دراسة تحليلية لطرق التحكم الأمثل في النظم المحددة مع دراسة حالة

د. جمانا دياب[*] م.إلياذة الإبراهيم[**]

(الإيداع: 17 آب 2025، القبول:17 كانون الثاني 2026)

الملخص:

يشير التحكم الأمثل إلى استخدام تقنيات وطرق الأمثلة الرياضية للحصول على إشارة التحكم التي تقود النظام إلى أفضل سلوك وفق معيار محدد.

تهدف هذه الورقة البحثية إلى إجراء دراسة تحليلية متكاملة لطرق الأمثلة التي تم تطبيقها حتى الآن على النظم المحددة، "وهي النظم التي تكون جميع بارامتراتها معلومة بشكل كامل ودقيق". والوقوف على مزايا وعيوب كل طريقة، لتأمين قاعدة بحثية يمكن الرجوع إليها لاختيار طريقة الأمثلة المناسبة لنظام ما.

طرق الأمثلة التي تم دراستها في هذه الورقة هي: المتحكم التربيعي الخطي LQR Linear Quadratic Regulator والمتحكم التربيعي اللاخطيNLQR Nonlinear LQR والمتحكم التربيعي التكراري ILQR Iterative LQR، المتحكم التربيعي الغوسي LQG Linear Quadratic Gaussian المتحكم التربيعي الغوسي اللاخطي NLQG Nonlinear LQG، المتحكم التنبؤي المعتمد على نموذج MPC Model Predictive Control والصيغ اللاخطية منه LMPC Linearization MPC و NMPC Nonlinear MPC.

تم تطبيق الطرق التي تم مناقشتها في الدراسة التحليلية على أنظمة مختلفة بطبيعة العمل ومتطلبات التحكم لتعزيز النتائج.

الكلمات المفتاحية: المتحكم التربيعي الخطي، المتحكم التربيعي الغوسي، المتحكم التنبؤي، النظم الخطية، النظم اللاخطية، النواس المقلوب.

[*] أستاذ مساعد في قسم هندسة التحكم الآلي والحواسيب كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية جامعة حمص

[**] طالب دراسات عليا (دكتوراه) في قسم هندسة التحكم الآلي والحواسيب كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية جامعة حمص

Analytical Study of Optimal Control Methods in Certainty Systems with Case Study

Dr.Jomana Diab*, Eng.Eliatha Alebrahem**

(Received: 17 Augast 2025, Accepted: 17 January 2026)

Abstract:

Optimal control refers to the use of mathematical optimization techniques to determine the control signal that drives a system to the best behavior according to a specified criterion.

This research paper aims to conduct a comprehensive analytical study of the optimization methods that have been applied so far to certainty systems, "those systems where all parameters are fully and accurately known". The study highlights the advantages and disadvantages of each method, providing a research base that can be referenced when selecting an appropriate optimization method for a given system.

The optimization methods studied in this paper are: Linear Quadratic Regulator (LQR), Nonlinear LQR (NLQR), Iterative LQR (ILQR), Linear Quadratic Gaussian (LQG), Nonlinear LQG (NLQG), Model Predictive Control (MPC), and its nonlinear forms: Linearization MPC (LMPC) and Nonlinear MPC (NMPC).

The methods whose discussed in the analytical study were applied to several systems with different natures of work and control requirements to enhance the results.

Keywords: Linear Quadratic Regulator, Linear Quadratic Gaussian, Predictive Control, Linear Systems, Nonlinear Systems, inverted pendulum.

* Associated Professor, Department of Automatic Control and Computer Engineering, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, University of Homs

**Postgraduate student higher graduate student (PhD) Department of Automatic Control and Computer Engineering, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, University of Homs

I. مقدمة

مفهوم الأمثلة هو مفهوم عام يعني الحصول على الأفضل وفق معايير محددة، وتعتبر نظرية التحكم الأمثل من النظريات الأكثر أهمية في مجال التحكم، تهدف إلى جعل النظام يعمل بمواصفات معينة وفق مؤشر أداء محدد بشكل مسبق، ويتم السعي الحصول على القيمة العظمى أو الصغرى له تبعا للحالة المطلوبة من عمل النظام، يتم ذلك بتصميم متحكم يعطي إشارة العمل اللازمة لقيادة النظام، ويجبره لتحقيق المواصفات المطلوبة.

تناولت العديد من الأبحاث السابقة دراسة طرق التحكم الأمثل في النظم الخطية لسهولة التعامل معها وبساطة التطبيق، حيث تم تصميم متحكم LQRللتحكم بنظام خطي معروف بشكل كامل ودقيق في [6],[5],[4],[3],[2],[1]. ثم تم التوجه لتطوير هذه الطرق للتمكن من تطبيقها على أنظمة الزمن الحقيقي التي تكون لا خطية، وذلك إما من خلال تقريب النظام اللاخطي الى خطي كما في [8],[7]، أو باستخدام صيغة تكرارية لمتحكم LQRحيث يتم حسابه بشكل متكرر عند كل نقطة تشغيل [11],[10],[9]. وولتخلص من مشكلة الضجيج التي عانت منها الدراسات السابقة تم التوجه الى إضافة مرشح كالمان إلى المتحكم LQR لمعالجة الضجيج الغوسي الأبيض[15],[14],[13],[12] . وظهرت طرق أمثلة اعتمدت نهج مختلف عما سبق مثل MPC الذي يعتمد على التنبؤ بالخطأ المستقبلي والعمل على تجنبه قبل وقوعه وتم تطبيقه على النظم الخطية واللاخطية [22],[21],[20],[19],[18],[17],[16].

II. هدف البحث

يهدف البحث إلى دراسة تحليلية لطرق التحكم الأمثل في النظم المحددة، سواء كانت هذه النظم خطية أو لاخطية، وذلك لتحديد مزايا وعيوب كل طريقة وبالتالي تأمين خلفية مرجعية أكاديمية لموضوع التحكم الأمثل، وقاعدة بحثية دقيقة للأبحاث المستقبلية التي تهدف إلى تطوير هذه الطرق وجعلها أقرب إلى التطبيق العملي.

III. أهمية البحث

هذا البحث هاما في مجال الأبحاث التي تتطلب استخدام التحكم الأمثل، حيث يوفر على الباحث المزيد من الدراسة والجهد والبحث للوقوف على مزايا وعيوب الطريقة التي يريد استخدامها.

IV. منهج البحث

سنتناول في هذه الورقة أولا شرح آلية التحكم الأمثل بشكل عام، ثم مراجعة لطرق التحكم الأمثل بدءا من الطرق التقليدية، ودراسة هذه الطرق وبيان آلية عملها، والمقارنة بينها من خلال توضيح السلبيات والإيجابيات، وتعزيز النتائج من خلال تطبيق هذه الطرق على عدة أنظمة بطبيعة عمل ومتطلبات تحكم مختلفة، يليها الخلاصة والآفاق المستقبلية المعتمدة عليها.

V. طرق التحكم الأمثل

تعتبر النظم المحددة (certainty systems) نظم ذات بارامترات معروفة بشكل كامل ودقيق، وبالتالي تمتلك نموذج رياضي دقيق، ومن هذا المنطلق، تم استعراض طرق التحكم الأمثل التي يمكن تطبيقها على هذا النوع من النظم:

1. التحكم التربيعي الخطي LQR Linear Quadratic Regulator

يعتبر من الطرق الأكثر موثوقية ودقة، يتميز ببساطته وسهولة تطبيقه، يحتاج نموذج رياضي دقيق للنظام ويعمل في فضاء الحالة, ويطبق على النظم الخطية فقط، إذ يستخدم مؤشر أداء ذو صيغة تربيعية، لحساب إشارة التحكم المثلى، وذلك بالاعتماد على حل معادلة جبرية تسمى معادلة ريكاتي الجبرية (Algebraic Ricatti Equation ARE) تابعة لمصفوفات الحالة التي تمثل بارامترات النظام ومصفوفات التوزين التي يتم ضبطها من قبل المصمم [6−1]

آلية العمل

يتم تصميم هذا النوع من المتحكمات بعد تمثيل النظام الخطي في فضاء الحالة كما في المعادلة (1):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (1)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

حيثA,B مصفوفات تمثل بارامترات النظام، C تمثل العلاقة بين الدخل والخرج، x شعاع الحالة، u إشارة التحكم و yاخرج النظام

ويعطى مؤشر الأداء وفق المعادلة (2)

$$J = \int_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] dt \qquad (2)$$

حيث Q, R مصفوفات تربيعية متناظرة موجبة التحديد، يتم ضبطها من قبل المصمم، تقوم المصفوفة Q بضبط توزيع أثر التحكم على الحالة، وتقوم المصفوفة R بضبط إشارة التحكم من ناحية الشدة وسرعة الاستجابة واستهلاك الطاقة.

بتم إيجاد القيمة الصغرى لمؤشر الأداء وبالتالي الحصول على إشارة التحكم المثلى وفق المعادلة (3)

$$u^*(t) = \arg min_{u(t)}\ J\big(x(t), u(u)\big) \qquad (3)$$

فنحصل على معادلة ريكاتي (4) التابعة لبارامترات النظام A,B

$$A^T P + P A^T + Q - P B R^{-1} B^T P = 0 \qquad (4)$$

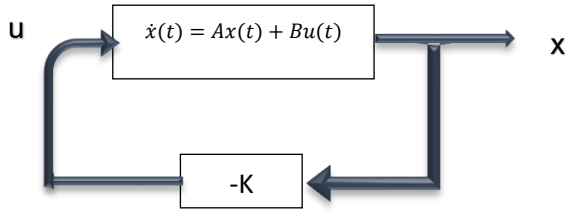
يتم من خلالها إيجاد المصفوفة P التي تحوي البارامترات المراد أمثلتها، ثم إيجاد مصفوفة الربح الخلفي k، التي تمثل بارامترات المتحكم في فضاء الحالة، وتحسب من المعادلة (5)

$$K = R^{-1} B^T P \qquad (5)$$

وبعد ذلك، يتم حساب إشارة التحكم وفق قانون التحكم الخطي (6)

$$u = -Kx \qquad (6)$$

يوضح الشكل (1) النظام في الحلقة المغلقة بطريقة LQR



الشكل(1) النظام في الحلقة المغلقة بطريقة LQR

المزايا والعيوب

تتميز بسهولة الفهم والتطبيق، وقلة الكلفة الحسابية باعتبارها تعتمد على معادلة جبرية يتم حسابها لمرة واحدة فقط، بينما تعاني من التعامل مع الأنظمة الخطية فقط، وتتأثر بالضجيج والاضطرابات في النظام.

2. المتحكم التربيعي اللاخطي NQR Nonlinear Quadratic Regulator

تعتمد هذه الطريقة على تطوير LQR لتصبح قادرة على التعامل مع الأنظمة اللاخطية، من خلال تقريب النظام اللاخطي إلى نظام خطي حول نقطة تشغيله وفق سلسلة تايلور، فنحصل على مؤشر أداء ونظام ديناميكي خطي لكل خطوة زمنية، ثم تطبق طريقة LQR التقليدية [8], [7].

آلية العمل

ليكن النظام المستمر اللاخطي ممثل بالمعادلة (7)

$$\dot{x}(t) = f(x, u)t \qquad (7)$$

حيث f تابع مستمر لاخطي

يتم تقريب النظام لجعله خطيا حول نقطة تشغيله باستخدام معادلات تايلور(التخلص من التوابع اللاخطية وتحويلها إلى مصفوفات) وفق (8)

$$f(x,u) \approx f(\overline{x_t}, \overline{u_t}) + \nabla_x f(\overline{x_t}, \overline{u_t})(x_t - \overline{x_t}) + \nabla_u f(\overline{x_t}, \overline{u_t})(u_t - \overline{u_t}) \qquad (8)$$

حيث أن $\nabla_x f(\overline{x_t}, \overline{u_t}) = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\nabla_u f(\overline{x_t}, \overline{u_t}) = \frac{\partial f}{\partial u}$ ، وبالتالي تصبح معادلة النظام اللاخطي حول نقطة تشغيله مبينة بالمعادلة (9)

$$\dot{x} = f(x_s, u_s) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_s,u_s}(x - x_s) + \frac{\partial f}{\partial u}|_{x_s,u_s}(u - u_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{x_s,u_s}(x - x_s)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}|_{x_s,u_s}(x - x_s)(u - u_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}|_{x_s,u_s}(u - u_s)^2 + high\ odrer\ term \quad (9)$$

حيث x_s, u_s شعاع الحالة وإشارة الدخل عند نقطة التشغيل، وبإهمال المشتقات الأعلى تصبح معادلة النظام التقريبية (10)

$$\dot{x} \approx f(x_s, u_s) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_s,u_s}(x - x_s) + \frac{\partial f}{\partial u}|_{x_s,u_s}(u - u_s) \quad (10)$$

باعتبار

$$f(x_s, u_s) = 0 \text{ و } \bar{x} = x - x_s\ , \bar{u} = u - u_s$$

$$\frac{\partial(x - x_s)}{\partial t} \approx \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_s,u_s}(x - x_s) + \frac{\partial f}{\partial u}|_{x_s,u_s}(u - u_s)$$

ينتج لدينا

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} \approx \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_s,u_s}\bar{x} + \frac{\partial f}{\partial u}|_{x_s,u_s}\bar{u}$$

وهذه المعادلة يمكن صياغتها وفق المعادلة (11)

$$\frac{d\bar{x}}{dt} \approx a\bar{x} + b\bar{u} \quad (11)$$

حيث $a = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_s,u_s}$, $b = \frac{\partial f}{\partial u}|_{x_s,u_s}$ ، أي عدنا بالنظام الى الصيغة الخطية، ثم يتم تطبيق طريقة LQR التقليدية السابقة.

المزايا والعيوب

تتميز بالقدرة على التعامل مع الأنظمة اللاخطية، مع سهولة التطبيق، والاحتفاظ بمزايا LQR، بينما تعاني من الحاجة إلى تقريب النظام عند كل نقطة تشغيل، والعبء الحسابي الناتج عن حساب مؤشر الأداء في كل عملية تقريب، مع فقد القليل من الدقة نتيجة عمليات التقريب.

3. التحكم التربيعي الخطي التكراري ILQR Iterative Linear Quadratic Regulator

هي خوارزمية تكرارية تطبق على النظم المتقطعة اللاخطية، حيث تبدأ بإيجاد سلسلة تحكم اسمية u_k ومسار اسمي $\hat{x}_k$ ناتج عن تطبيق u_kعلى النظام الديناميكي في الحلقة المفتوحة [9]، وعندما تكون التهيئة الأولية غير ممكنة نعتبر $u_k = 0$، ويتم تقريب النظام إلى خطي حول $\hat{x}_k, u_k$ الحالية، ثم تطبيق LQR للحصول على إشارة التحكم المثلى بشكل محلي، ويتم التكرار حتى نهاية المسار[11],[10].

آلية العمل

يتم تمثيل النظام المتقطع اللاخطي بالمعادلة (12)

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \quad (12)$$

ويكون مؤشر الأداء ممثل بالمعادلة (13)

$$J_0 = \frac{1}{2}(x_N + x^*)^T Q_f (x_N - x^*) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) \quad (13)$$

حيث $Q\ , Q_f$ مصفوفات توزين للحالة وRمصفوفة توزين إشارة التحكم وN عدد الخطوات حتى الوصول للحالة المطلوبة وx^* شعاع الحالة الهدف.

يتم تقريب النظام إلى خطي كما في المعادلة (14) وفق الدراسة المرجعية [10],[11]

$$\delta x_{k+1} = A_k \delta x_k + B_k \delta u_k \qquad (14)$$

حيث $\delta x_k = x_k - \hat{x}_k$، و$A_k$ مصفوفة التدرج للتابع f بالنسبة لشعاع الحالة وB_kمصفوفة تدرج للتابع f بالنسبة لإشارة التحكم، كلاهما مصفوفات جاكوبيان تعطيان وفق التالي $A_k = \frac{\partial f}{\partial x}|_k, B_k = \frac{\partial f}{\partial u}|_k$ ويتم تحديثهما على طول المسار x_k.

ثم تصبح معادلة مؤشر الأداء (15)

$$J = \frac{1}{2}(x_N + \delta x_N - x^*)^T Q_f (x_N + \delta x_N - x^*) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\{(x_k + \delta x_k)^T Q (x_k + \delta x_k) + (u_k + \delta u_k)^T R (u_k + \delta u_k)\} \qquad (15)$$

عادة يتم تمثيل مؤشر الأداء للنظم اللاخطية بالمعادلة (16)

$$J = \int_0^T L(x(t), u(t))dt \qquad (16)$$

حيث $L(x,u) = Q + u^T R u$ مؤشر أداء محلي، ثم يتم العمل على إيجاد معادلة هاملتون واشتقاقها بالنسبة لإشارة التحكم، من أجل الحصول على معادلة تمثل إشارة التحكم المثلى.

أولا يتم تمثيل معادلة هاملتون بشكل عام بالمعادلة (17)

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \lambda^T(t)\, f\big(x(t), u(t)\big) + L\big(x(t), u(t)\big) \qquad (17)$$

وبالتالي تصبح معادلة هاملتون لمؤشر الأداء الجديد لنظامنا المتقطع ممثلة بالمعادلة (18)

$$H_k = \frac{1}{2}(x_k + \delta x_k)^T Q (x_k + \delta x_k) + \frac{1}{2}(u_k + \delta u_k)^T R (u_k + \delta u_k) + \delta\lambda_{k+1}^T (A_k \delta x_k + B_k \delta u_k) \qquad (18)$$

يتم اشتقاق تابع هاملتون بالنسبة لشعاع للحالة فنحصل على المعادلة (19)

$$\delta\lambda_k = A_k^T \delta\lambda_{k+1} + Q(\delta x_k + x_k) \qquad (19)$$

حيث أن المتغير λ مشابه لضارب لاغرانج، ثم يتم اشتقاق معادلة هاملتون بالنسبة لإشارة التحكم u_k، وجعلها مساوية للصفر، للحصول على إشارة التحكم المثلى المبينة بالمعادلة (20)

$$\delta u_k = -R^{-1} B_k^T \delta\lambda_{k+1} - u_k \qquad (20)$$

ينتج نظام هاملتون بأخذ معادلتي الاشتقاق (19)و(20)، وتعويضهما في معادلة النظام الخطي (14)

$$\begin{pmatrix} \delta x_{k+1} \\ \delta\lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k & -B_k R^{-1} B_k^T \\ Q & A_k^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_k \\ \delta\lambda_{x+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B_k u_k \\ Q x_k \end{pmatrix} \qquad (21)$$

أي بناء على δu_k يتم حساب δx_{k+1} النقطة الجديدة في المسار المخمن، ثم إيجاد إشارة التحكم مجددا وهكذا حتى الوصول لنهاية المسار.

يمكن تلخيص خطوات هذه الخوارزمية كما يأتي:

1) تهيئة إشارة تحكم اسمية u_k
2) إيجاد x_k المقابلة لها للحصول على المسار المخمن لعمل النظام.
3) تحويل النظام الى خطي باعتباره تابع للخطأ بين الحالة المخمنة والحالة الهدف.
4) حساب إشارة التحكم المثلى وفق LQR.
5) تكرار هذه العملية باعتبار خطأ التتبع مازال موجود.

المزايا والعيوب

تتميز بالقدرة على اللتعامل مع النظم اللاخطية، والدقة في النتائج مع التخلص من الأخطاء الناتجة عن عمليات التقريب، ويمكن استخدامها في مسائل التتبع لاعتمادها على مسار مخمن، بينما تعاني من العمليات التكرارية المرهقة حسابيا، والحاجة إلى إشارة تحكم أولية.

4. التحكم التربيعي الخطي الغوسي LQG Linear Quadratic Gaussian

يعتبر هذا المتحكم تطوير LQR ليصبح مقاوم للضجيج، وهو مركب من خوارزمية تخمين ومتحكم LQR، يعتمد على حلقة أمامية تعمل على تخمين الحالة للتخلص من الضجيج الناجم عن القياس، وذلك عن طريق مرشح كالمان LQE، وحلقة خلفية تمثل المتحكم التربيعي الخطي LQR [14],[13],[12].

آلية العمل

يتم تمثيل النظام الخطي المستمر مع ضجيج القياسات وضجيج العملية وفق المعادلة (22)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + v(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + w(t) \qquad (22)$$

حيث w,v ضجيج النظام والقياسات على التوالي، هو ضجيج غوسي أبيض.

وكالمعتاد، يكون مؤشر الأداء ممثل بالمعادلة (2)، ويتم تصميم مرشح كالمان وفق الصيغة المبينة بالمعادلة (23) باعتباره نظام بحد ذاته

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + L(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t))$$
$$u(t) = -K(t)\hat{x}(t) \qquad (23)$$

باعتبار L هو ربح كالمان، ويعطى بحل المعادلة (24)

$$L(t) = S(t)C^T(t)W^{-1}(T) \qquad (24)$$

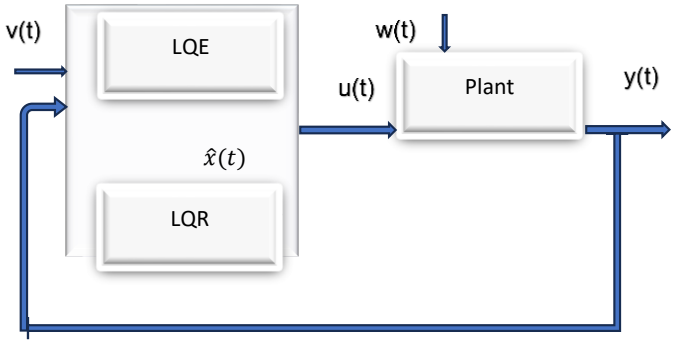
حيث S مصفوفة موجبة التحديد، يتم الحصول عليها من خلال حل معادلة ريكاتي الجبرية (4)، ولكن بعد إضافة الضجيج وباستبدال المصفوفة P بالمصفوفة S لتصبح

$$\dot{S}(t) = A(t)S(t) + S(t)A^T(t) - S(t)C^T(t)W^{-1}(t)C(t)S(t) + V(t) \qquad (25)$$

وبعد ذلك يتم تصميم LQR باعتبار مؤشر الأداء التابع لتخمين الحالة التي حصلنا عليها من مرشح كالمان ممثل بالمعادلة (26)

$$J_{lqr} = \int_0^\infty [\hat{x}^T Q\hat{x} + u^T Ru]dt \qquad (26)$$

ثم يتم التعامل مع النظام بتطبيق LQR التقليدية [10]، يوضح الشكل (2) مخطط النظام في الحلقة المغلقة بعد تطبيق LQG



الشكل(2) مخطط النظام في الحلقة المغلقة بعد تطبيق LQG

أي يوجد معادلتي ريكاتي: الأولى (25) في الحلقة الأمامية، وتعمل على حل المخمن التربيعي الخطي LQE، والثانية (4) في الحلقة الخلفية، وتعمل على حل المتحكم التربيعي الخطي LQR .

المزايا والعيوب

تتميز بالقدرة على التعامل مع الضجيج، مع الاحتفاظ بمزايا LQR من حيث الدقة والسهولة في التطبيق، بينما تعاني من عدم القدرة على التعامل مع النظم اللاخطية. والحاجة إلى حل معادلتي ريكاتي.

5. التحكم التربيعي الغوسي اللاخطي NQG Nonlinear Quadratic Gaussian

تم تطوير التحكم التربيعي الغوسي ليتمكن من التعامل مع النظم اللاخطية، من خلال عدة طرق، منها إضافة مرشح كالمان الموسع (EKF Extended Kalman Filter)، وهو يعتبر النسخة اللاخطية من مرشح كالمان حيث يكون خطي حول التخمين الحالي للحالة[15] .

آلية العمل

ليكن لدينا النظام اللاخطي المتقطع مضافا إليها الضجيج (27)

$$x_k = F(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1}$$
$$y_k = G(x_k, u_k) + v_k \qquad (27)$$

يتم أولا تحويل النظام إلى خطي حول نقاط التوازن المحلية المتمثلة بالتخمين الحالي للحالة ولإشارة التحكم، وذلك وفق المعادلة (28)

$$x_{k+1} = \Phi_k \,.\, x_k + \Gamma_k \,.\, u_k$$
$$y_k = C_k \,.\, x_k \qquad (28)$$

حيث $\Phi = \frac{\partial F}{\partial x}|_{x=x_k}$, $\Gamma = \frac{\partial F}{\partial u}|_{u=u_k}$ تدرج التابع F بالنسبة لشعاع الحالة x وبالنسبة لإشارة التحكم u وC تدرج التابع G بالنسبة لشعاع الحالة $C = \frac{\partial G}{\partial x}|_{x=x_k}$

يتم تمثيل مرشح كالمان الموسع باعتماد تقريب النظام حول متوسط الحالة المخمنة $\tilde{x}_k^-$ والتباين $\tilde{P}_{k,k}^-$ وفق المعادلة (29)

$$\tilde{x}_k^- = F(\tilde{x}_{k-1}, u_{k-1})$$
$$\tilde{P}_{k,k}^- = \Phi_k \,.\, \tilde{P}_{k,k-1}^- \,.\, \Phi_k^T + Q \qquad (29)$$

وبعد ذلك يتم حساب ربح المرشح وفق المعادلة (30)

$$K_k = \tilde{P}_{k,k}^- \,.\, C_k^T \,.\, (C_k \,.\, \tilde{P}_{k,k}^- \,.\, C_k^T + R)^{-1} \qquad (30)$$

ومن خلال هذه القيمة الجديدة لربح المرشح يتم تحديث كل من الحالة المخمنة والتباين كما موضح في المعادلة (31)

$$\tilde{x}_k = \tilde{x}_k^- + K_k \,.\, (y_k - G(\tilde{x}_k^-, u_k))$$
$$\tilde{P}_{x,k} = (I - K_k \,.\, C_k).\, \tilde{P}_{x,k}^- \qquad (31)$$

تتكرر ذه الخطوات عند كل لحظة أخذ عينات والتي يليها تخمين للبارامترات التي على إثرها يتم تحديث ربح المرشح والتباين P الذي يقابل في النظام المستمر المصفوفة P الناتجة عن حل معادلة ريكاتي التقليدية.

المزايا والعيوب

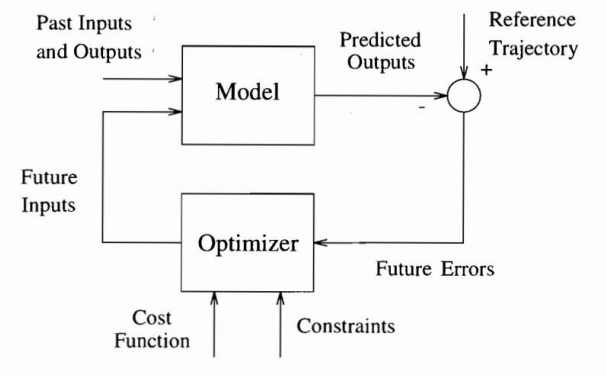
تتميز بالقدرة على التعامل مع النظم اللاخطية، بالإضافة إلى بمزايا LQG، بينما تعاني من العبء الحسابي الناتج عن العمليات التكرارية التي تتضمن إيجاد مصفوفات جاكوبيان عند كل تخمين للحالة، والتحديث المستمر لبارامترات المرشح المتمثلة بمتوسط الحالة المخمنة والتباين.

6. التحكم التنبؤي المعتمد على نموذج MPC Model Predictive Control

يعتمد MPC على استخدام نموذج جيد للنظام لتخمين خرج النظام المستقبلي خلال أفق زمني يسمى أفق التنبؤ، ثم مقارنته مع الخرج المطلوب للحصول على خطأ تخمين مستقبلي، يتم استخدامه من خلال عملية الأمثلة للحصول على سلسلة من إشارات التحكم خلال أفق يسمى أفق التحكم، مع مراعاة القيود المفروضة على خرج ودخل النظام، أي العمل على تجنب الخطأ قبل وقوعه، ويعتبر عملية أمثلة تكرارية [16]

آلية العمل

يتم إيجاد مسار مستقبلي تنبؤي للنظام باستخدام نموذج رياضي وسلسلة تحكم أولية، وبناء على هذا المسار يتم إيجاد خطأ التخمين المستقبلي، ثم تحديث إشارة التحكم المستقبلية لتفادي هذا الخطأ، يظهر في الشكل (3) بنية هذا المتحكم



الشكل(3) بنية المتحكم MPC

يتم حساب إشارة التحكم المستقبلية من خلال أمثلة دالة تعتمد على الخطأ المستقبلي، وعادة تكون هذه الدالة بصيغة تربيعية للخطأ بين الخرج المتنبأ به والمسار المرجعي [17]كما موضح في المعادلة (32)

$$J = \sum_{K=1}^{H_P} ||\hat{Y}(K+1) - r(k+1)||_Q^2 + ||\Delta u(k+1)||_R^2 \qquad (32)$$

حيث $\hat{Y}(K+1)$ الخرج المستقبلي المخمن و$r(k+1)$ الخرج المطلوب وH_P أفق التنبؤ.

يتم التنبؤ بالمسار المستقبلي في كل لحظة زمنية kبالاعتماد على أول قيمة لإشارة التحكم والخرج المقابل لها، فنحصل على المسار المتنبأ به $\hat{y}(t+1|k)$، وبناء على هذا الخرج نحصل على سلسلة من إشارات التحكم المستقبلية، وتبقى إشارة التحكم ثابتة ضمن الفترة الزمنية [t,t+δ] حتى أخذ قياسات جديدة للخرج، أي تتكرر عملية التنبؤ والأمثلة للحصول على إشارة تحكم جديدة مع كل عملية قياس جديدة [18]

ليكن لدينا النظام الخطي المتقطع في فضاء الحالة المبين بالمعادلة (33)

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$
$$y(k) = C(k)x(k) \qquad (33)$$

و يكون مؤشر الأداء موضح بالمعادلة (32)، نلاحظ من معادلة مؤشر الأداء، أن الجزء الأول يمثل خطأ التخمين، والجزء الثاني يمثل تغير إشارة التحكم $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ ، وبالتالي تكون إشارة التحكم ممثلة بالمعادلة (34)

$$u(k) = \Delta u(k) + u(k-1) \qquad (34)$$

بتعويض المعادلة (34) بمعادلة النظام (33) يصبح لدينا خرج النظام المستقبلي

$$\hat{x}(k+1) = A(k)x(k) + B(k)\Delta u(k)$$
$$\hat{y}(k+1) = C(k)\hat{x}(k+1)$$
$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k-1) + B\Delta u(k) \qquad (35)$$

نلاحظ من المعادلة (35) وجود جزء يعتمد على إشارة التحكم الحالية، وجزء يعتمد على إشارة التحكم السابقة[18].

يمكن تلخيص آلية عمل MPC في كل لحظة زمنية بما يلي:

1) الحصول على قياسات لشعاع الحالة ولخرج النظام
2) استخدام النموذج لحساب الخرج المستقبلي $\hat{y}$ (k+1) بناء على هذه القياسات.
3) حساب إشارة التحكم المستقبلية u(k+1) التي تحقق مؤشر أداء أصغري على مدى أفق التنبؤ.
4) إرسال إشارة التحكم التي تم الحصول عليها إلى النظام.
5) ثم تكرار العملية.

أي تتم الأمثلة في كل لحظة أخذ عينات من خلال حساب الخطأ بين الخرج المستقبلي المخمن والخرج المطلوب دون الحاجة لحل معادلة ريكاتي الجبرية، أي بنهج مختلف عن طرق LQR, LQG.

المزايا والعيوب

تتميز بأمثلة أداء النظام دون الحاجة لحل معادلة ريكاتي، والمرونة لاعتمادها على قياسات الدخل والخرج للنظام، بالإضافة إلى تحديث إشارة التحكم عند كل عملية قياس، بينما تعاني من الكلفة الحسابية العالية والتعقيد الكبير بسبب تكرار عملية التنبؤ والأمثلة بشكل كامل عند كل لحظة اخذ عينات، والاعتماد في حساب الأخطاء المستقبلية على نموذج رياضي قد لا يكون دقيق لوصف نظام محدد.

7. التحكم التنبؤي المعتمد على نموذج LMPC Linearization Model Predictive Control

تم العمل على تطوير طريقة التحكم التنبؤي للتعامل مع النظم اللاخطية، وكانت أكثر الطرق شيوعا هي طريقة تحويل النظام اللاخطي الى نظام خطي حول عدة نقاط تشغيل[20],[19] ضمن أفق زمني محدد، إي إيجاد إشارة التحكم محليا، وتكرار العملية مع كل لحظة أخذ قياسات جديدة.

آلية العمل

ليكن لدينا النظام المستمر اللاخطي الممثل بالمعادلة (7)

يجب أولا التمييز بين القيم المتنبأ بها والقيم الحقيقية من خلال اعتبار أن القيم التي يتم التنبؤ بها $\bar{u}$و $\bar{x}$ ، ويكون مؤشر الأداء تابع لهذه القيم خلال أفق التنبؤ H_p، وذلك من أجل حساب إشارة التحكم المثلى خلال هذه الفترة.

$$J = \int_{t}^{t+H_p} f(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau))\, d\tau \qquad (36)$$

ولكن حل مؤشر الأداء هذا بالنسبة لبارامترات لاخطية صعب جدا، لذا يتم الحصول على نموذج خطي محلي للنظام اللاخطي حول عدة نقاط تشغيل، من خلال إيجاد مصفوفات جاكوبيان A_i, B_i حول نقاط التشغيل هذه كما في NLQG باعتبار i تمثل نقاط التشغيل [21],[20],[19].

وبناء على كل نموذج خطي، يتم حساب مؤشر الأداء J_i وفق المعادلة (16). ويتم تكرار هذه الخطوات على كامل المسار، بمعنى أخر نحصل على عدة إشارات تحكم مثلى بدلا من إشارة واحدة على كامل مجال العمل.

المزايا والعيوب

تتميز بالقدرة على التعامل مع الأنظمة اللاخطية، وتكيفية حيث يتم الحصول على إشارات تحكم مثلى متعددة، بالإضافة إلى مزايا MPC، بينما تعاني من الكلفة الحسابية المرتفعة نتيجة تكرار عملية التنبؤ والأمثلة عند كل لحظة أخذ عينات، وتحويل النظام إلى خطي بشكل محلي، مع عدم القدرة على إيجاد نموذج جيد إلا باستخدام بيانات الدخل والخرج، وهذا يعتبر مهمة صعبة جداً لتحديد النموذج اللاخطي مقارنة بالخطي.

8. التحكم التنبؤي للاخطي المعتمد على نموذج NMPC Nonlinear Model Predictive Control

هذه الطريقة مشابهة لطريقة LMPC لكن دون الحاجة إلى تحويل النظام اللاخطي إلى خطي، وإنما يتم التعامل معه من خلال تحويله إلى نظام متقطع ومتابعة عملية الأمثلة كالمعتاد[21].

آلية العمل

ليكن لدينا النظام المستمر اللاخطي الممثل بالمعادلة (7)، يتم استخدام طريقة fourth–order Runge–Kutta لتقطيع النظام المستمر لأنها تتميز بالدقة، فيصبح لدينا النظام المتقطع الجديد ممثل بالمعادلة (37)

$$x(k+1) = x(t) + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + 4K_4) \qquad (37)$$

حيث T زمن أخذ العينات و $K_1 = Tf(x_k, u_k)$ و $K_2 = Tf\left(x_k + \frac{1}{2}K_1, u_k\right)$

و $K_3 = Tf\left(x_k + \frac{1}{2}K_2, u_k\right)$ و $K_4 = Tf(x_k + K_3, u_k)$

يكون الهدف هو إيجاد إشارة التحكم المثلى التي تجعل مؤشر الأداء أصغري، باعتباره ممثل بالمعادلة (38)

$$J = \sum_{i=1}^{H_p} |x_{k+i} - x_{ref}^i|_Q^2 + \sum_{i=1}^{H_c} |u_i - u_{i-1}|_R^2 \qquad (38)$$

حيث x_{ref}^i تمثل الحالة المطلوبة في اللحظة i، x_{k+i} تمثل اللحظة المتنبأ بها بعد i خطوة، وk تمثل اللحظة الحالية.

المزايا والعيوب

بالإضافة إلى مزاياMPC، تتميز بالدقة للتخلص من عمليات تحويل النظام اللاخطي إلى خطي، بينما تعاني من التعقيد الحسابي الناتج عن التعامل مع النظم المتقطعة، والعمليات التكرارية المرهقة حسابيا.

VI. نتائج الدراسة التحليلية

يمكن تلخيص المقارنة بين الطرق السابقة من خلال الجدول (1) الذي يوضح الفرق من خلل الدقة والعمليات التكرارية والتعقيد الحسابي بالإضافة إلى مقاومة الضجيج.

الجدول رقم (1): المقارنة بين طرق التحكم الأمثل في النظم المحددة

الطريقة	الدقة	العمليات التكرارية	التعقيد الحسابي	مقاومة الضجيج
LQR	عالية	تنفذ لمرة واحدة offline	عمليات بسيطة وسهلة، $O(n^3)$	تتأثر
NLQR	متوسطة بسبب تقريب النظام	موجودة عند كل نقطة تشغيل	متزايد بسبب تحويل النظام الى خطي عند كل نقطة تشغيل، > $O(n^3)$	تتأثر
ILQR	عالية لتخلصها من أخطاء التقريب	موجودة على كامل المسار	متزايد بسبب تكرار عملية الأمثلة مع كل تخمين، > $O(n^3)$	تتأثر
LQG	عالية	تنفذ لمرة واحدة offline	متزايد بسبب عمليات حساب ربح مرشح كالمان،$O(n^3)$+ $O(n^3)$	لا تتأثر
NLQG	عالية	موجودة عند كل تخمين الحالة	متزايد بسبب حساب ربح المرشح وتكرار لعملية الأمثلة في كل خطوة تخمين، > $O(n^3)$+ $O(n^3)$	لا تتأثر
MPC	تعتمد على النموذج المرجعي المستخدم	موجودة عند كل لحظة أخذ عينات N *Hc	متزايد بسبب إعادة عمليات التنبؤ والأمثلة على طول أفق التنبؤ، $O(Hp^3)$	لا تتأثر
LMPC	تعتمد على النموذج المرجعي المستخدم	موجودة مع كل لحظة أخذ عينات	متزايد بسبب تكرار لعملية التحويل الى خطي والتنبؤ والامثلة على طول أفق التنبؤ، > $O(Hp^3)$	لا تتأثر
NMPC	أكثر دقة من LMPC	موجودة مع كل لحظة أخذ عينات	متزايد بسبب التعامل مع النظام بصيغة المتقطعة وتكرار عملية التنبؤ والامثلة على طول أفق التنبؤ، > $O(Hp^3)$	لا تتأثر

نلاحظ من الجدول(1) ، أن LQG يعطي أداء أقرب للناحية العملية كونها تعاملت مع وجود ضجيج واضطرابات، ولكن على حساب سرعة الاستجابة والتعقيد الحسابي، الذي رغم ارتفاعه مقارنة ب LQR بقي مقبولا مقارنة بتعقيد MPC، الذي كان مرتفع جدا، مع تحكم تكيفي بطيء قليلا، لكن على المدى البعيد يعطي نتائج أفضل كونه يتعامل مع أي تغيرات بالنظام من خلال الاعتماد على الخرج المستقبلي لتقييم إشارة التحكم، وبالتالي حافظ LQR على مرتبته الأولى بسرعة الاستجابة والدقة، ولكن ذلك دون وجود ضجيج أو اضطرابات أو تغيرات في بيئة النظام ،ومن هنا يمكن تحديد استخدام المتحكم LQR في حال كانت الأولوية للسرعة والدقة، وكان التعامل مع نظام دون دراسة الاضطرابات والضجيج, و يمكن اختيار متحكم LQG في حال كان الضجيج المطبق على النظام سيدرس ويتم أخذه بعين الاعتبار. وأخيرا ويمكن اختيار MPCفي حال كانت المحافظة على الدقة للنظام في بيئة تؤدي إلى تغيرات في ديناميكية النظام هي العامل الأهم دون النظر إلى زمن التنفيذ وتعقيد الحسابات.

VII. المحاكاة والنتائج

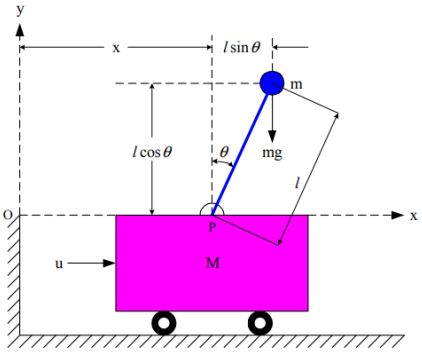
لتأكيد نتائج الدراسة التحليلية تم تطبيق طرق التحكم المختلفة المدروسة أعلاه على ثلاثة نظم بطبيعة عمل ومتطلبات تحكم مختلفة، وهي نظام النواس المقلوب الخطي ونظام النواس المقلوب اللاخطي ونظام الكتلة – النابض – المخمد، حيث يبين الجدول (2) الاختلاف بين هذه النظم وفق طبيعة العمل ومتطلبات التحكم

جدول (2): الاختلاف بين نظام النواس المقلوب الخطي واللاخطي ونظام الكتلة -النابض- المخمد

	طبيعة العمل	متطلبات التحكم
نظام النواس المقلوب الخطي	غير مستقر بطبيعته وحساس جدا لأي تغير في إزاحة العربة وهو مائل إلى السقوط بطبيعته	تحقيق التوازن من خلال جعل زاوية النواس مع الشاقول صفرية، ويتطلب استجابة سريعة
نظام النواس المقلوب اللاخطي	غير مستقر بطبيعته وحساس جدا ويتأثر بالعوامل اللاخطية مثل تأثير الرياح الأفقية على النواس وانحراف الزاوية حتى وإن كان صغير	تحقيق التوازن وتأمين استجابة سريعة مع ضرورة تقريب النظام عند نقاط التشغيل من لاخطي إلى خطي
نظام الكتلة – النابض–المخمد	نظام مهتز يذهب إلى الاستقرار بطبيعته ذو ديناميكية بطيئة	تحقيق استقرار الكتلة الثانية، لا يوجد قيود على سرعة الاستجابة لأنه لن يفقد الاستقرار وانما سيستقر مع الزمن على عكس النواس المقلوب

- **<u>نظام النواس المقلوب الخطي</u>**

يعتبر نظام النواس المقلوب من النظم الأكثر اعتمادا كنظام فحص لنظريات التحكم، لبساطته وسهولة تطبيقه وفهمLQR [22]. لذا تم اعتماده في هذه الورقة لمقارنة أداء طرق التحكم الأمثل الخطية المذكورة أعلاه. يتكون من نواس معلق بشكل مقلوب كتلته للأعلى على عربة قابلة للحركة أفقيا، كما موضح بالشكل (4). هذا النظام بطبعه غير مستقر أي النواس سيقع بالحالة الطبيعية، لذا يتم تطبيق قوة خارجية على العربة لتسمح بتحريكها أفقيا لضمان ثبات النواس بشكل عامودي [22]، أي يكون دخل النظام هو القوة المطبقة على العربة u وخرجه هو زاوية ميلان النواس عن الشاقول θ وإزاحة العربة x، وتكون المعادلات التفاضلية للنظام[22] :



الشكل (4):نظام النواس المقلوب[23]

$$\ddot{x} = \frac{u + ml\sin\theta\,\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta\sin\theta}{M + m - m\cos^2\theta} \quad (39)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{u\cos\theta + (M+m)g\sin\theta - ml\cos\theta\sin\theta\,\dot{\theta}^2}{ml\cos^2\theta - (M+m)l} \quad (40)$$

نقوم بتحويل النظام إلى صيغته الخطية حول نقطة توازنه أي $\theta \approx 0, \cos\theta = 1, \sin\theta = \theta$ ويتم تمثيله في فضاء الحالة وفق المعادلة (1) باعتبار متغيرات الحالة $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]$ والمصفوفات A, B كالتالي:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{g(M+m)}{M} & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{lM} \end{bmatrix}$$

حيث بارامترات النواس المقلوب مبينة بالجدول (3)

الجدول (3): بارامترات النواس المقلوب

كتلة العربة M	كتلة النواس m	تسارع الجاذبية الأرضية g	طول النواس L
0.455 kg	0.21 kg	9.81 m/s^2	0.3 m

تطبيق LQR

يكون الهدف من التحكم جعل مؤشر الأداء $J = \int_0^\infty [x^T Q x + u^T R u]dt$ أصغر ما يمكن ، حيث Q, R مصفوفات تربيعية متناظرة موجبة التحديد، يتم ضبطها من قبل المصمم، في حالتنا Q=diag([10 1 500 1]) بهدف التركيز على زاوية النواس، و R=0.2. بتم إيجاد القيمة الصغرى لمؤشر الأداء وبالتالي الحصول على إشارة التحكم المثلى وفق قانون التحكم الخطي $u = -Kx$ حيث K هي مصفوفة الربح الخلفي والتي تحسب من المعادلة $K = R^{-1}B^T P$ حيث P مصفوفة موجبة التحديد يتم الحصول عليها من معادلة ريكاتي $A^T P + PA^T + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$

تطبيق LQG

يتم تطبيق LQGعلى النظام بعد إضافة ضجيج القياس وضجيج العملية فيصبح تمثيل النظام بالصيغة التالية

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + v(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + w(t)$$

حيث w,v ضجيج النظام والقياسات على التوالي، هو ضجيج غوسي أبيض. وتكون قيمة كل منهما (4)w=v=0.01*eye، يتم تصميم مرشح كالمان حيث يكون ربح كالمان $L(t) = S(t)C^T(t)W^{-1}(T)$ حيث S مصفوفة موجبة التحديد، يتم الحصول عليها من خلال حل المعادلة الجبرية التالية:

$$\dot{S}(t) = A(t)S(t) + S(t)A^T(t) - S(t)C^T(t)W^{-1}(t)C(t)S(t) + V(t)$$

وبعد ذلك يتم تصميم LQR باعتبار مؤشر الأداء التابع لتخمين الحالة التي حصلنا عليها من مرشح كالمان معطى بالمعادلة

$$J_{lqr} = \int_0^{\infty} [\hat{x}^T Q \hat{x} + u^T R u] dt$$

تطبيق MPC

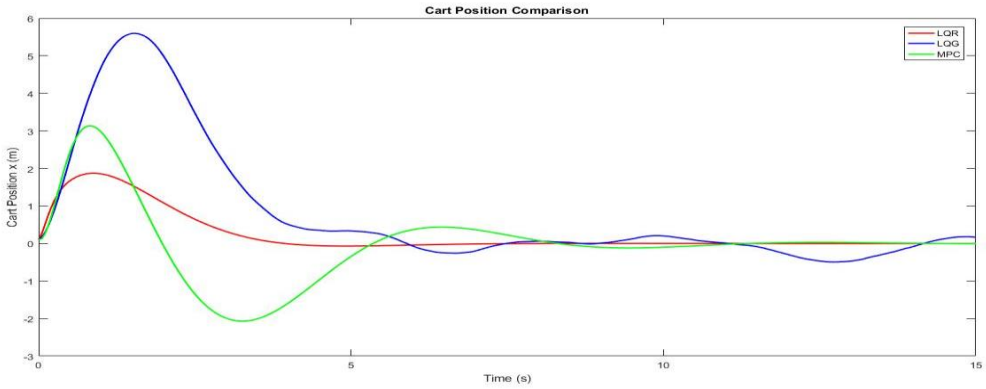
أولا نحسب إشارة الخرج المستقبلي وفق المعادلة

$$\hat{x}(k+1) = A(k)x(k) + B(k)\Delta u(k)$$
$$\hat{y}(k+1) = C(k)\hat{x}(k+1)$$

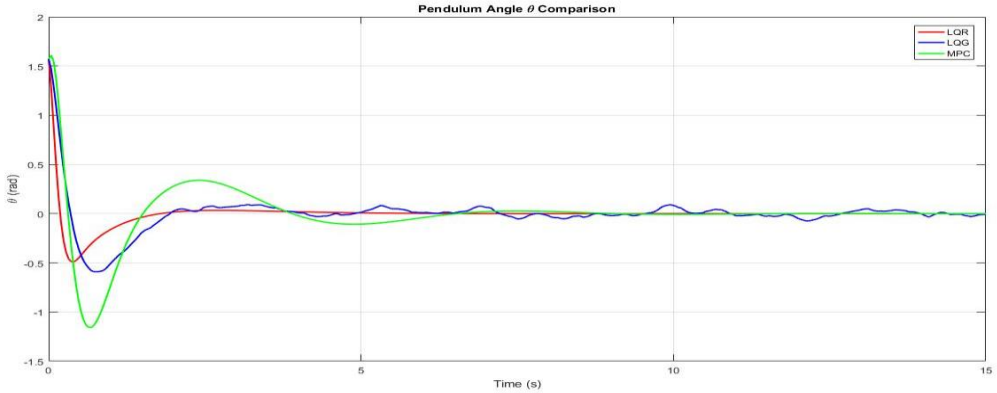
حيث $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ الفتغير في إشارة التحكم ، بحيث يحقق هذا الخرج المستقبلي القيمة الصغرى لمؤشر الأداء $J = \sum_{K=1}^{H_P} ||\hat{Y}(K+1) - r(k+1)||_Q^2 + ||\Delta u(k+1)||_R^2$ مع اعتماد $r(k+1)$ الخرج المطلوب وفي نظامنا هو صفر أي استقرار النواس وجعل زاوية ميلانه عن الشاقول مساوية الصفر وH_P أفق التنبؤ. في نظامنا هذا تم اعتماد Hp=20، من خلال مؤشر الأداء هذا نحسب إ$\Delta u(k+1)$ ، و من خلال العلاقة $\Delta u(k+1) = u(k+1) - u(k)$، نوجد إشارة التحكم و نرسلها للنظام ، وتستمر العملية على طول أفق التنبؤ.

باعتماد الشروط الابتدائية$[0.1.0, \frac{\pi}{2}, 0]$ تم تطبيق طرق التحكم الأمثل LQR,LQG,MPC.

كانت نتائج المحاكاة كما موضح بالشكل (5) الذي يمثل إزاحة العربة والشكل (6) الذي يمثل زاوية ميل النواس، والشكل (7) يمثل إشارة التحكم



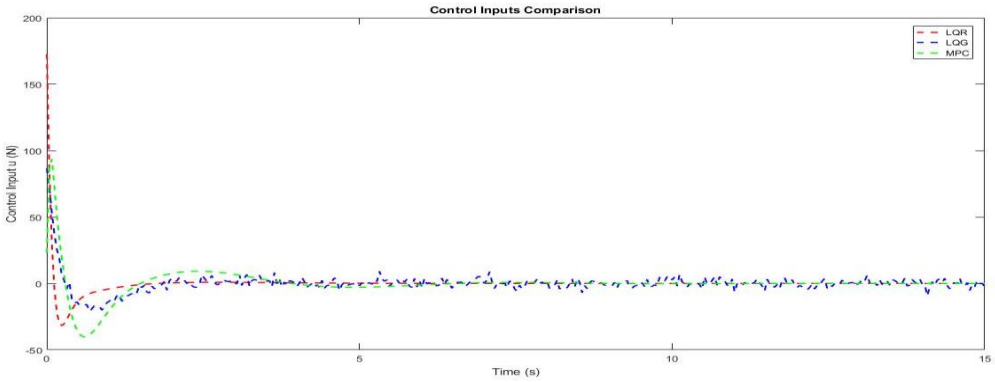
الشكل رقم (5) : إزاحة العربة عند تطبيق LQR,LQG,MPC



الشكل (6): زاوية ميل النواس عند تطبيق LQR,LQG,MPC

الشكل (7): إشارة التحكم عند تطبيق LQR,LQG,MPC

كانت قيم زمن الارتفاع وزمن الاستقرار والتجاوز الأعظمي موضحة وفق الجدول (4)



الجدول رقم (4): المقارنة بين LQR,LQG,MPC على نظام النواس المقلوب الخطي

	LQR	LQG	MPC
Rise time (s)	0.139	0.258	0.179
Overshoot %	0.01	0.08	0.33
زمن الاستقرار Ts (s)	2.36	4.04	6.72
زمن التنفيذ (s)	0.039414	0.050525	6.290037

نلاحظ من الجدول السابق أن LQR يحقق الاستقرار بزمن أقل وتجاوز أعظمي شبه معدوم، بينما MPC يحتاج زمن تنفيذ كبير مقارنة ب LQR,LQG .

- **النواس المقلوب اللاخطي Nonlinear Inverted Pendulum**

يتم دراسة النواس المقلوب الممثل بالشكل (4) بحالته العملية أي كنظام لاخطي مع إضافة تأثير الرياح الأفقية على النواس F_w فتصبح معادلاته بالصيغة التالية وفق الدراسة [23]

$$(M+m)\ddot{x} - ml\sin\theta\dot{\theta}^2 + ml\cos\theta\ddot{\theta} = u + F_w \qquad (41)$$

$$m\ddot{x}\cos\theta + ml\ddot{\theta} = mg\sin\theta + F_w\cos\theta \qquad (42)$$

وبالتالي وانطلاقا من المعادلتين (39) و (40) نحصل على معادلات النواس المقلوب اللاخطي مع تأثير الرياح الأفقية

$$\ddot{x} = \frac{u\cos\theta + ml\sin\theta\,\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta\sin\theta + F_w\sin^2 x_3}{M + m - m\cos^2\theta} \qquad (43)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{u\cos\theta + (M+m)g\sin\theta - ml\cos\theta\sin\theta\,\dot{\theta}^2 - \left(\frac{M}{m}\right)F_w\cos x_3 + F_w\cos\theta}{ml\cos^2\theta - (M+m)l} \qquad (44)$$

تطبيق LQR

ليتم تطبيق المتحكم LQR على نظام لاخطي يتم تقريب النظام حول نقطة تشغيله إلى نظام خطي و ذلك من خلال حساب مصفوفات جاكوبيان للنظام حوا هذه النقطة، في نظام النواس المقوب اللاخطي تكون نقطة التشغيل

النظام ممثل بالصيغة $\dot{x}(t) = f(x,u)t$ حيث شعاع الحالة $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]$ و بالتالي يكون

$\frac{d}{dt}x = d\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}$ وتكون $\ddot{\theta}$ و$\ddot{x}$ توتبع لاخطية ممثلة وفق المعادلتين (43) و (44)

نقوم بتحويل النظام إلى صيغته الخطية حول نقطة توازنه أي $\theta \approx 0, \cos\theta = 1, \sin\theta = \theta$ وباعتبار x_s, u_s شعاع الحالة وإشارة الدخل عند نقطة التشغيل، وبإهمال المشتقات الأعلى تصبح معادلة النظام التقريبية

$$\dot{x} \approx f(x_s,u_s) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_s,u_s}(x-x_s) + \frac{\partial f}{\partial u}|_{x_s,u_s}(u-u_s)$$

باعتبار $\bar{x} = x - x_s$, $\bar{u} = u - u_s$ و $f(x_s,u_s) = 0$ ، $\frac{\partial(x-x_s)}{\partial t} \approx \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_s,u_s}(x-x_s) + \frac{\partial f}{\partial u}|_{x_s,u_s}(u-u_s)$

ينتج لدينا $\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} \approx \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_s,u_s}\bar{x} + \frac{\partial f}{\partial u}|_{x_s,u_s}\bar{u}$

وهذه المعادلة يمكن صياغتها وفق المعادلة $\frac{d\bar{x}}{dt} \approx a\bar{x} + b\bar{u}$

حيث $a = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_s,u_s}$, $b = \frac{\partial f}{\partial u}|_{x_s,u_s}$ ، أي عدنا بالنظام الى الصيغة الخطية، ثم يتم تطبيق طريقة LQR التقليدية السابقة.

ويتم تمثيله في فضاء الحالة وفق المعادلة (1) باعتبار متغيرات الحالة $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]$ والمصفوفات A, B كالتالي:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{g(M+m)}{M} & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{lM} \end{bmatrix}$$

حيث بارامترات النواس المقلوب مبينة بالجدول (3)

بعد تحويل النظام من لاخطي إلى خطي عند نقطة تشغيله يتم تطبيق LQR تقليدي من خلال حل معادلة ريكاتي $A^TP +$ $PA^T + Q - PBR^{-1}B^TP = 0$ التي نحصل من خلالها على المصفوفة p موجبة التحديد وثم نحسب مصفوفة الربح الخلفي $K = R^{-1}B^TP$ وأخيرا نوجد إشارة التحكم المثلى وفق المعادلة $u = -Kx$

تم اختيار المصفوفة Q=diag([1 500 1 10]) و R=1

تطبيق LQG

بإضافة الضجيج إلى النظام اللاخطي تكون المعادلات كالتالي $\dot{x} = F(x,u) + w\,, y = C(x,u) + v$، يتم أولا تحويل النظام إلى خطي حول نقاط التوازن المحلية، وذلك وفق المعادلة $\dot{x} = \Phi\,.\,\bar{x} + \Gamma\,.\,\bar{u}$ ، حيث $\Phi = \frac{\partial F}{\partial x}|_{x=x_s}$, $\Gamma = \frac{\partial F}{\partial u}|_{u=u_s}$

يتم تمثيل مرشح كالمان باعتماد تقريب النظام حول نقطة تشغيله وحساب ربح المرشح $L(t) = S(t)C^T(t)W^{-1}(T)$ حيث S مصفوفة موجبة التحديد، يتم الحصول عليها من خلال حل المعادلة الجبرية التالية:

$$\dot{S} = \Phi(t)S(t) + S(t)\,\Phi^T(t) - S(t)C^T(t)W^{-1}(t)C(t)S(t) + V(t)$$

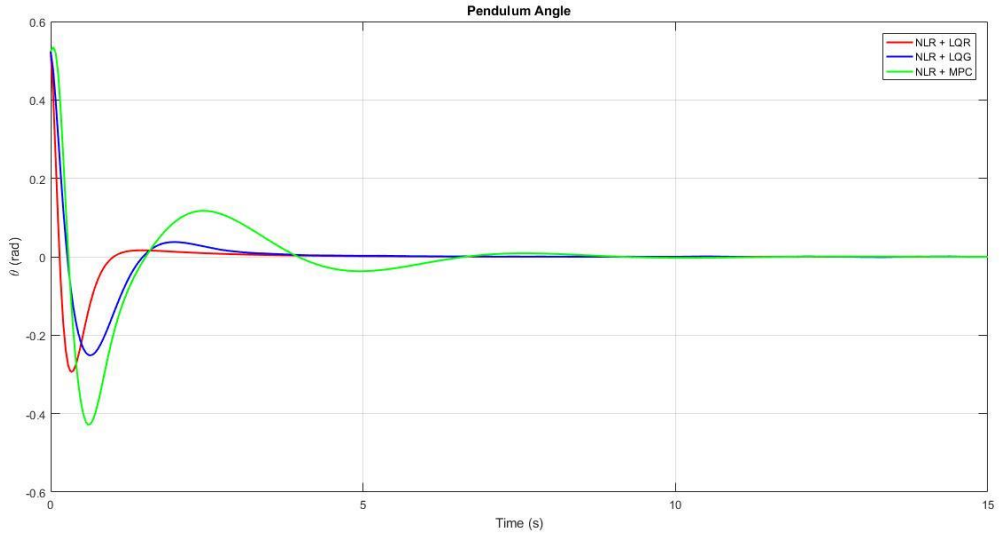
وبعد ذلك يتم تصميم LQR باعتبار مؤشر الأداء التابع لتخمين الحالة التي حصلنا عليها من مرشح كالمان ممثل بالمعادلة

$$J_{lqr} = \int_0^\infty [\hat{x}^T Q\hat{x} + u^T Ru]dt$$

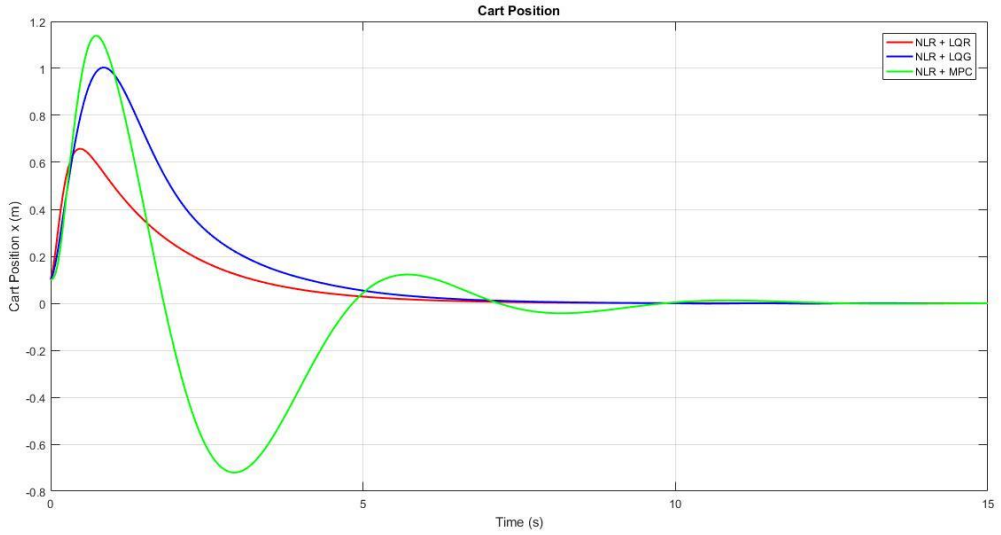
تم ضبط ضجيج القياس و ضجيج العملية w=v=0.01*eye(4)

تطبيق MPC

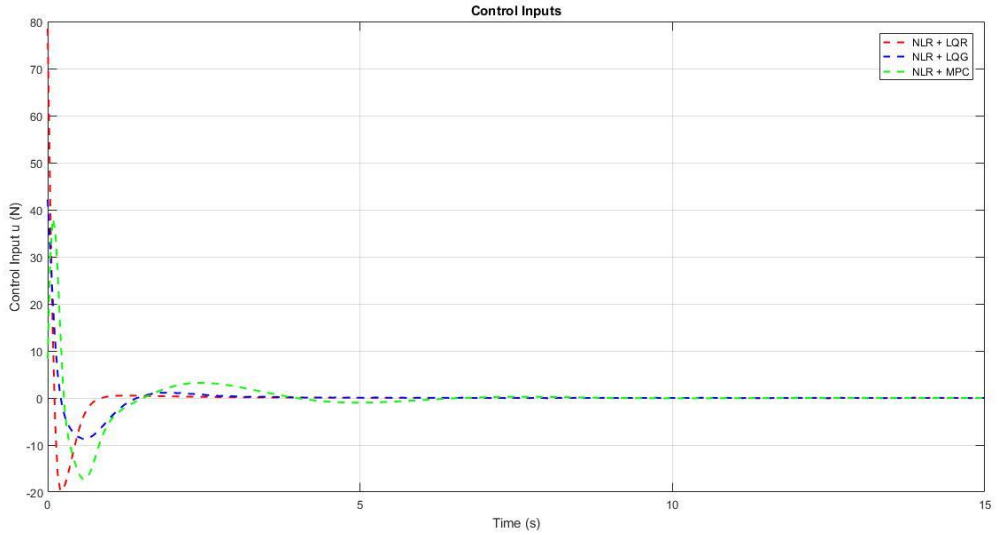
يجب أولا التمييز بين القيم المتنبأ بها والقيم الحقيقية من خلال اعتبار أن القيم التي يتم التنبؤ بها $\bar{u}$ و $\bar{x}$ ، ويكون مؤشر الأداء تابع لهذه القيم خلال أفق التنبؤ H_p الذي تم ضبطه مساويا ل 20، وذلك من أجل حساب إشارة التحكم المثلى خلال هذه الفترة. $J = \int_t^{t+H_p} f(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau))\,d\tau$ ، ولكن حل مؤشر الأداء هذا بالنسبة لبارامترات لاخطية صعب جدا، لذا يتم الحصول على نموذج خطي محلي للنظام اللاخطي حول عدة نقاط تشغيل، من خلال إيجاد مصفوفات جاكوبيان A_i, B_i حول نقاط التشغيل هذه كما في NLQG. يتم تطبيق طرق التحكم الأمثل LMPC, NLQR,NLQG وتكون نتائج المحاكاة مبينة بالأشكال (8) الذي يمثل زاوية النواس والشكل (9) الذي يمثل إزاحة العربة والشكل (10) الذي يمثل إشارة التحكم



الشكل (8): زاوية ميل النواس عن الشاقول عند تطبيق NLQR,NLQG,LMPC



الشكل (9): إزاحة العربة عند تطبيقNLQR,NLQG,LMPC



الشكل (10): إشارة التحكم عند تطبيقNLQR,NLQG,LMPC

وتكون نتائج المحاكاة مبينة بالجدول (5)

الجدول (5): نتائج تطبيق NLQR , NLQG , LMPC

	NLQR	NLQG	LMPC
Rise time (s)	0.10	0.194	0.150
Overshoot %	0.01	0.03	0.117
زمن الاستقرار Ts (s)	1.36	2.88	6.185
زمن التنفيذ (s)	49.070513	49.284867	53.741312

نلاحظ أن النظام استقر بقيم مقاربة جدا لدراسته بحالته الخطية، مع ملاحظة ارتفاع زمن التنفيذ وذلك بسبب عمليات تحويل النظام من لاخطي إلى خطي عند نقاط التشغيل.

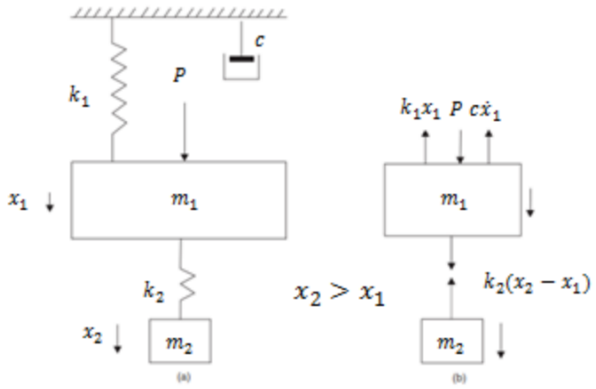
- **نظام الكتلة نابض مخمد Mass–Spring–Damper (MSD)**

تستخدم أنظمة **الكتلة–النابض–المخمّد (MSD)** في العديد من التطبيقات، مثلا ما نراه في الأنظمة الروبوتية من مكوّنات مرنة يمكن نمذجتها باستخدام نموذج MSD لتنفيذ مهام التشغيل المطلوبة، ولتقييم الأحمال الناتجة عن قفز الإنسان.[24] يعاني هذا النوع من الأنظمة من مشكلة الاهتزاز أي هي مهتزة بطبيعتها، وهدف التحكم هو تقليل الاهتزاز ما أمكن يتألف النظام من كتلتين ونابضين ومخمد كما موضح بالشكل (11) الذي يمثل النظام والقوى المطبقة عليه [24]

تكون الكتلة الأولى متصلة بجدار ثابت عبر نابض بمعامل صلابة k_1 نيوتن/متر، ومخمّد بمعامل تخميد c نيوتن·ثانية/متر. وترتبط الكتلتان معًا بواسطة نابض بمعامل صلابة k_2 نيوتن/متر. تُطبَّق القوة الداخلية P نيوتن على الكتلة الأولى.

يفترض النموذج أن النوابض والمخمد خطية، وأن وزن النابض مهمل. يتحرك النظام بخط مستقيم في اتجاه محاور النوابض والمخمد.

متغيرات الحالة في النظام هي: الإزاحة x_1 و x_2 و السرعة $\dot{x}_1 , \dot{x}_2$ لكل كتلة، والهدف هو التحكم في إزاحة الكتلة الثانية x_2 عندما تتعرض الكتلة الأولى لقوة p



الشكل (11) نظام الكتلة - النابض - المخمد MSD [24]

وتكون معادلات النظام بناء على الدراسة المرجعية [24]

$$m_1\ddot{x}_1 = p + k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1 - c\dot{x}_1 \quad (45)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) \quad (46)$$

من المعادلتين السابقتين نحصل على

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1}p - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1}\right)x_1 - \frac{c}{m_1}\dot{x}_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 \quad (47)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2}{m_2}x_2 \quad (48)$$

يتم تمثيل النظام وفق فضاء الحالة تبعا للمعدلة (1) باعتبار متغيرات الحالة $[x_1, \dot{x}_1 x_2, \dot{x}_2]$ والمصفوفات A, B كالتالي:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1}\right) & -\frac{c}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وتكون بارامترات النظام مبينة بالجدول (6)

الجدول (6): بارامترات نظام MSD

الكتلة الأولى	الكتلة الثانية	معامل صلابة النابض الأول	معامل صلابة النابض الثاني	معامل التخميد
250 kg	50 kg	16 N/m	160 N/m	1.5 Ns/m

تطبيق LQR

كما ذكرنا سابقا، الهدف من التحكم هو جعل مؤشر الأداء $J = \int_0^\infty [x^TQx + u^TRu]dt$ أصغر ما يمكن بتم إيجاد القيمة الصغرى لمؤشر الأداء وبالتالي الحصول على إشارة التحكم المثلى وفق قانون التحكم الخطي $u = -Kx$ حيث K هي مصفوفة الربح الخلفي والتي تحسب من المعادلة $K = R^{-1}B^TP$ حيث P مصفوفة موجبة التحديد يتم الحصول عليها من معادلة ريكاتي $A^TP + PA^T + Q - PBR^{-1}B^TP = 0$

تم اختيار المصفوفة $Q = \text{diag}([55.8\ 14.4\ 36.82\ 20.12])$ و $R = 0.018$ بناء على الدراسة المرجعية [24]

تطبيق LQG

يتم تطبيق LQGعلى النظام بعد إضافة ضجيج القياس وضجيج العملية فيصبح تمثيل النظام بالصيغة التالية

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + v(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + w(t)$$

حيث w,v ضجيج النظام والقياسات على التوالي، هو ضجيج غوسي أبيض. وتكون قيمة كل منهما (4)eye*0.01=v=w، يتم تصميم مرشح كالمان حيث يكون ربح كالمان $L(t) = S(t)C^T(t)W^{-1}(T)$ حيث S مصفوفة موجبة التحديد، يتم الحصول عليها من خلال حل معادلة ريكاتي الجبرية التالية:

$$\dot{S}(t) = A(t)S(t) + S(t)A^T(t) - S(t)C^T(t)W^{-1}(t)C(t)S(t) + V(t)$$

وبعد ذلك يتم تصميم LQR باعتبار مؤشر الأداء التابع لتخمين الحالة التي حصلنا عليها من مرشح كالمان ممثل بالمعادلة

$$J_{lqr} = \int_0^\infty [\hat{x}^T Q\hat{x} + u^T Ru]dt$$

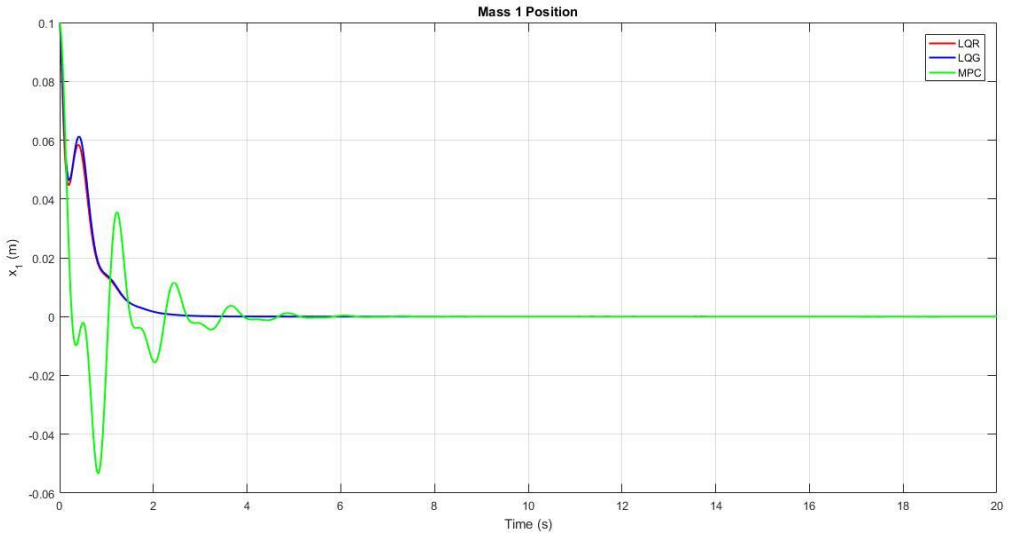
تطبيق MPC

أولا نحسب إشارة الخرج المستقبلي وفق المعادلة

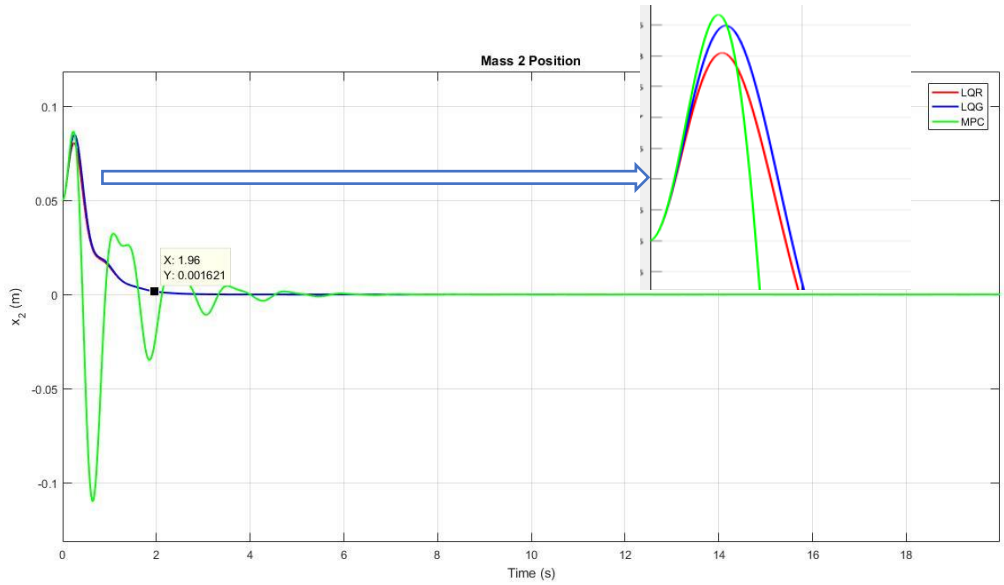
$$\hat{x}(k+1) = A(k)x(k) + B(k)\Delta u(k)$$
$$\hat{y}(k+1) = C(k)\hat{x}(k+1)$$

حيث $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ الفتغير في إشارة التحكم ، بحيث يحقق هذا الخرج المستقبلي القيمة الصغرى لمؤشر الأداء $J = \sum_{K=1}^{H_P} ||\hat{Y}(K+1) - r(k+1)||_Q^2 + ||\Delta u(k+1)||_R^2$ مع اعتماد $r(k+1)$ الخرج المطلوب وفي نظامنا هو صفر أي إيقاف اهتزاز الكتلة الثانية و H_P أفق التنبؤ. في نظامنا هذا تم اعتماد Hp=60، من خلال مؤشر الأداء هذا نحسب إ$\Delta u(k+1)$ ، و من خلال العلاقة $\Delta u(k+1) = u(k+1) - u(k)$، نوجد إشارة التحكم و نرسلها للنظام ، وتستمر العملية على طول أفق التنبؤ.

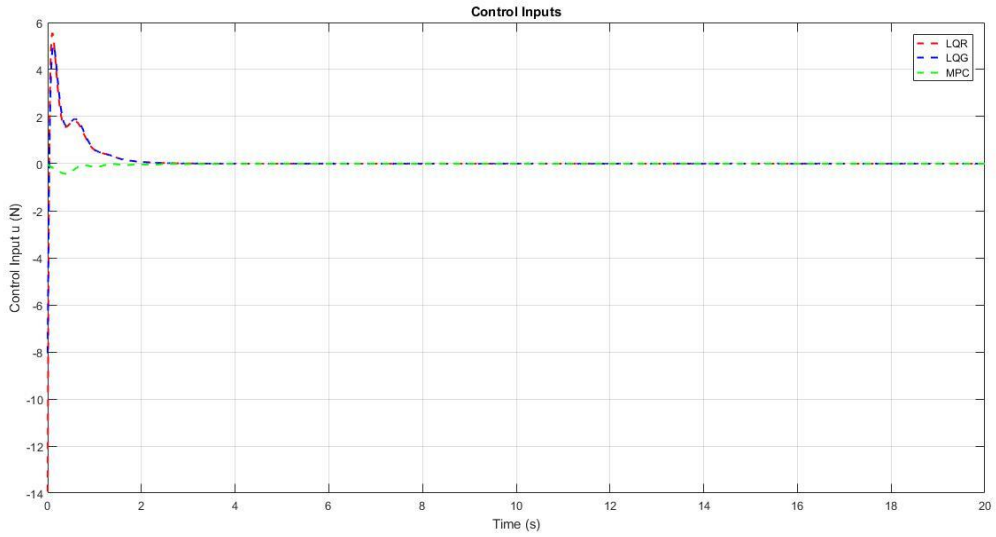
وبأخذ الشروط الابتدائية[0.1.0,0.05,0], تم تطبيق طرق التحكم الأمثل LQR,LQG,MPC.فتكون نتائج المحاكاة مبينة بالأشكال (12) الذي يمثل إزاحة الكتلة الأولى والشكل (13) لذي يمثل إزاحة الكتلة الثانية وهي التي نريد استقرارها والشكل(14) الذي يمثل إشارة التحكم



الشكل (12) إزاحة الكتة الأولى عند تطبيق LQR,LQG,MPC



الشكل (13): إزاحة الكتلة الثانية عند تطبيقLQR,LQG,MPC



الشكل (14) إشارة التحكم عند تطبيقLQR,LQG,MPC

وتكون نتائج المحاكاة وفق الجدول (7)

الجدول (7): نتائج تطبيق LQR,LQG , MPC على نظام MSD

	LQR	LQG	MPC
Rise time (s)	0.9593	0.9466	0.0572
Overshoot %	0.08	0.085	0.086
زمن الاستقرار Ts (s)	1.9734	1.9410	4.3976
زمن التنفيذ (s)	0.057790	0.114923	22.788027

نلاحظ من الجدول (7) أن زمن الاستقرار كان متزايد مقارنة بنظام النواس المقلوب، وهذا أمر طبيعي ناتج من اختلاف طبيعة النظام، حيث أن هذا النظام يعاني من اهتزاز كبير وذو استجابة أبطأ من نظام النواس المقلوب الذي يكون حساس

للتغيرات البسيطة ويفقد استقراره بسرعة كونه غير مستقر بطبيعته، بينما نظام MSD بالمقابل هو مستقر بطبيعته، الأمر الذي يعطي مرونة أكبر بتأخر الاستقرار وبطء الاستجابة. ويمكن ملاحظة أن المتحكم LQGأعطى استجابة مماثلة تماما لاستجابة LQRحتى مع وجود الضجيج، وهذا يؤكد نتائج الدراسة التحليلية التي تقول أن النظم الخطية تعتبر LQG هو الأفضل للتطبيق في الحياة العملية كونه يحقق خصائص LQR من حيث زمن الاستقرار وانخفاض التجاوز الأعظمي مع مقاومة للضجيج لكن مع زمن تنفيذ أكبر ولكن مقبول نسبيا.

نلاحظ أن نتائج المحاكاة للأنظمة الثلاثة التي تم اختيارها بحيث تكون بطبيعة عمل مختلفة ومتطلبات تحكم مختلفة، أكدت نتاج الدراسة التحليلية التي توصلنا إليها، وهي أن المتحكم LQG حقق زمن استقرار قريب جدا من LQR رغم مقاومته للضجيج ولكن مع زمن تنفيذ أكبر بقليل من زمن تنفيذ LQR. وملاحظة أن زمن تنفيذ الطرق اللاخطية أكبر من زمن تنفيذ الطرق الخطية بشكل واضح، وهذا يترتب على تحويل النظام من لاخطي إلى خطي عند نقطة تشغيله.

VIII. الخلاصة والآفاق المستقبلية

تم في هذه الورقة دراسة تحليلية لطرق التحكم الأمثل الأكثر استخداماً في النظم المحددة، وتحديد المزايا والعيوب لكل منها، للمساعدة في اختيار الطريقة المناسبة للنظام المراد تصميم المتحكم له، والهدف (مؤشر الأداء) المطلوب. مع تعزيز النتائج التي تم التوصل إليها من خلال تطبيق طرق التحكم المدروسة المختلفة على عدة أنظمة بمتطلبات تحكم وطبيعة عمل مختلفة. حيث تم التوصل إلى أن LQG هي الطريقة الأقرب للتنفيذ في الحياة العملية كونها تناولت دراسة تأثير الضجيج على النظام وتخلصت منه، مع تأمين استقرار بزمن قصير ودون تجاوز أعظمي.

بناء على ما تم دراسته في هذه الورقة، ينكشف العديد من الأفاق المستقبلية للعمل ضمن مجال التحكم الأمثل، مثل دراسة لطرق التحكم الأمثل في النظم التي تكون بارامتراتها غير معلومة بشكل دقيق أو كامل (غير محددة)، أي الاستفادة من مزايا LQR وLQG والعمل على تطويرها للتمكن من تطبيقها على هذا النوع من النظم، والتعمق في مجال التحكم التنبؤي والعمل على تقليل التعقيد الحسابي للاستفادة من مزاياه.

IX. المراجع العلمية

1. Zhang, D. M., Meng, L., Wang, X. G., & Ou, L. L. (2015). Linear quadratic regulator control of multi-agent systems. Optimal Control Applications and Methods, 36(1), 45-59.
2. Purnawan, H., & Purwanto, E. B. (2017, September). Design of linear quadratic regulator (LQR) control system for flight stability of LSU-05. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 890, No. 1, p. 012056). IOP Publishing.
3. AKTAŞ, M., ALTUN, Y., & EROL, O. (2017). LQR control of liquid level and temperature control for coupled-tank system. In International Conference on Hydraulics and Pneumatics (Vol. 79).
4. Önen, Ü., Çakan, A., & Ilhan, I. (2019). Performance comparison of optimization algorithms in LQR controller design for a nonlinear system, Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences, 27(3), 1938-1953.

5. Xiang, Z., & Wei, W. (2021, June). Design of DC motor position tracking system based on LQR. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1887, No. 1, p. 012052). IOP Publishing.
6. Feng, X., Liu, S., Yuan, Q., Xiao, J., & Zhao, D. (2023). Research on wheel-legged robot based on LQR and ADRC. Scientific reports, 13(1), 15122.
7. Kumar, A., Kasera, S., & Prasad, L. B. (2017, March). Optimal control of 2-link underactuated robot manipulator. In 2017 International Conference on Innovations in Information, Embedded and Communication Systems (ICIIECS) (pp. 1-6). IEEE.
8. Wen Sun, (2021) ,Note on Iterative Linear Quadratic Regulator
9. Li, W., & Todorov, E. (2004). Iterative linear quadratic regulator design for nonlinear biological movement systems, In First International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (Vol. 2, pp. 222-229).
10. Tahir, F., & Ohtsuka, T. (2013). Tuning of Performance Index in Nonlinear Model Predictive Control by the Inverse Linear Quadratic Regulator Design Method, SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration, 6(6), 387–395. https://doi.org/10.9746/jcmsi.6.387
11. Shigematsu, K., Hoshino, H., & Furutani, E. (2024). Iterative Linear Quadratic Regulator With Variational Equation-Based Discretization, arXiv preprint arXiv:2402.11648
12. Rani, M., & Kamlu, S. S. (2025). Optimal LQG controller design for inverted pendulum systems using a comprehensive approach. Scientific Reports, 15(1), 4692
13. Ingabire, A., & Sklyarov, A. A. (2019). Control of longitudinal flight dynamics of a fixedwing UAV using LQR, LQG and nonlinear control. In E3S Web of Conferences (Vol. 104, p. 02001).
14. EDP Sciences.Casspi, S. G., Hüsser, O., Revach, G., & Shlezinger, N. (2023, June). LQGNet: Hybrid model-based and data-driven linear quadratic stochastic control. In ICASSP 2023-2023 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP) (pp. 1-5). IEEE.
15. György, K. (2019). The LQG control algorithms for nonlinear dynamic systems, Procedia Manufacturing, 32, 553-563.
16. Schwenzer, M., Ay, M., Bergs, T., & Abel, D. (2021). Review on model predictive control: An engineering perspective, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 117(5), 1327-1349.
17. Rawlings, J. B., Mayne, D. Q., & Diehl, M. (2017). Model predictive control: theory, computation, and design (Vol. 2). Madison, WI: Nob Hill Publishing

18. Fink, M. (2021). Implementation of Linear Model Predictive Control--Tutorial. arXiv preprint arXiv:2109.11986 .
19. Berberich, J., Köhler, J., Müller, M. A., & Allgöwer, F. (2022). Linear tracking MPC for nonlinear systems—Part I: The model-based case. IEEE transactions on automatic control, 67(9), 4390-4405.
20. Igarashi, Y., Yamakita, M., Ng, J., & Asada, H. H. (2020, July). MPC performances for nonlinear systems using several linearization models, In 2020 American Control Conference (ACC) (pp. 2426-2431). IEEE.
21. Li, W., Zhang, X., Wang, Y., & Xie, S. (2024). Comparison of Linear and Nonlinear Model Predictive Control in Path Following of Underactuated Unmanned Surface Vehicles. Journal of Marine Science and Engineering, 12(4), 575
22. Varghese, E. S., Vincent, A. K., & Bagyaveereswaran, V. (2017, November). Optimal control of inverted pendulum system using PID controller, LQR and MPC. In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (Vol. 263, No. 5, p. 052007). IOP Publishing.
23. Prasad, L. B., Tyagi, B., & Gupta, H. O. (2014). Optimal control of nonlinear inverted pendulum system using PID controller and LQR: performance analysis without and with disturbance input. International Journal of Automation and Computing, 11(6), 661-670.
24. Al-Khazraji, H., & Rasheed, L. T. (2021). Performance evaluation of pole placement and linear quadratic regulator strategies designed for mass-spring-damper system based on simulated annealing and ant colony optimization. Journal of Engineering, 27(11), 15-31.