السنة الأولى

جامعة حماة
الكلية التطبيقية

الرياضيات (١)

نظري + عملي (١+٢)

قسم (التغذية + تقانات)

عدد الورق : ١٠

مركز تصوير الكلية التطبيقية (مكتبة البيان للخدمات الطلابية)

0993499617 (يمان)

الفصل الأول

المجموعات

عندما تتصفح قاموسا لغويا مثل "مختار الصحاح" وتنظر مثلا في كلمة "الوجل" فإنك تجد أن المؤلف يعرفها ويفسرها بكلمة رديفة هي "الخوف"، وعندما تنظر في كلمة "الخوف" فإنك تجد أنه يقول إن "الخيفة" و"المخافة" هي بمعنى الخوف، أي أنه لم يعط تفسيرا أو تعريفا لكلمة الخوف لأنه لو عرفها بـ"الوجل" للزم من ذلك الدور، ولو عرفها بـ"الفزع" للزم أن يعرف الفزع ما هو، ومن هنا تبرز الحاجة إلى وجود مفردات معروفة مستقرة في الأذهان يستحيل تعريفها وتستعمل لتعريف غيرها. إن مثل تلك الكلمات موجودة في كل الفنون، تقبل كما هي وتسمى حدودا أولية *Primitive terms*. لا يفهم من ذلك أن تلك الحدود جوفاء لا معنى لها بل لها معنى غير أنه لا يمكن التعبير عنه باستخدام حدود أولية أخرى. وفي الرياضيات يوجد أيضا مفاهيم أو حدود أولية غير قابلة للتعريف مثل النقطة في الهندسة والمجموعة والعنصر والانتماء وغيرها.

(١-١) المجموعة

Set

تعد مفهوم المجموعة في الرياضيات من المفاهيم الأولية غير القابلة للتعريف كما أسلفنا، وهذا المفهوم هو حجر الأساس للبناء الرياضي كله. وفي الرياضيات يشترط أن تكون المجموعة محددة تماما بمعنى أنه يمكن الحكم على أي شيء معطى هل هو ضمن أفراد تلك المجموعة أم لا من غير اختلاف في ذلك الحكم.

إن كل فرد من أفراد المجموعة يسمى عنصرا، وكل فرد أو شيء ليس من ضمن أفراد المجموعة فإننا نقول إنه ليس من عناصرها.

ترميز

عادة نرمز للمجموعات بحروف إنجليزية كبيرة مثل $A,B,C,\ldots$ ، وللعناصر بحروف إنجليزية صغيرة مثل $a,b,c,\ldots$.

الانتماء

إذا كانت A مجموعة وكان a عنصرا منها فإننا نقول إن العنصر a ينتمي إلى المجموعة A ونكتب ذلك رمزيا $a\in A$. أما إذا وجد عنصر b ليس من ضمن عناصر A، فإننا نقول إن العنصر b لا ينتمي إلى المجموعة A ونكتب ذلك رمزيا بالشكل $b\notin A$.

طرق التعبير عن مجموعة

هناك ثلاث طرق تستخدم غالبا للتعبير عن مجموعة معينة :

(أ) طريقة سرد العناصر

وذلك عندما يكون عدد عناصر المجموعة A منتهيا بحيث يمكننا كتابة جميع العناصر فإننا نكتب $A=\{.,.,.,...\}$ ونضع العناصر بين الفواصل مستخدمين للمجموعة الأقواس الموضحة فقط .

مثال (١-١)

لتكن A مجموعة الأعداد الزوجية المحصورة بين 1 و 11 فإن :

$$A=\{2,4,6,8,10\}$$

(ب) طريقة الصفة أو الصفات المميزة

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون عناصر المجموعة A تتمتع بصفات لا يتمتع بها سواها فتكون هذه الصفات محددة تماما لتلك العناصر، والشكل العام لكتابة مجموعة باستخدام الصفات المميزة هو $A=\{x:P(x)\}$ حيث $P(x)$ خاصية أو خصائص تحدد عناصر A بالضبط .

مثال (١-٢)

نستطيع كتابة المجموعة A في المثال (١-١) باستخدام الصفات المميزة كما يلي :

$$A=\{x:1\le x\le 11, x \text{ عدد زوجي}\}$$

وهي المجموعة السابقة نفسها إلا أنه اختلف أسلوب التعبير عنها .

مثال (١-٣)

اكتب المجموعة $\{x:x^2+3x+2=0\}$ التي هي جزء من مجموعة الأعداد الصحيحة وذلك بطريقة سرد العناصر .

الحل

بما أن الأعداد التي تحقق المعادلة (الشرط) $x^2+3x+2=0$ هي فقط $-1,-2$ فإن :

$$A=\{-1,-2\}$$

(ج) طريقة التسلسل النمطي

وتستخدم إذا كان عدد العناصر كبيرا أو غير منته ، فمثلا عندما نريد أن نكتب مجموعة الأعداد الفردية الموجبة فإننا نكتب $O=\{1,3,5,...\}$ ليدل ذلك على جميع الأعداد الفردية الموجبة، وعندما نريد كتابة الأعداد الأولية المحصورة بين 1 ، 99 فإننا نكتب $A=\{2,3,5,7,...,97\}$.

ويلاحظ في هذا المثال أننا زدنا كتابة العناصر صراحة حتى يتبين التسلسل المقصود ، فحينما نكتب مثلا المجموعة :

$$B=\left\{\frac{1}{n},\frac{1}{2n},\frac{1}{3n},\ldots,\frac{1}{100n}\right\}$$

فإن كل قارىء يدرك أن $\frac{1}{70n} \in B$ بينما $19n \notin B$ وذلك من خلال هذا التسلسل النمطي .

عدد عناصر مجموعة

نرمز لعدد عناصر المجموعة A بالرمز $|A|$ ، ولدينا حالتان : إما أن يكون عدد عناصر A منتهيا بحيث يكون عدد العناصر يساوي عددا كلياً n ، وعندها نكتب $|A|=n$ ، والحالة الأخرى أن يكون عدد عناصر A غير منته، وعندها نكتب $|A|=\infty$.

مثال (١-٤)

إذا كان $A=\{x: x$ عدد طبيعي$\}$ ، $B=\{x: x$ أحد حروف كلمة "السعودية"$\}$ فأوجد $|A|$، $|B|$.

الحل

$|A|=\infty$ لأن عدد عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية غير منته .

$|B|=8$ لأن عدد حروف كلمة "السعودية" ثمانية .

الاحتواء

نقول إن المجموعة A تحتوي المجموعة B أو (المجموعة B محتواة في المجموعة A) إذا كان كل عنصر من عناصر B ينتمي إلى A ونكتب ذلك رمزيا بالشكل $B \subseteq A$.

ملاحظات

(١) قولنا إن المجموعة B محتواه في المجموعة A نعبر عنه أحيانا بقولنا إن B مجموعة جزئية من A .

(٢) إذا كانت $B \subseteq A$ بحيث يوجد على الأقل عنصر في A لا ينتمي إلى B فإننا نقول إن B مجموعة جزئية فعلية من A ونكتب ذلك $B \subset A$.

(٣) إذا كانت $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ فإننا نقول إن المجموعتين A ، B متساويتان ، ونكتب ذلك $A=B$.

مثال (١-٥)

إن مجموعة الدول العربية هي مجموعة جزئية من مجموعة دول العالم ، ولكن العكس غير صحيح .

مثال (١-٦)

إن مجموعة النقاط الواقعة على المستقيم $x+y=1$ هي مجموعة جزئية من مجموعة نقاط المستوى ، ولكن العكس غير صحيح .

مثال (١-٧)

إذا كانت $A=\{x: x$ عدد أولي زوجي$\}$ وكانت $B=\{x:(x-2)^2=0\}$ فإن $A=B=\{2\}$.

المجموعة الخالية

المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر تسمى المجموعة الخالية ويرمز لها بالرمز ϕ أو $\{\}$.

نظريـــة

(١) المجموعة الخالية مجموعة جزئية من أي مجموعة .

(٢) المجموعة الخالية وحيدة .

البرهـان

(١) نفرض العكس، أي يوجد مجموعة A بحيث $\phi \not\subset A$ وهذا يؤدي إلى أن ϕ تحتوى عنصرا لا ينتمي إلى A وهذا يناقض كون ϕ خالية . إذن الفرض خاطىء وعليه فإن النظرية صحيحة .

(٢) نفرض العكس، أي يوجد مجموعتان خاليتان مختلفتان ϕ_1, ϕ_2 ، ومن الفرع الأول نجد أن $\phi_1 \subseteq \phi_2$ لأن ϕ_1 مجموعة خالية فهي جزئية من أي مجموعة ، وكذلك $\phi_2 \subseteq \phi_1$ لأن ϕ_2 مجموعة خالية أيضا، ومن تعريف تساوى مجموعتين (انظر ملاحظة (٣) من الملاحظات السابقة) نجد أن $\phi_1 = \phi_2$ ، وهذا يناقض الفرض مما يثبت صحة النظرية .

مجموعة القوة لمجموعة A

وهي مجموعة جميع المجموعات الجزئية من المجموعة A ونرمز لها بالرمز $\mathcal{P}(A)$ وتسمى مجموعة القوة للمجموعة A .

مثال (١-٨)

لتكن $A = \{1, 2, 3\}$. اكتب عناصر $\mathcal{P}(A)$.

الحل

$$\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$$

ملاحظات

(١) عناصر $\mathcal{P}(A)$ هي المجموعات الجزئية من A .

(٢) في مثال (١-٨)، $|\mathcal{P}(A)| = 2^3$ وذلك لأن $|A| = 3$ ، وبشكل عام فإنه إذا كانت $|A| = n$ فإن $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$. (للإثبات انظر مثال (٥-٤)) .

مثال (١-٩)

$\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}$ ونلاحظ أن $\mathcal{P}(\phi) \neq \phi$ كما نلاحظ أن $|\phi| = 0$ وأن $|\mathcal{P}(\phi)| = 2^0$. فهي تحقق ما ورد في الملاحظة الثانية من الملاحظات السابقة .

مجموعات الأعداد

مجموعات الأعداد ستعالج بشيء من التفصيل لاحقا غير أننا سنذكر تعريف المجموعات التي سوف نتعامل معها مع ذكر رمزها المتعارف عليه :

مجموعة الأعداد الطبيعية : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

مجموعة الأعداد الكلية: $\mathbb{W} = \{0,1,2,3, \ldots\}$.

مجموعة الأعداد الزوجية: $\mathbb{E} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\}$.

مجموعة الأعداد الفردية: $\mathbb{O} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots\}$.

مجموعة الأعداد الصحيحة : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

مجموعة الأعداد النسبية (القياسية) : $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}, b \neq 0, a, b \in \mathbb{Z}\}$.

والعدد النسبي هو العدد الذي يمكن كتابته على صورة بسط ومقام كلاهما عدد صحيح والمقام مختلف عن الصفر، ومن أمثلة ذلك

$$\frac{3}{2}, \frac{-7}{8}, 6 = \frac{6}{1}, 1.3 = \frac{13}{10}, 0 = \frac{0}{1}, \sqrt{\frac{4}{49}} = \frac{2}{7}$$

ومن خواص العدد النسبي أنه يمكن تمثيله ككسر عشري منته أو دوري (انظر البند (٢-٣)).

مجموعة الأعداد غير النسبية : $\mathbb{I}$ وهي مجموعة الأعداد التي إذا مثلت تمثيلا عشريا فإن ما بعد الفاصلة العشرية لا ينتهي ولا يدور، أي أنها مجموعة الأعداد التي لا يمكن أن تأخذ الصورة النسبية .

مثال (١-١٠)

يمكن إثبات أن العددين التاليين غير نسبيين $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{16}{17}}$ (انظر البند (٢-٤)).

مجموعة الأعداد الحقيقية ، ويمكن وصفها كما يلي:

$$\mathbb{R} = \{a.a_0a_1a_2a_3 \ldots : a_i \in \{0,1,2,3,\ldots,9\}, a \in \mathbb{Z}\}$$

أي أن مجموعة الأعداد الحقيقية : هي مجموعة الأعداد النسبية وغير النسبية .

مجموعة الأعداد المركبة : وتعرف كما يلي : $\mathbb{C} = \{a + ib : i = \sqrt{-1} \quad , a, b \in \mathbb{R}\}$ ، وهي أكبر مجموعة عددية، وسيرد في الفصل الثامن مزيد من التفصيل لمجموعة الأعداد المركبة .

(١-٢) جبر المجموعات

Algebra of Sets

سنعرف الآن بعض العمليات الشهيرة على المجموعات :

(١) التقاطع

لتكن A ، B مجموعتين ، نعرف تقاطع هاتين المجموعتين بأنه مجموعة العناصر المشتركة بين A و B ونرمز لهذه المجموعة بالرمز $A \cap B$ ورمزيا نعرف التقاطع كما يلي :

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad and \quad x \in B\}$$

مثال (١-١١)

لتكن $A = \{4, 7, 10, 13, \ldots\}$ و $B = \{2, 4, 6, 10, \ldots\}$ ، فإن : $A \cap B = \{4, 10, 16, 22, \ldots\}$.

مثال (١-١٢)

لتكن $A = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ،

$$B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\} = \{\frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$$

فإن $A \cap B = \phi$. وفي مثل هذه الحالة نقول إن المجموعتين A, B منفصلتان .

(٢) الاتحـاد

لتكن A ، B مجموعتين ، فإننا نعرف اتحاد هاتين المجموعتين بأنه مجموعة العناصر التي تنتمي إلى إحداهما على الأقل ونرمز لهذه المجموعة بالرمز $A \cup B$ ورمزيا نعرف الاتحاد كما يلي :

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad or \quad x \in B\}$$

مثال (١-١٣)

إذا كانت $A = \{a, b, c, d, e\}$ ، $B = \{a, g, h\}$ ، $C = \{c, e, h\}$

فأوجد $A \cup B$ ، $A \cap (B \cup C)$ ، $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

الحل

$$B \cup C = \{a, c, e, g, h\} \quad , \quad A \cup B = \{a, b, c, d, e, g, h\},$$

$$A \cap (B \cup C) = \{a, c, e\}$$

$$A \cap B = \{a\} \quad , \quad A \cap C = \{c, e\} \quad \Rightarrow \quad (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{a, c, e\}$$

ومن ذلك نلاحظ أن : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. وهذه النتيجة صحيحة لأي ثلاث مجموعات A, B, C .

مثال (١-١٤)

$\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ وذلك لأن $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

مثال (١-١٥)

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

(٣) الفرق

لتكن A ، B مجموعتين ، نعرف الفرق بين A ، B الذي نرمز له بالرمز $A-B$ بأنه مجموعة عناصر A التي لا تنتمي إلى B أي أن:

$$A-B=\{x: x\in A \quad and \quad x\notin B\}$$

إن عملية الفرق ليست إبدالية أي أن : $A-B\neq B-A$ بشكل عام والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال (١-١٦)

إذا كانت : $\{x$ يقبل القسمة على $3,10\}$ و $A=\{x\in\mathbb{N}: x\leq 10\}$ $B=\{3^n: n=1,2,3\}$

فأوجد A ، B بطريقة سرد العناصر ، ثم أوجد $A-B$ ، $B-A$ واستنتج أن $A-B\neq B-A$.

الحل

$$A=\{3,6,9\} \quad , \quad B=\{3,9,27\}$$

$$A-B=\{6\} \quad , \quad B-A=\{27\} \quad \text{إذن} \quad A-B\neq B-A$$

تمرين

إذا كانت $A-B=\phi$ ، فماذا تستنتج ؟

(٤) الفرق التناظري

لتكن A ، B مجموعتين ، نعرف الفرق التناظري بين A ، B الذي نرمز له بالرمز $A\,\Delta\,B$ كما يلي

$$A\,\Delta\,B=(A-B)\cup(B-A)$$

مثال (١-١٧)

في مثال (١-١٦)، نرى أن $A\,\Delta\,B=\{6,27\}$.

مثال (١-١٨)

الفرق التناظري لمجموعتي الأعداد النسبية وغير النسبية يعطي مجموعة الأعداد الحقيقية كاملة . (وضح ذلك!).

تمرين

إذا كانت $A\,\Delta\,B=\phi$ فماذا نستنتج ؟

المجموعة الشاملة والمتممة

إذا كان لدينا في دراسة ما عدد من المجموعات فإن أي مجموعة تحتوي كل المجموعات التي لدينا تصلح أن تكون مجموعة شاملة ، ولكن يجب في كل مثال اختيار مجموعة واحدة فقط وتثبيتها .

مثال (١-١٩)

إذا كان لدينا المجموعات التالية : $A=\{2,5,7\}$ ، $B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ،

$C=\{x\in\mathbb{N}:x\le 14\}$ فإن المجموعة $U=\{1,2,3,\ldots,15\}$ – مثلا – يمكن تحديدها وتثبيتها على أنها هي المجموعة الشاملة في هذا المثال ، وسنرى أنه في كل مثال تحدد المجموعة الشاملة U أولا بحيث تكون جميع المجموعات التي لدينا محتواة فيها .

تعريف

لتكن U مجموعة شاملة $A\subseteq U$ ، فإن متممة A هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى U ولا تنتمي إلى A ونرمز لمتممة A بالرمز A^c وتعرف رمزيا كما يلي :

$$A^c=\{x\in U:x\notin A\}=U-A$$

مثال (١-٢٠)

لتكن $\mathbb{W}$ هي المجموعة الشاملة فإن $\mathbb{N}^c=\{0\}$ لأن $\mathbb{W}\text{-}\mathbb{N}=\{0\}$.

ملاحظـة

إن أي عنصر في المجموعة الشاملة U لا يخلو من إحدى حالتين إما أن ينتمي إلى المجموعة A أو ينتمي إلى A^c ولذلك يمكننا كتابة القاعدة التالية لأي مجموعة :

$$A\cup A^c=U$$

مثال (١-٢١)

إذا كانت $U=\{1,2,3,\ldots,10\}$ وكانت $A=\{x\in U:x=2^n,n\in\ \mathbb{N}\ \}$ ، فإن $A=\{2^1,2^2,2^3\}$,
$A^c=\{1,3,5,6,7,9,10\}$.

ملاحظة

باعتبار $\mathbb{R}$ هي المجموعة الشاملة فإن مجموعة الأعداد غير النسبية تساوي $\mathbb{Q}^c$ ، ولذلك فإن هذا الرمز يقوم مقام $\mathbb{I}$ فيما يلي.

من خواص العمليات على المجموعات

سنذكر هنا بعض الخصائص الرئيسة لعمليات التقاطع والاتحاد والمتممة والفرق : لأي ثلاث مجموعات A,B,C من مجموعة شاملة U:

(i) $A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$. "الإبدال"

(ii) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$. "التجميع"

(iii) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. "توزيع الاتحاد على التقاطع والعكس"
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(iv) $A\subseteq A\cup B, A\cap B\subseteq A$

(v) $A\cup A=A, A\cap A=A$. "عدم النمو"

(VI) $\phi^c = U, U^c = \phi$.

(VII) $(A^c)^c = A$.

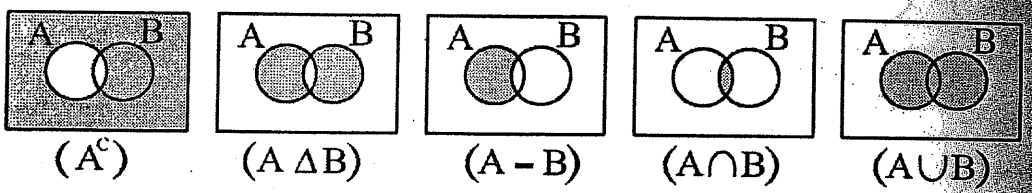
أشكال فن :

إن من المناسب أن نذكر هنا تمثيلا شكليا للمجموعات لتوضيح العلاقات بينها ، غير أن هذا التمثيل لا يتخذ – عادة – برهانا على صحة تلك العلاقات : نمثل المجموعة الشاملة U بمستطيل ونرسم داخله المجموعة A على شكل دائرة ، ثم نرسم المجموعة الأخرى B على شكل دائرة تتقاطع مع A ثم نظلل المنطقة المطلوبة ونسمى الشكل الناتج شكل فن على نحو ما يرد في الأمثلة التالية

مثال (١-٢٢)

باستخدام أشكال فن ، ظلل المجموعات التالية : $A^c, A \Delta B, A - B, A \cap B, A \cup B$

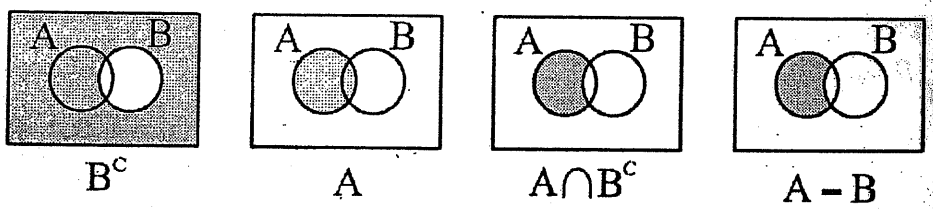
الحل



مثال (١-٢٣)

وضح صحة العلاقة التالية بأشكال فن $A - B = A \cap B^c$

الحل



ونلاحظ التشابه بين تمثيل كل من $A - B,\ A \cap B^c$.

قانونا ديمورجان

لتكن $A,\ B$ مجموعتين لهما المجموعة الشاملة U.

فإن: $(i)\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, $(ii)\ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

ملاحظة

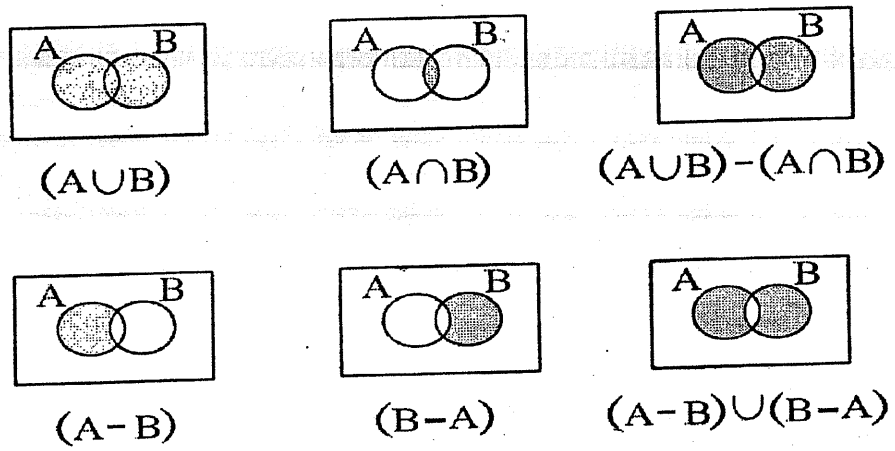
يمكن تعميم قانوني ديمورجان إلى أكثر من مجموعتين . (انظر تمرين ٩ من تمارين الفصل الخامس) .

مثال (١-٢٤)

بأشكال فـن وضح أن التساوي التالي قائم :

$$(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$$

الحل



ونلاحظ التشابه بين الناتجين .

(١-٣) التطبيقات

Mappings

الضرب الديكارتي

تعريف

لتكن A, B مجموعتين ، نعرف حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة A في المجموعة B الذي نرمز له بالرمز $A\times B$ كما يلي : $A\times B=\{(a,b): a\in A, b\in B\}$.

ملاحظة

الرمز (a,b) يسمى زوجا مرتبا مركبته الأولى من المجموعة A ومركبته الثانية من المجموعة B ويعرف رياضيا كما يلي : $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$.

مثال (١-٢٥)

إذا كانت $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{r,t\}$ فإن :

$$A\times B=\{(1,r),(2,r),(3,r),(1,t),(2,t),(3,t)\}$$

$$B\times A=\{(r,1),(r,2),(r,3),(t,1),(t,2),(t,3)\}$$

ثالثاً: خواص العمليات على المجموعات:

1. $A \cap A = A$, $A \cap \phi = \phi$
2. $A \cap B = B \iff B \subseteq A$.
3. $A \cap B = \phi \iff A$, B منفصلتين
4. $A \cup A = A$
5. $A \cup \phi = A$
6. $A \cup B = B \iff A \subseteq B$.
7. $\phi \cap \phi = \phi \cup \phi = \phi$
8. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
9. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
10. $A \setminus \phi = A$
11. $\phi \setminus A = \phi$
12. $A \setminus B = \phi$ if $A \subseteq B$.
13. $A \setminus B = A$ if منفصلتين A, B
14. $A \setminus B \neq B \setminus A$ if $A \neq B$.

رابعاً: مجموعات الأعداد:

[1] مجموعة الأعداد الطبيعية: نرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ وهي مجموعة الأعداد الموجبة فقط: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. ما عدا الصفر.

[3] مجموعة الأعداد الصحيحة: نرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$ وهي مجموعة الأعداد الموجبة والسالبة بما فيها الصفر.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

[2] مجموعة الأعداد النسبية (العادية): نرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}$ ، وهي مجموعة الأعداد الكسرية والتي تكون على صورة بسط على مقام مقامه مختلف:

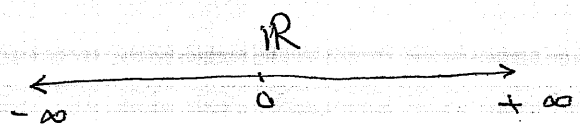
$$\mathbb{Q} = \left\{ x ; x = \frac{\alpha}{\beta} ; \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \wedge \beta \neq 0 \right\}.$$

$$\mp \frac{5}{2} = \mp 2.5$$

[4] مجموعة الأعداد الغير عادية: وهي مجموعة الأعداد الغير منطقية والغير دورية أي هي كل عدد لا يمكن كتابته على شكل كسر بسطه ومقامه صحيح ومقامه لا يساوي

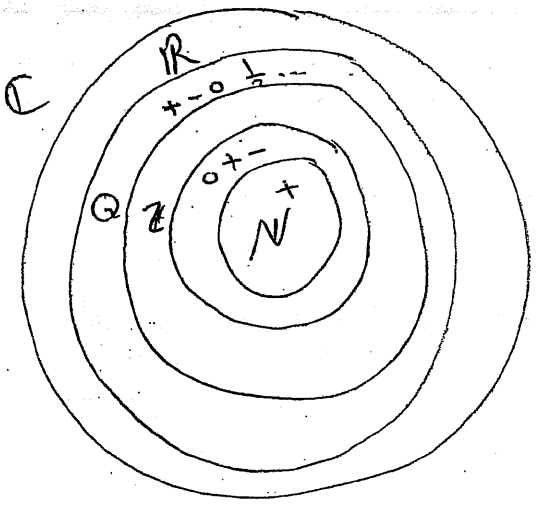
١) مجموعة الأعداد الحقيقية : وهي بالتعريف اجتماع مجموعة الأعداد العادية وغير عادية ونرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$ أي هي كل الأعداد على المحور الحقيقي :

مثل : $7, -5, \frac{1}{2}, 4, 9$



٢) مجموعة الأعداد المركبة (العقدية - التخيلية) : وهي بالتعريف :

$$\mathbb{C} = \{ a + ib \ ; \ a, b \in \mathbb{R} \wedge i = \sqrt{-1} \}.$$



٣) خواص مجموعة الأعداد الحقيقية :

a. بين أي عددين حقيقيين يوجد عدد غير منته من الأعداد العادية ويوجد عدد غير منته من الأعداد غير العادية.

b. كل عدد حقيقي يمكن تمثيله بعدد عشري دوري أو لانهائي.

c. عمليات الضرب والجمع تبديلية وتجميعية في $\mathbb{R}$.

d. جميع العمليات الأربعة (الجمع، الطرح، الضرب، القسمة) مغلقة في $\mathbb{R}$.

e. المتراجحة : $a < b$ ، تمثل على المحور الحقيقي حيث b تقع دائماً على يمين a.

وتقرأ a أصغر تماماً من b أو b أكبر تماماً من a.

f. المتراجحة : $a \leq b$: حيث b تنطبق أو تقع على يمين a على المحور الحقيقي وتقرأ b أكبر أو تساوي a أو a أصغر أو تساوي b.

مثل:

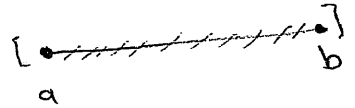
* $4 \leq 6 \Rightarrow \frac{4}{2} \leq \frac{6}{2} \Rightarrow 2 \leq 3.$

$12 \leq 24 \Rightarrow \frac{12}{-2} \geqslant \frac{24}{-2} \Rightarrow -6 \geqslant -12.$

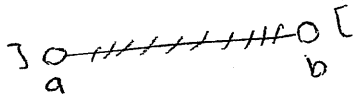
خامساً: المجالات (الفترات):

نفرض: $a, b \in \mathbb{R}$ عددان حقيقيان نسمي المجموعات الجزئية التالية من $\mathbb{R}$:

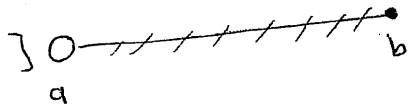
1. $[a, b]$ ونسمى مجال مغلق ونعرفها بالمجموعة: $\{x ; a \leq x \leq b\}$



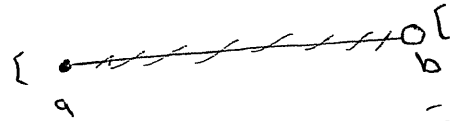
2. $]a, b[$ ونسمى مجال مفتوح ونعرفه بالمجموعة $\{x ; a < x < b\}$



3. $]a, b]$ ونسمى مجال نصف مفتوح - - $\{x ; a < x \leq b\}$



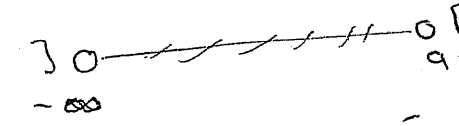
4. $[a, b[$ ونسمى مجال نصف مفتوح - - $\{x ; a \leq x < b\}$.



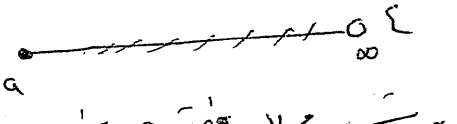
5. $]a, \infty[$ ونسمى مجال مفتوح غير محدود من الأعلى $\{x ; a < x < \infty\}$ أو $\{x ; a < x\}$

6. $]-\infty, a[$ ونسمى مجال مفتوح غير محدود من الأدنى $\{x ; -\infty < x < a\}$

أو $\{x ; x < a\}$.



7. $[a, \infty[$ ونسمى مجال نصف مغلق غير محدود من الأدنى $\{x ; a \leq x < \infty\}$.



8. $]-\infty, \infty[$ ونسمى مجال مفتوح غير محدود من الأدنى ومن الأعلى $\{x ; -\infty < x < \infty\}$

٩- خواص المتراجحات :

١- إن إضافة أو طرح أي عدد لطرفي المتراجحة لا يؤثر على جهة الم

$$a \leq b \Leftrightarrow a+c \leq b+c$$
$$a \leq b \Leftrightarrow a-d \leq b-d.$$

مثل :

$$7 \leq 11 \Rightarrow 7+3 \leq 11+3 \Rightarrow 10 \leq 14$$

$$7 \leq 11 \Rightarrow 7-6 \leq 11-6 \Rightarrow 1 \leq 5.$$

٢- لنقل حدا من أحد طرفي المتراجحة إلى الطرف الثاني نغير إشارته هذا كل

$$a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq b-a.$$

مثل :

$$3 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq 4-3 \Rightarrow 0 \leq 1$$

٣- إذا ضرب طرفي متراجحة بعدد موجب تماما لا يؤثر على جهة المتراجحة بينما ضرب طرفي متراجحة بعدد سالب تماما يغير جهة المتراجحة :

$$a \leq b \wedge \lambda \in \mathbb{R}^{*+} \Rightarrow \lambda a \leq \lambda b.$$
$$a \leq b \wedge \lambda \in \mathbb{R}^{*-} \Rightarrow \lambda a \geq \lambda b.$$

مثل :

* $13 \leq 21 \Rightarrow 13 \times 3 \leq 21 \times 3 \Rightarrow 39 \leq 63.$

* $13 \leq 21 \Rightarrow 13(-3) \geq 21(-3) \Rightarrow -39 \geq -63$

٤- إذا قسمنا طرفي المتراجحة على عدد موجب تماما لا تتغير جهة المتراجحة بينما إذا قسمنا طرفي المتراجحة على عدد سالب تماما تغير جهة المتراجحة :

$$a \leq b \wedge \lambda \in \mathbb{R}^{*+} \Rightarrow \frac{a}{\lambda} \leq \frac{b}{\lambda}$$
$$a \leq b \wedge \lambda \in \mathbb{R}^{*-} \Rightarrow \frac{a}{\lambda} \geq \frac{b}{\lambda}$$

معلومات هامة:

1. $]a,b[\subset [a,b]$
2. $[a,a] = \{a\}$
3. $]a,a[= \emptyset$
4. $]0,\infty[= \mathbb{R}^{*+}$
5. $]-\infty,0[= \mathbb{R}^{*-}$
6. $[0,\infty[= \mathbb{R}^{+}$
7. $]-\infty,0] = \mathbb{R}^{-}$
8. $]-\infty,0[\cup]0,\infty[= \mathbb{R}^{*}$
9. $]-\infty,\infty[= \mathbb{R}$

سادساً: القيمة المطلقة:

* تعريف القيمة المطلقة:

$$|x| = \begin{cases} +x & \text{if } x > 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

مثال:

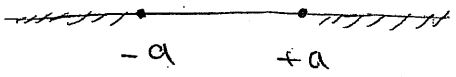
$|27| = 27$, $|-23| = 23$.

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

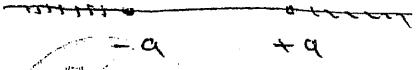
$|x-3| < 0 \Leftrightarrow$ لا توجد قيمة لـ x تجعل القيمة المطلقة سالبة أبداً وهي تساوي الصفر.

* خواص القيمة المطلقة:

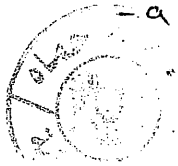
1. $|x\,y| = |x| \cdot |y|$.
2. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq +a$.



3. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$.



1. $||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$



3. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

مثل :

* $|x| < 7 \Rightarrow -7 < x < +7$.

* $|x| \geq 3 \Rightarrow x \geq 3 \quad \vee \quad x \leq -3$.

تمرين : أوجد قيم x التي تحقق المتراجحة : $|3x-2| > 1$

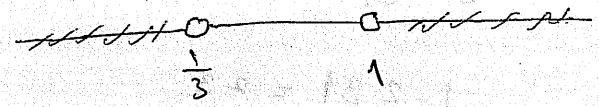
الحل :

$$|3x-2| > 1$$

$$3x-2 > 1 \quad \vee \quad 3x-2 < -1$$

$$3x > 3 \quad \vee \quad 3x < 1$$

$$x > 1 \quad \vee \quad x < \frac{1}{3}$$



أي قيم x هي : $\mathbb{R} - \left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

تمرين : أوجد قيم x المحققة للعلاقة : $|4x-1| = |x+1|$

الحل :

$$\frac{|4x-1|}{|x+1|} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{|4x-1|}{|x+1|} = +1 \quad \vee \quad \frac{|4x-1|}{|x+1|} = -1$$

$$\Rightarrow 4x-1 = x+1 \quad \vee \quad 4x-1 = -x-1$$

$$\Rightarrow 3x = 2 \quad \vee \quad 5x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \quad \vee \quad x = 0$$

أي قيم x هي $\left\{0, \frac{2}{3}\right\}$

تمرين : أوجد قيم x التي تحقق المتراجحة :

$$1 \leq 3x - 5 < 10$$

الحل :

$$1 + 5 \leq 3x < 10 + 5$$ (نضيف 5 إلى طرفي المتراجحة)

$$6 \leq 3x < 15$$

$$\frac{6}{3} \leq x < \frac{15}{3}$$

$$2 \leq x < 5$$

أي قيم x هي : $x \in [2, 5[$

جامعة [illegible]
كلية العلوم التطبيقية
قسم التقنية الحيوية

الواجب الأول
لطلاب التقنية الحيوية المستوى الأول
الفصل الأول للعام 2020/2021

الاسم:
الرقم:

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول: لتكن لدينا المجموعة الكلية (أو الشاملة) Ω

Ω = ℤ (مجموعة الأعداد الصحيحة)

والمجموعات:

$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

$B = \{-4, -2, -1, 3, 5, 10\}$

$C = \{-16, -10, -2, -1, 7, 8\}$

والمطلوب: (1) أوجد،

$A \cap C$, $B \cup \Omega$, Ω', ϕ', $\Omega' \cup \phi'$

A', C', $\mathbb{Z} \cup C'$, $C \cap \mathbb{Z}$

(2) اكتب المجموعة A، Ω بطريقة القاعدة

(3) مثل المجموعات Ω، A، ℝ بخط الأعداد

(4) أجب بصح أو خطأ ثم صحح العبارة الخاطئة

أ) $A \subset B$ _____

ب) $A \cap \Omega = \Omega$ _____

ج) $\phi \subset A$ _____

د) أي عبارة التالية صحيحة؟ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ _____

هـ) $-11 \in C$ و $20 \notin B$ _____

و) $-2 \subset A \cap B$