novel security systems based on the 2-cyclic refined integers and the foundations of 2-cyclic refined number theory, Journal of Fuzzy Extension and Applications, 5(1): 69–85.

[3] Allouf, A. (2024). An Era of Cryptography Based on Neutrosophic Number Theory, The Role of Cybersecurity in the Industry 5.0 Era, IntechOpen, 1st Ed., United Kingdom.

[4] Viertl, R. and Sunanta, O. (2013). Fuzzy Bayesian inference, Metron, 71(3): 207–216.

[5] Zeina, M. B., Altounji, N., Abobala, M. and Karmouta, Y. (2023). Introduction to Symbolic 2-Plithogenic Probability Theory, Galoitica: Journal of Mathematical Structures and Applications, 7(2): 18–30.

[6] Abobala, M. and Zeina, M. B. (2023). A Study of Neutrosophic Real Analysis by Using the One-Dimensional Geometric AH-Isometry, Galoitica: Journal of Mathematical Structures and Applications, 3(1): 18–24.

[7] Viertl, R. and Sunanta, O. (2015). Fuzzy Information, Likelihood, Bayes' Theorem, and Engineering Application, Current Trends in Bayesian Methodology with Applications (Edited Volume), Chapman and Hall / CRC Press, New York, PP: 609–618.

[8] Tahir, Z., Khan, H., Aslam, M., Shabbir, J., Mahmood, Y. and Smarandache, F. (2021) Neutrosophic Ratio-Type Estimators for Estimating the Population Mean, Complex and Intelligent Systems, 7(6): 2991–3001.

[9] Altounji, N., Zeina, M. B. and Ranneh, M. M. (2023). Introduction to Neutrosophic Bayes Estimation Theory, Galoitica: Journal of Mathematical Structures and Applications, 7(1): 43–50.

[10] Altounji, N., Zeina, M. B. and Ranneh, M. M. (2023). Foundation of 2-Symbolic Plithogenic Maximum a Posteriori Estimation, Neutrosophic Sets and Systems, 59(1): 59–74.

[11] Hatip, A. (2024). An Algebraic Approach for Refined Neutrosophic Random Variables, Eskişehir Technical University Journal of Science and Technology A – Applied Sciences and Engineering, 25(3): 331–340.

[12] Zeina, M. B. and Abobala, M. (2023). A novel approach of neutrosophic continuous probability distributions using AH-isometry with applications in medicine, Cognitive Intelligence with Neutrosophic Statistics in Bioinformatics, Academic Press, 1st Ed., United States, PP: 267–286.

[13] Zeina, M. B. and Abobala, M. (2023). On The Refined Neutrosophic Real Analysis Based on Refined Neutrosophic Algebraic AH-Isometry, Neutrosophic Sets and Systems, 54(13): 157–168.

[14] Smarandache, F. and Abobala, M. (2024). Operations with n-Refined Literal Neutrosophic Numbers Using the Identification Method and the n-Refined AH-Isometry, Neutrosophic Sets and Systems, 54(1): 350–358.

[15] Bassett, R. and Deride, J. (2016). Maximum a Posteriori Estimators as a Limit of Bayes Estimators, Math Program, 70(2): 129–144.

[16] Pereyra, M. (2016). Revisiting maximum-a-posteriori estimation in log-concave models, SIAM J Imaging Sci, 12(1): 650–670.