$y' = e^{x} + \sin x \cdot \cos y$ لست متجانسة : لأن

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{m} f(x, y)$ $\lambda \in \mathbb{R}$

متجانسة من الدرجة m (3

النوع الثاني: ‹المعادلات المتجانسة›

1) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$y' - \frac{y}{x} = \tan\left(\frac{y}{x}\right)$ or $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$ (الشكل العام $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$)

الحل: هذه معادلة متجانسة لأنه إذا عوضنا عن x بـ λx وعن y بـ λy تبقى المعادلة لا تتغير.

$$y' = \frac{\lambda y}{\lambda x} = \tan\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) \rightarrow y' - \frac{y}{x} = \tan\frac{y}{x}$$

نفرض $\frac{y}{x} = u$

$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$; $dy = u\,dx + x\,du$; بالتفاضل: $y' = u + x u'$

$$u + x\frac{du}{dx} = u + \tan u$$

$$\frac{du}{\tan u} = \frac{dx}{x}$$

أصبحت معادلة منفصلة المتغيرات بالتكامل:

$$\ln|\sin u| - \ln|x| = \ln|C| \quad ; C \neq 0$$

$$\ln\left|\frac{\sin u}{x}\right| = \ln|C|$$

$$\sin u = Cx$$

$$\sin\frac{y}{x} = Cx$$

$$y = x \arcsin Cx$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 3\frac{y}{x}}{2\frac{y}{x} + 3}$$

تمرين: بفرض $\frac{y}{x} = u$ نحصل على معادلة منفصلة المتغيرات

مثال آخر: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot y}{x^{2} - y^{2}}$$

الحل: هذه المعادلة متجانسة من الدرجة الثانية ...

$$xy\,dx - (x^{2} - y^{2})\,dy = 0$$

$$y'' + y = -c_1 \cos x - c_2 \sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x \equiv 0$$

ملاحظة (1): نلاحظ أن من المعادلة السابقة أن الحل العام يحوي ثابتين، وبشكل عام فإن حل المعادلة التفاضلية من المرتبة (n) يحوي n ثابتاً اختيارياً.

هذا الحل يسمى/ الحل العام/ للمعادلة التفاضلية، ونحصل على /الحل الخاص/ لها بإعطاء الثوابت قيماً عددية (أي نحصل عليه من الحل العام)، وهكذا فإن الحلول الخاصة لمعادلة تفاضلية لا نهائية

[illegible]

ع تصنيف معادلة تفاضلية، وسنهتم هنا فقط بالمعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى.

[illegible]

"النوع الأول" (المعادلات ذات المتغيرات (المتحولات) المنفصلة) من المعادلات التفاضلية من الشكل

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0 \quad \ldots (2)$$

معادلة ذات متغيرات منفصلة، ولإيجاد حلها نكامل طرفيها مع إضافة ثابت التكامل أي:

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = c$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية (من كتب بذوق):

$$y' = \frac{2y}{x} \quad \text{or} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

الحل: لو كتبناها بالشكل

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

لحصلنا على منفصلة المتغيرات، وبالمكاملة نجد:

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln c \Rightarrow \ln|y| = \ln(cx^2) \quad ; c>0$$

ومنه $y = cx^2$ وهو الحل العام لها، ويحوي ثابتاً واحداً c [illegible]

[illegible] ($y' = c \rightarrow c = \frac{cx}{x} \rightarrow c \equiv c$).

والحل العام يمثل ... إذا:

ومن لو أعطينا $c=3$ مثلاً فإننا نحصل على الحل الخاص $y = 3x^2$ وهكذا ...

مثال: أثبت أن $y = \frac{c}{x-3}$ هو حل عام للمعادلة التفاضلية:

$$y' = \frac{-y}{x-3}$$

مثال آخر: المعادلة التفاضلية $2x\sin y\,dx + (x^2+3)\cos y\,dy = 0$ هي منفصلة المتغيرات [illegible]

الحل: $(x^2+3)\sin y$ [illegible]

(5)

ملاحظة: نلاحظ أننا أضفنا هنا [illegible] قبل الحل العام.

$$U(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - x + e^y = c$$

هنا لاحظنا أننا [illegible] xy مرة واحدة، [illegible] الثابت النهائي c [illegible]
[illegible] الأخرى [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] الحل العام [illegible]:

$$(3x^2 + 2xy)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$$

$M(x,y) \qquad N(x,y)$

$$U(x,y) = x^3 + x^2 y + \frac{1}{3} y^3 = c$$

The End

التابع للمحاضرة الثالثة (تقنيات حاسوب)

13/7/2020

نعوض في المعادلة المعرفة للمتغير عن y و $\frac{dy}{dx}$

$$u + x\cdot\frac{du}{dx} = \frac{u\cdot x^2}{x^2 - u^2x^2} = \frac{u}{1-u^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{x\cdot\frac{du}{dx}} = \frac{u}{1-u^2} - \frac{u(1-u^2)}{1-u^2} = \frac{u - u + u^3}{1-u^2} = \boxed{\frac{u^3}{1-u^2}}$$

نفصل المتغيرات = (المتحولات) نتكامل.

$$\frac{1-u^2}{u^3}\,du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x}$$

للعرض

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + \ln|c|$$

الحل

$$\ln|u\,x\,c| = -\frac{1}{2u^2}$$

بالتعويض عن u نحصل على الحل العام للمعادلة وهي عبارة عن دالة ضمنية

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln|cy|$$

تحوي ثابت واحد لأنها من المرتبة الأولى وهكذا ....

<u>النوع الثالث < المعادلات التامة ></u> تنتج عن عملية التكامل لتفاضل

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

حيث $M(x,y)$ و $N(x,y)$ تابعان لمتغيرين لهما مشتقات جزئية مستمرة في منطقة D من المستوي xoy والمعادلة تامة

<u>إذا تحقق</u> $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ وهو شرط لازم وكاف.

<u>مثال:</u> أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية.

$$\underbrace{(x+y-1)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(e^y+x)}_{N(x,y)}dy = 0$$

نبرهن أولاً.

<u>الحل</u> البرهان هنا

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

فالمعادلة تامة ولإيجاد الحل العام نوجد.

$$\int M(x,y)\,dx = \int (x+y-1)\,dx = \frac{x^2}{2} + yx - x$$

$$\int N(x,y)\,dy = \int (e^y+x)\,dy = e^y + xy$$