طريقة مقترحة لحل مسألة البرمجة الكسرية الخطية مجالية القيمة

*عدنان الخدام. **حمدو النجار.

(الإيداع: 15 شباط 2024، القبول: 6 حزيران 2024)

الملخص:

تقدم هذه الورقة البحثية طريقة مقترحة لحل نموذج مسألة البرمجة الكسرية الخطية مجالية القيمة (IVLFP)، والتي تأخذ في الاعتبار التغيير وعدم الاستقرار في البيانات التي تصل متخذ القرار.

بمقارنة الطريقة المقترحة مع طرائق الحل الموجودة تبين أن الطريقة المقترحة مجدية وقادرة على حل مسألة البرمجة الكسرية الخطية مجالية القيمة بفاعلية.

الكلمات المفتاحية: البرمجة الكسرية، البرمجة الكسرية مجالية القيمة، طريقة السيمبلكس

* طالب دراسات عليا (ماجستير)–قسم الرياضيات–كلية العلوم–جامعة حلب

** أستاذ دكتور–قسم الرياضيات–كلية العلوم جامعة حلب

A proposed method for solving interval valued linear fractional programming problem

[1] Adnan Al-Khaddam. **Hamdo Al-Najjar.

(Received: 15 February 2024, Accepted: 6 June 2024)

Abstract

This research paper presents a proposed method for solving the interval-valued linear fractional programming problem IVLFP, which takes into consideration change and instability in the data that reaches the decision maker.

By comparing the proposed method with existing solution methods, it turns out that the proposed method is feasible and capable of solving the interval valued linear fractional programming problem effectively.

Keywords: linear fractional programming, interval valued linear fractional programming, simplex method.

[1] postgraduate Student (MSc), Dept. of Mathematics, Faculty of science, University of Aleppo

**Prof., Dept. of Mathematics, Faculty of science, University of Aleppo

1–مقدمة: Introduction

تعتبر مسألة البرمجة الكسرية الخطية (Linear Fractional Programming) (LFP) تعميماً لمسألة البرمجة الخطية الكلاسيكية (Linear Programming) (LP)، وهي فرع من فروع البرمجة الرياضية والتي تهتم بإيجاد القيمة المثلى للنسبة بين تابعين خطيين، خاضعة لمجموعة من القيود الخطية. تم تطوير البرمجة الكسرية الخطية في البداية عن طريق عالم الرياضيات الهنغاري بيلا مارتوس (Martos, 1960) تحت مسمى البرمجة الزائدية (Hyperbolic programming)، في الواقع نماذج البرمجة الكسرية الخطية لها قدرة كبيرة على تمثيل القضايا التي تثيرها مسائل الحياة الواقعية في العديد من المجالات مثل الهندسة والاقتصاد والإدارة. مما دفع العديد من الباحثين لتطوير طرائق متعددة لحل مسألة البرمجة الكسرية الخطية مثل طريقة السيمبلكس و التحويلات الخطية والشبكات العصبونية الذكية. (Xiao, 2010) (Stancu–Minasian, 1997) (Charnes&Cooper, 1962).

ومع ذلك، قد تكون بعض هذه المسائل غير دقيقة وذلك بسبب النقص أو الضبابية في المعلومات الذي ينتج من معالجة المسائل العملية (مثل التغير اللحظي في اسعار المواد)، لذلك عند نمذجة هذه المسائل ستنتج لدينا بعض المعاملات غير المحددة بدقة والتي يمكن التعبير عنها على شكل مجالات مغلقة، مسألة البرمجة الكسرية الخطية التي تحتوي معاملات على شكل مجالات مغلقة تدعى مسألة البرمجة الكسرية الخطية مجالية القيمة (Interval Valued Linear Fractional Programming) (IVLFP).

قدم (Effati & Pakdaman, 2012) حل لمسألة البرمجة الكسرية الخطية مع معاملات مجالية القيمة في تابع الهدف، تتطلب طريقة Effati و Pakdaman تشكيل مسألة جديدة مع تابع هدف عبارة عن مجموع تابعين كسريين خطيين.

أيضا قدم (Salary Pour Sharif Abad & Allahdadi & Mishmast Nehi, 2020) طريقة لحل مسألة البرمجة الكسرية الخطية مجالية القيمة حيث يمكن أن تكون جميع معاملات المسألة عبارة مجالات مغلقة، تعتمد الطريقة على تشكيل مسألتين تمثلان الحد الأدنى والأعلى لمجال الحل الأمثل.

توصلنا بهذه الدراسة الى طريقة جديدة مقترحة لحل مسألة البرمجة الكسرية الخطية مجالية القيمة، وذلك عن طريق استخدام مراكز المجالات في تكوين مسألة برمجة كسرية خطية مساعدة وبحل المسألة المساعدة بطريقة السيمبلكس (simplex method) وتعويض الحل الأمثل في تابع هدف المسألة الأصلية حصلنا على مجال الحل الأمثل.

بمقارنة طريقتنا المقترحة مع طريقة Effati و Pakdaman وطريقة Salary Pour Sharif Abad & Allahdadi & Mishmast Nehi تبين أن طريقتنا فعالة وأسهل في التطبيق العملي.

2– أهمية أهداف البحث

تأتي أهمية البحث من أهمية مسألة البرمجة الكسرية الخطية مجالية القيمة التي تمثل بكفاءة العديد من مسائل الأمثلة الاقتصادية والفيزيائية المهمة، مع الإخذ بالإعتبار التغيرات السريعة في البيانات التي تصل متخذ القرار.

يهدف هذا البحث إلى إيجاد طريقة لحل مسألة البرمجة الكسرية الخطية مجالية القيمة ومقارنتها مع الطرائق الموجودة.

3–المواد وطرائق البحث: Materials and Methods

3–1– الأعداد المجالية والعمليات عليها: Interval Numbers and Their Operations

لتكن I مجموعة كل المجالات المغلقة والمحدودة في R. وليكن $A^?, B^? \in I$ حيث $A^? = [a^L, a^U]$ و $B^? = [b^L, b^U]$ تعرف العمليات على I بالشكل التالي:

- $A^? = B^? \Leftrightarrow a^L = b^L, a^U = b^U$
- $A^? + B^? = [a^L + b^L, a^U + b^U]$
- $A^? - B^? = [a^L - b^U, a^U - b^L]$
- $A^? \times B^? = [\min\{a^L b^L, a^L b^U, a^U b^L, a^U b^U\}, \max\{a^L b^L, a^L b^U, a^U b^L, a^U b^U\}]$

- $A^{?} \div B^{?} = [a^L, a^U] \times \left[\frac{1}{b^L}, \frac{1}{b^U}\right]; b^L, b^U \neq 0$
- كل عدد حقيقي $K \in R$ يمكن اعتباره مجال مغلق من الشكل $[k, k] \in I$

(Zhang&Wang&Chen, 2014)

3–2– مسألة البرمجة الكسرية الخطية: Linear Fractional programming Problem

تصاغ مسألة البرمجة الكسرية الخطية في الشكل المصفوفي في الصيغة العامة بالشكل:

$$G(x) = \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} = \frac{C(x)}{D(x)}$$
$$\begin{gathered} s.t \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{gathered} \qquad (1)$$

$$d^T x + \beta > 0, \forall x \in S$$
$$b = (b_1, b_2 \cdots, b_m)^T, A = (A_1, A_2, \cdots, A_n), x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T,$$
$$A_j = \left(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}\right)^T, j = 1,2, \cdots, n;$$

حيث:

x: المتغيرات في دالة الهدف والقيود للنموذج الرياضي.

$c^T = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$: معاملات المتغيرات في بسط دالة الهدف.

$d^T = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$: معاملات المتغيرات في مقام دالة الهدف.

A: مصفوفة معاملات المتغيرات لقيود المسألة.

α و β: أعداد سلمية.

b: شعاع الطرف الأيمن لقيود المسألة.

$S = \{x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ مجموعة الحلول الممكنة غير خالية ومحدودة.

.(Charnes&Cooper, 1962)

3–3– طريقة السيمبلكس لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية.

طور Dantzig (1947) طريقة السيمبلكس لحل مسائل البرمجة الخطية، ثم قام (Martos, 1960) (Martos, 1964) بتحديث طريقة السيمبلكس لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية.

لكي تتمكن طريقة السيمبلكس من حل مسألة البرمجة الكسرية الخطية، يجب أن تكون هذه المسألة في الصيغة القياسية، يتم تحويل مسألة البرمجة الكسرية الخطية إلى الصيغة القياسية كما يلي:

- تحويل جميع المتباينات الى مساواة.
- تحويل جميع متغيرات القرار غير مقيدة الإشارة إلى متغيرات غير سلبية تماما.
- جعل جميع ثوابت الطرف الأيمن للقيود غير سالبة.

المتغيرات المتممة: هي متغيرات إضافية يتم إدخالها في القيود الخطية لتحويلها من قيود عدم مساواة الى قيود مساواة، في النموذج القياسي سيكون للمتغيرات المتممة (Slack variables) دائما معامل صفر في دالة الهدف ومعامل 1 في القيد المقابل.

يتم اضافة متغيرات صناعية (Artificial variables) الى القيود التي تحتوي مساواة أو قيود النوع أكبر من أو تساوي.

المتغيرات الصناعية تضاف لتوليد حل أولي لمسألة البرمجة الرياضية وليس لها أي معنى مادي.

تصاغ مسألة البرمجة الكسرية الخطية في الصيغة القياسية بالشكل:

$$G(x)=\frac{\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=n+1}^{n+m}0x_i+\alpha}{\sum_{j=1}^{n}d_jx_j+\sum_{i=n+1}^{n+m}0x_i+\beta}\to max$$

$$s.t$$

$$s.t\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m\end{cases}\quad(2)$$

$$x_1,x_2,\cdots x_{n+m}\geq 0$$

3-3-1- مبرهنة

لتكن مسألة البرمجة الخطية الكسرية في الصيغة القياسية (2) وليكن المتجه $x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$ حل اساسي ممكن غير متردي لتلك المسألة مع الأساس $B=\{A_{z_1},A_{z_2},\dots,A_{z_m}\}$.

الحل الأساسي الممكن x هو حل أساسي ممكن أمثل لمسألة البرمجة الكسرية اذا وفقط اذا $\delta_j(x)\geq 0,\ j=1,2,3,\cdots,n$.

حيث

- $\delta_j(x)=(\delta'_j-G(x)\delta''_j)$
- $\delta'_j=\sum_{i=1}^{m}c_{z_i}a_{ij}-c_j$
- $\delta''_j=\sum_{i=1}^{m}d_{z_i}a_{ij}-d_j$

(Bajalinov, 2003,)

3-3-2- الشكل العام لطريقة السيمبلكس

1. تحويل مسألة البرمجة الكسرية الخطية الى الشكل القياسي.
2. البحث عن حل أساسي ممكن أولي.
3. اذا كانت كل المتغيرات غير الأساسية x_j، تحقق $\delta_j(x)\geq 0,\forall j\in J_p$، فان الحل الأساسي الحالي هو الأمثل. في حالة وجود دليل واحد j يحقق $\delta_j(x)<0,j\in J_p$ نختار المتغير المناسب لاحضاره الى القاعدة، ندعو هذا المتغير بالمتغير الداخل والمتجه المقابل له A_j المتجه الداخل.
4. احضار المتغير المختار الى الاساس، ثم اعادة حساب $\delta_j(x)$ والعودة إلى 3.

3-3-3- جدول السيمبلكس الابتدائي لمسألة البرمجة الكسرية الخطية:

الجدول رقم (1): جدول السيمبلكس الإبتدائي لمسألة البرمجة الكسرية الخطية

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}	RHS
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	$\cdots$	$\cdots$	1	b_m
$C(x)$	δ'_1	δ'_2	$\cdots$	δ'_n	0	0	$\cdots$	0	
$D(x)$	δ''_1	δ''_2	$\cdots$	δ''_n	0	0	$\cdots$	0	
$G(x)$	$\delta_1(x)$	$\delta_2(x)$	$\cdots$	$\delta_n(x)$	0	0	$\cdots$	0	

للتحقق من الأمثلية باستخدام جدول السيمبلكس يجب أن يكون السطر الأخير يحتوي فقط على قيم أكبر أو تساوي الصفر، إذا كانت هناك قيم سالبة فهذا يعني أن المتغير لم يبلغ قيمته المثلى، إذا كان جدول السيمبلكس غير مثالي فالخطوة التالية هي تحديد عنصر الدوران (pivot element)، نختار المعامل الأكثر سلبية في السطر الأخير ليكن $\delta_k(x)$ العمود الموافق له يكون العمود المحوري (pivot column) والمتغير المقابل له x_k هو المتغير الداخل، يتبقى اختيار السطر المحوري (pivot row).

السطر المحوري يقابل النسبة الأصغر لحاصل قسمة عناصر الطرف الأيمن على عناصر عمود المحور الموجبة $\theta = \min \frac{b_i}{a_{ik}} = \frac{b_r}{a_{rk}} > 0;$، والمتغير المقابل له يكون المتغير الخارج، عندئذ يكون عنصر الدوران a_{rk}، بعد أختيار عنصر الدوران نطبق القواعد التحويلية لطريقة السيمبلكس كالتالي:

نقسم كل عناصر السطر المحوري r على عنصر الدوران $a_{rk} \neq 0$ يصبح عنصر الدوران 1 وجميع القيم المتبقية a_{rj}, b_r للسطر المحوري تصبح، $a_{rj_{new}} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}, j = 1,2, \cdots n,\ b_{r_{new}} = \frac{b_r}{a_{rk}}$.

بقية القيم a_{ij}, b_i للسطور غير المحورية تصبح، $a_{ij_{new}} = a_{ij} - \frac{a_{rj}a_{ik}}{a_{rk}}, b_{i_{new}} = \frac{b_i a_{ik}}{a_{rk}}$.

3–4– مسألة البرمجة الكسرية الخطية مجالية القيمة IVLFP

تصاغ مسألة $IVLFP$ في الصيغة العامة بالشكل:

$$G(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j^{?} x_j + \alpha^{?}}{\sum_{j=1}^{n} d_j^{?} x_j + \beta^{?}} \to Max$$
$$s.t$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{?} x_j \leq b_i^{?} \qquad (3)$$
$$x_j \geq 0$$
$$j = 1, \cdots, n. i = 1, \cdots, m$$

حيث $b_i^{?}, c_j^{?}, d_j^{?}, \alpha^{?}, \beta^{?} \in I$

3–5–طريقة Effati و Pakdaman

3–5–1–ملاحظة: إن طريقة Effati و Pakdaman تقوم بحل مسألة البرمجة الكسرية الخطية مجالية القيمة التي تحوي مجالات مغلقة في تابع الهدف فقط.

لتكن مسألة البرمجة الكسرية الخطية مجالية القيمة التالية:

$$G(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j^{?} x_j + \alpha^{?}}{\sum_{j=1}^{n} d_j^{?} x_j + \beta^{?}} \to Max$$
$$s.t$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (4)$$
$$x_j \geq 0$$
$$j = 1, \cdots, n. i = 1, \cdots, m$$

لنكتب تابع الهدف لمسألة البرمجة الكسرية الخطية مجالية القيمة على الشكل التالي:

$$G(x) = \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} c_j^{L} x_j + \alpha_j^{L}, \sum_{j=1}^{n} c_j^{U} x_j + \alpha^{U}\right]}{\left[\sum_{j=1}^{n} d_j^{L} x_j + \beta_j^{L}, \sum_{j=1}^{n} d_j^{U} x_j + \beta^{U}\right]} \qquad (5)$$

$s.t$

من أجل $\sum_{j=1}^{n} d_j^L x_j + \beta_j^L , \sum_{j=1}^{n} d_j^U x_j + \beta^U \neq 0$ يمكن كتابة تابع الهدف على الشكل التالي:

$$G(x) = \left[\sum_{j=1}^{n} c_j^L x_j + \alpha_j^L , \sum_{j=1}^{n} c_j^U x_j + \alpha^U\right]\left[\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j^U x_j + \beta^U}, \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j^L x_j + \beta_j^L}\right] \quad (6)$$

لنناقش الحالتين الممكنتين التاليتين:

الحالة الأولى: عندما $0 < \sum_{j=1}^{n} d_j^L x_j + \beta_j^L \leq \sum_{j=1}^{n} d_j^U x_j + \beta^U$

A. عندما $0 \leq \sum_{j=1}^{n} c_j^L x_j + \alpha_j^L \leq \sum_{j=1}^{n} c_j^U x_j + \alpha^U$ يكتب تابع الهدف على الشكل:

$$G(x) = \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j^L x_j + \alpha_j^L}{\sum_{j=1}^{n} d_j^U x_j + \beta_j^U}, \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j^U x_j + \alpha^U}{\sum_{j=1}^{n} d_j^L x_j + \beta^L}\right] \quad (7)$$

B. عندما $\sum_{j=1}^{n} c_j^L x_j + \alpha_j^L < 0 < \sum_{j=1}^{n} c_j^U x_j + \alpha^U$ يكتب تابع الهدف على الشكل:

$$G(x) = \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j^L x_j + \alpha_j^L}{\sum_{j=1}^{n} d_j^L x_j + \beta_j^L}, \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j^U x_j + \alpha^U}{\sum_{j=1}^{n} d_j^L x_j + \beta^L}\right] \quad (8)$$

الحالة الثانية عندما: $\sum_{j=1}^{n} d_j^L x_j + \beta_j^L \leq \sum_{j=1}^{n} d_j^U x_j + \beta_j^U < 0$

A. عندما $0 \leq \sum_{j=1}^{n} c_j^L x_j + \alpha_j^L \leq \sum_{j=1}^{n} c_j^U x_j + \alpha^U$ يكتب تابع الهدف على الشكل:

$$G(x) = \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j^U x_j + \alpha_j^U}{\sum_{j=1}^{n} d_j^U x_j + \beta_j^U}, \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j^L x_j + \alpha^L}{\sum_{j=1}^{n} d_j^L x_j + \beta^L}\right] \quad (9)$$

B. عندما $\sum_{j=1}^{n} c_j^L x_j + \alpha_j^L < 0 < \sum_{j=1}^{n} c_j^U x_j + \alpha^U$ يكتب تابع الهدف على الشكل:

$$G(x) = \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j^U x_j + \alpha_j^U}{\sum_{j=1}^{n} d_j^U x_j + \beta_j^U}, \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j^L x_j + \alpha^L}{\sum_{j=1}^{n} d_j^U x_j + \beta^U}\right] \quad (10)$$

مع الأخذ في الإعتبار الحالات السابقة يعطى مجال الحل على الشكل التالي:

$$G(x) = [G^L(x), G^U(x)] \quad (11)$$

يتم الحصول على قيم المتغيرات المثلى عن طريق حل مسألة البرمجة الرياضية التالية:

$$F(x) = G^L(x) + G^U(x) \rightarrow Max$$

$$s.t$$

$$Ax \leq b \quad (12)$$

$$x \geq 0$$

بتعويض الحل الأمثل x^* في (11) نحصل على مجال الحل الأمثل $G(x^*) = [G^L(x^*), G^U(x^*)]$

3–6–طريقة Salary Pour Sharif Abad & Allahdadi & Mishmast Nehi

لتكن مسألة البرمجة الكسرية الخطية مجالية القيمة التالية

$$G(x)=\frac{\sum_{j=1}^{n}c_j^{?}x_j+\alpha^{?}}{\sum_{j=1}^{n}d_j^{?}x_j+\beta^{?}}\rightarrow Max$$
$$s.t$$
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{?}x_j\leq b_i^{?} \qquad (13)$$
$$x_j\geq 0$$
$$j=1,\cdots,n.\ i=1,\cdots,m$$

لنفرض $B_1=\{j: c_j^L\geq 0\}, B_2=\{j: c_j^U\leq 0\}$ يتم الحصول على الحد الأعلى الأمثل والحد الأدنى الأمثل للمسألة الأصلية عن طريق حل المسائل الفرعية التالية على الترتيب:

$$G^U(x)=\begin{cases}\dfrac{\sum_{j\in B_1}c_j^Ux_j+\alpha^U}{\sum_{j=1}^{n}d_j^Lx_j+\beta^L}+\dfrac{\sum_{j\in B_2}c_j^Ux_j}{d_j^Ux_j+\beta^U}, & if\ sign(\alpha^?)=sign(c_j^?); j\in B_1\\ \dfrac{\sum_{j\in B_1}c_j^Ux_j}{\sum_{j=1}^{n}d_j^Lx_j+\beta^L}+\dfrac{\sum_{j\in B_2}c_j^Ux_j+\alpha^U}{d_j^Ux_j+\beta^U}, & if\ sign(\alpha^?)=sign(c_j^?); j\in B_2\end{cases}\rightarrow Max$$

$$s.t$$
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^Lx_j\leq b_i^U, i=1,\cdots,m \qquad (14)$$
$$x_j\geq 0, j=1,\cdots,n$$

$$G^L(x)=\begin{cases}\dfrac{\sum_{j\in B_1}c_j^Lx_j+\alpha^L}{\sum_{j=1}^{n}d_j^Ux_j+\beta^U}+\dfrac{\sum_{j\in B_2}c_j^Lx_j}{d_j^Lx_j+\beta^L}, & if\ sign(\alpha^?)=sign(c_j^?); j\in B_1\\ \dfrac{\sum_{j\in B_1}c_j^Lx_j}{\sum_{j=1}^{n}d_j^Ux_j+\beta^U}+\dfrac{\sum_{j\in B_2}c_j^Ux_j+\alpha^U}{d_j^Lx_j+\beta^L}, & if\ sign(\alpha^?)=sign(c_j^?); j\in B_2\end{cases}\rightarrow Max$$

$$s.t$$
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^Ux_j\leq b_i^L, i=1,\cdots,m \qquad (15)$$
$$x_j\geq 0, j=1,\cdots,n$$

3–7– خطوات الحل المتبعة في الطريقة المقترحة.

1. تشكيل مسألة برمجة كسرية خطية كلاسيكية مساعدة معاملاتها هي مراكز مجالات معاملات مسألة البرمجة الكسرية الخطية مجالية القيمة.
2. حل المسألة المشكلة بطريقة السيمبلكس.
3. تعويض الحل الأمثل الناتج عن طريقة السيمبلكس في تابع الهدف للمسألة الأصلية للحصول على مجال الحل الأمثل.

4– الجانب التطبيقي:

قمنا في هذا القسم باختبار طريقة الحل المقترحة، تم حل أثنتين من المسائل بشكل مفصل لتبيان عمل الطريقة المقترحة وعرضت بقية النتائج على شكل جداول:

4–1–تطبيق:أوجد مجال الحل الأمثل لمسألة $IVLFP$ **التالية:**

$$G(x)=\frac{[3,5]x_1+[1,4]x_2+[7,11]}{\left[\frac{1}{2},2\right]x_1+[1,2]x_2+[4,6]}\rightarrow Max$$

$s.t$

$x_1+3x_2\leq 30$

$-x_1+2x_2\leq 5$

$x_1,x_2\geq 0$

نشكل المسألة المساعدة للمسألة الأصلية:

$$F(x)=\frac{4x_1+2.5x_2+9}{1.25x_1+1.5x_2+5}\rightarrow Max$$

$s.t$

$x_1+3x_2\leq 30$

$-x_1+2x_2\leq 5$

$x_1,x_2\geq 0$

نحول المسألة الى الصيغة القياسية باضافة متغير متمم x_3 للقيد الأول ومتغير متمم x_4 للقيد الثاني.

$$F(x)=\frac{4x_1+2.5x_2+9}{1.25x_1+1.5x_2+5}\rightarrow Max$$

$s.t$

$x_1+3x_2+x_3=30$

$-x_1+2x_2+x_4=5$

$x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$

نحل المسألة بطريقة السيمبلكس:

الجدول رقم (2): جدول الحل الإبتدائي للمسألة 4-1- بطريقة السيمبلكس

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_3	1	3	1	0	30
x_4	-1	2	0	1	5
$C(x)=9$	-4	$-\frac{5}{2}$	0	0	
$D(x)=5$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{2}$	0	0	
$G(x)=\frac{9}{5}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{1}{5}$	0	0	

الجدول رقم (3): التكرار 1 للمسألة 4-1-

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_1	1	3	1	0	30
x_4	0	5	1	1	35
$C(x) = 129$	0	$\frac{19}{2}$	4	0	
$D(x) = \frac{85}{2}$	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	
$G(x) = \frac{258}{85}$	0	$\frac{227}{85}$	$\frac{7}{34}$	0	

جميع عناصر السطر الأخير موجبة وأصفار بالتالي الحل أمثل نعوض الحل الأمثل في تابع الهدف للمسألة الأصلية نجد:

$$x_1^* = 30, x_2^* = 0, G(x^*) = \left[\frac{97}{66}, \frac{161}{19}\right]$$

4-2-تطبيق:أوجد مجال الحل الأمثل لمسألة ***IVLFP*** **التالية:**

$$G(x) = \frac{[20\ ,26]x_1 + [5\ ,5.3]x_2 + [-3\ ,-2]}{[1\ ,3]x_1 + [10\ ,12]x_2 + [1\ ,2.2]} \rightarrow Max$$

$$s.t$$

$$[9\ ,11]x_1 + [-14\ ,-10]x_2 \leq [1.7\ ,2]$$

$$[1\ ,2.2]x_1 + [2.3\ ,4.3]x_2 \leq [4.7\ ,6.1]$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

نشكل المسألة المساعدة للمسألة الأصلية

$$F(x) = \frac{23x_1 + 5.15x_2 - 2.5}{2x_1 + 4x_2 + 1.6} \rightarrow Max$$

$$s.t$$

$$10x_1 - 12x_2 \leq 7$$

$$1.6x_1 + 3.3x_2 \leq 5.4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

بحل المسألة المشكلة بطريقة السيمبلكس نجد $x_1^* = \frac{163}{120}, x_2^* = \frac{44}{45}$

بتعويض الحل في تابع الهدف للمسألة الأصلية نجد

$$G(x^*) = [1.614\ ,3.173]$$

النتائج Results:

الجدول رقم (4): *مجال الحل الأمثل في الطريقة المقترحة مقارنةً مع طريقة*

Effati و Pakdaman

	قيمة تابع الهدف $G(x^*)$ في طريقتنا المقترحة	قيمة تابع الهدف المثلى $G(x^*)$ في طريقة Effati و Pakdaman
$\min G(x) = \frac{7x_1 + x_2 + [0,3]}{3x_1 + 4x_2 + [12,36]}$ $s.t$ $x_1 + x_2 \le 7$ $4x_1 - 9x_2 \le 3$ $x_1 + 2x_2 \ge \frac{3}{2}$ $x_1, x_2 \ge 0$	$\left[\frac{1}{52}, \frac{1}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{52}, \frac{1}{4}\right]$
$\max G(x) = \frac{[3,5]x_1 + [1,4]x_2 + [7,11]}{\left[\frac{1}{2}, 2\right]x_1 + [1,2]x_2 + [4,6]}$ $s.t$ $x_1 + 3x_2 \le 30$ $-x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$	$\left[\frac{97}{66}, \frac{161}{19}\right]$	$\left[\frac{97}{66}, \frac{161}{19}\right]$
$\max G(x) = \frac{[1,2]x_1 + [3,7]x_2 + \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]x_3 + \left[\frac{7}{2}, 4\right]}{\left[\frac{1}{2}, 1\right]x_1 + \left[\frac{3}{4}, 1\right]x_2 + \left[\frac{7}{8}, 2\right]x_3 + \left[\frac{1}{2}, 1\right]}$ $s.t$ $x_1 + 2x_2 - x_3 \le 6$ $-2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 8$ $x_1 + x_2 + x_3 \le 13$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	$\left[\frac{7}{8}, 7.7037\right]$	$\left[\frac{7}{8}, 7.7037\right]$

الجدول رقم (5): المسائل المشكلة للوصول للحل الأمثل بالطريقة المقترحة مقارنةً مع طريقة Effati و Pakdaman

المسألة الأصلية	طريقة Effati و Pakdaman	الطريقة المقترحة
$\min G(x) = \dfrac{7x_1 + x_2 + [0,3]}{3x_1 + 4x_2 + [12,36]}$ $s.t$ $x_1 + x_2 \leq 7$ $4x_1 - 9x_2 \leq 3$ $x_1 + 2x_2 \geq \frac{3}{2}$ $x_1, x_2 \geq 0$	$minF(x) = \dfrac{7x_1 + x_2}{3x_1 + 4x_2 + 36} + \dfrac{7x_1 + x_2 + 3}{3x_1 + 4x_2 + 12}$ $s.t$ $x_1 + x_2 \leq 7$ $4x_1 - 9x_2 \leq 3$ $x_1 + 2x_2 \geq \frac{3}{2}$ $x_1, x_2 \geq 0$	$minF(x) = \dfrac{7x_1 + x_2 + 1.5}{3x_1 + 4x_2 + 24}$ $s.t$ $x_1 + x_2 \leq 7$ $4x_1 - 9x_2 \leq 3$ $x_1 + 2x_2 \geq \frac{3}{2}$ $x_1, x_2 \geq 0$
$\max G(x) = \dfrac{[3,5]x_1 + [1,4]x_2 + [7,11]}{\left[\frac{1}{2}, 2\right]x_1 + [1,2]x_2 + [4,6]}$ $s.t$ $x_1 + 3x_2 \leq 30$ $-x_1 + 2x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$	$maxF(x) = \dfrac{3x_1 + x_2 + 7}{2x_1 + 2x_2 + 6} + \dfrac{5x_1 + 4x_2 + 11}{\frac{1}{2}x_1 + x_2 + 4}$ $s.t$ $x_1 + 3x_2 \leq 30$ $-x_1 + 2x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$	$maxF(x) = \dfrac{4x_1 + 2.5x_2 + 9}{1.25x_1 + 1.5x_2 + 5}$ $s.t$ $x_1 + 3x_2 \leq 30$ $-x_1 + 2x_2 \leq 5$ $x_1, x_2 \geq 0$
$\max G(x) = \dfrac{[1,2]x_1 + [3,7]x_2 + \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]x_3 + \left[\frac{7}{2}, 4\right]}{\left[\frac{1}{2}, 1\right]x_1 + \left[\frac{3}{4}, 1\right]x_2 + \left[\frac{7}{8}, 2\right]x_3 + \left[\frac{1}{2}, 1\right]}$ $s.t$ $x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 6$ $-2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 8$ $x_1 + x_2 + x_3 \leq 13$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$MaxF(x) = \dfrac{x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{2}}{x_1 + x_2 + 2x_3 + 1} + \dfrac{2x_1 + 7x_2 + \frac{5}{2}x_3 + 4}{\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{7}{8}x_3 + \frac{1}{2}}$ $s.t$ $x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 6$ $-2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 8$ $x_1 + x_2 + x_3 \leq 13$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$MaxF(x) = \dfrac{1.5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3.75}{0.75x_1 + 0.875x_2 + \frac{23}{16}x_3 + 0.75}$ $s.t$ $x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 6$ $-2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 8$ $x_1 + x_2 + x_3 \leq 13$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

الجدول رقم (6): مجال الحل الأمثل في الطريقة المقترحة مقارنةً مع طريقة

Nehi Salary Pour Sharif Abad&Allahdadi&Mishmast

المسألة الأصلية	طريقة *Salary Pour Sharif Abad& Allahdadi&Mishmast Nehi*	الطريقة المقترحة
$\dfrac{[20, 26]x_1 + [5, 5.3]x_2 + [-3, -2]}{[1, 3]x_1 + [10, 12]x_2 + [1, 2.2]} \rightarrow Max$ $s.t$ $[9, 11]x_1 + [-14, -10]x_2 \leq [1.7, 2]$ $[1, 2.2]x_1 + [2.3, 4.3]x_2 \leq [4.7, 6.1]$ $x_1, x_2 \geq 0$	$[1.1437, 3.9378]$	$[1.2550, 3.9024]$
$\dfrac{[2.6, 2.8]x_1 + [3.2, 4.1]x_2 + [-5, -4]x_3 + [-3.2, -3]}{[1.3, 2.8]x_1 + [2.4, 4.9]x_2 + [5, 6]x_3 + [1, 2]}$ $\rightarrow Max$ $s.t$ $[7, 7.3]x_1 + [-9, -6]x_2 + [5.2, 5.8]x_3 \leq [4, 6.9]$ $[6, 7.7]x_1 + [5, 6.2]x_2 + [2.1, 3.5]x_3 \leq [6.8, 8.6]$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$[-0.4051, 1.0875]$	$[0.0577, 0.5689]$

الجدول رقم (7): المسائل المستخدمة للوصول لمجال الحل الأمثل بالطريقة المقترحة مقارنةً مع طريقة Salary Pour Sharif Abad& Allahdadi& Mishmast Nehi

المسألة الأصلية	طريقة Salary Pour Sharif Abad& Allahdadi& Mishmast Nehi	الطريقة المقترحة
$\frac{[20,26]x_1+[5,5.3]x_2+[-3,-2]}{[1,3]x_1+[10,12]x_2+[1,2.2]} \to Max$ $s.t$ $[9,11]x_1+[-14,-10]x_2 \le [1.7,2]$ $[1,2.2]x_1+[2.3,4.3]x_2 \le [4.7,6.1]$ $x_1,x_2 \ge 0$	$MaxG^U(x)=\frac{26x_1+5.3x_2}{x_1+10x_2+1}+\frac{-2}{3x_1+12x_2+22}$ $s.t$ $9x_1-14x_2 \le 2$ $x_1+2.3x_2 \le 6.1$ $x_1,x_2 \ge 0$ $MaxG^L(x)=\frac{20x_1+5x_2}{3x_1+12x_2+2.2}+\frac{-3}{x_1+10x_2+1}$ $s.t$ $11x_1-10x_2 \le 1.7$ $2.2x_1+4.3x_2 \le 4.7$ $x_1,x_2 \ge 0$	$\frac{23x_1+5.15x_2-2.5}{2x_1+4x_2+1.6} \to Max$ $s.t$ $10x_1-12x_2 \le 7$ $1.6x_1+3.3x_2 \le 5.4$ $x_1,x_2 \ge 0$
$\frac{[2.6,2.8]x_1+[3.2,4.1]x_2+[-5,-4]x_3+[-3.2,-3]}{[1.3,2.8]x_1+[2.4,4.9]x_2+[5,6]x_3+[1,2]} \to Max$ $s.t$ $[7,7.3]x_1+[-9,-6]x_2+[5.2,5.8]x_3 \le [4,6.9]$ $[6,7.7]x_1+[5,6.2]x_2+[2.1,3.5]x_3 \le [6.8,8.6]$ $x_1,x_2,x_3 \ge 0$	$MaxG^U(x)=\frac{2.8x_1+4.1x_2}{1.3x_1+2.4x_2+5x_3+1}+\frac{-4x_3-3}{2.8x_1+4.9x_2+6x_3+2}$ $7x_1-9x_2+5.2x_3 \le 6.9$ $6x_1+5x_2+2.1x_3 \le 8.6$ $x_1,x_2,x_3 \ge 0$ $MaxG^L(x)=\frac{2.6x_1+3.2x_2}{2.8x_1+4.9x_2+6x_3+2}+\frac{-5x_3-3.2}{1.3x_1+2.4x_2+5x_3+1}$ $s.t$ $7.3x_1-6x_2+5.8x_3 \le 4$ $7.7x_1+6.2x_2+3.5x_3 \le 6.8$ $x_1,x_2,x_3 \ge 0$	$\frac{2.7x_1+3.65x_2-4.5x_3-3.1}{2.05x_1+3.65x_2+5.5x_3+1.5} \to Max$ $s.t$ $7.15x_1-7.5x_2+5.5x_3 \le 5.45$ $6.85x_1+5.6x_2+2.8x_3 \le 7.7$ $x_1,x_2,x_3 \ge 0$

5–الاستنتاجات Conclusions:

1. إن استخدام المعاملات مجالية القيمة في مسألة البرمجة الكسرية الخطية يعطي لنا حلولا غير محددة بدقة وهذه الحلول تحاكي الواقع بشكل جيد حيث تأخذ في الاعتبار معظم التغيرات التي قد تحدث في بيئة العمل مما يساعد الشركات والمنشآت في تفادي خسائر محتملة.
2. تمكنت الطريقة المقترحة من تقديم حلول مطابقة لطريقة Effati و Pakdaman دون الحاجة الى تشكيل تابع هدف معقد مما يجعل طريقتنا المقترحة أكثر فاعلية في التطبيق العملي.
3. تمكنت الطريقة المقترحة من الوصول الى مجال الحل الأمثل بسهولة وكلفة أقل من طريقة Salary Pour Sharif Abad& Allahdadi& Mishmast Nehi نظراً لحاجة الطريقة إلى حل مسألتين معقدتين للوصول إلى مجال الحل الأمثل.

6–التوصيات Recommendations:

1. استخدام الطريقة المقترحة في حل مسائل البرمجة الكسرية الخطية مجالية القيمة.
2. تعميم الطريقة من أجل مسائل البرمجة الكسرية غير الخطية مجالية القيمة.

7–المراجع: References:

1. Martos, B. (1960) Hyperbolic Programming, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences. Hungarian Academy of Sciences, 5, 386–407.
2. Stancu-Minasian, I. M. (1997). *Fractional Programming: Theory, Methods and Applications*. Springer Netherlands.
3. Xiao, L. (2010). Neural Network Method for Solving Linear Fractional Programming. In *2010 International Conference on Computational Intelligence and Security (CIS)*. IEEE. https://doi.org/10.1109/cis.2010.15
4. Charnes, A., and Cooper, W.W. (1962) Programming with Linear Fractional Functionals. Naval Research Logistics Quarterly, 9, 181-186. http://dx.doi.org/10.1002/nav.3800090303
5. Effati, S., & Pakdaman, M. (2012). Solving the Interval-Valued Linear Fractional Programming Problem. *American Journal of Computational Mathematics*, *02*(01), 51–55. https://doi.org/10.4236/ajcm.2012.21006.
6. Salary Pour Sharif Abad, F., Allahdadi, M., & Mishmast Nehi, H. (2020). Interval linear fractional programming: optimal value range of the objective function. *Computational and Applied Mathematics*, *39*(4). https://doi.org/10.1007/s40314-020-01308-2
7. Dantzig, G.B. (1947) Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities. In: Koopmans, T.C., Ed., Activity Analysis of Production and Allocation, Wiley & Chapman-Hall, New York, London, 339-347.
8. Martos, B., Andrew, & Whinston, V. (1964). Hyperbolic programming. *Naval Research Logistics Quarterly*, *11*(2), 135–155. https://doi.org/10.1002/nav.3800110204
9. Zhang, H.-y., Wang, J.-q., & Chen, X.-h. (2014). Interval Neutrosophic Sets and Their Application in Multicriteria Decision Making Problems. *The Scientific World Journal*, *2014*, 1–15. https://doi.org/10.1155/2014/645953
10. Bajalinov, E. B. (2003). *Linear-Fractional Programming Theory, Methods, Applications and Software*. Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9174-4