

Baraa Homs

حيث:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

* نرسم للمصفوفة السابقة بالرمز $A_n = (a_{ij})$ ونقول إنها مصفوفة

مربعة من المرتبة n .

* تسمى العناصر:

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$$

القطر الرئيسي للمصفوفة أو قطر المصفوفة.

ملاحظة:

إذا كان $n \neq m$ نسمى المصفوفة: مصفوفة مستطيلة.

ونسمى m بعدها الشاقولي ونسمى n بعدها الأفقي.

مثال إضافي:

$$(1) \text{ المصفوفة: } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}_2$$

مربعة من المرتبة الثانية، أي من

$$\text{النمط } 2 \times 2 \text{ (أر 2)}$$

$$(2) \text{ المصفوفة: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}_3$$

مصفوفة مربعة من المرتبة الثالثة، أي

$$\text{من النمط } 3 \times 3 \text{ (أر 3)}$$

$$(3) \text{ المصفوفة: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

مستطيلة من المرتبة 3×2 .

أر (المصفوفات)

تعريف المصفوفة:

المصفوفة هي كائن رياضي يتألف من عناصر مرتبة ضمن جدول مستطيل ذي m سطر و n عمود، وتكتب بالشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

* تسمى المقدار a_{ij} عناصر المصفوفة

A ، حيث:

$$(i = 1, 2, \dots, m) \text{ رقم السطر}$$

$$(j = 1, 2, \dots, n) \text{ رقم العمود}$$

* المقدار a_{ij} يقع في السطر i والعمود j .

حيث: $A = (a_{ij})_{m \times n}$

الدليل الأيسر (i) يدل على رقم السطر.

الدليل الأيمن (j) يدل على رقم العمود.

* مثلاً:

a_{23} يقع في السطر الثاني والعمود الثالث.

a_{32} يقع في السطر الثالث والعمود الثاني.

* نرسم للمصفوفة السابقة بالرمز

$$A_{m \times n} = (a_{ij}) \text{ أو بالرمز } A = (a_{ij})$$

ونقول إن المصفوفة السابقة من

المرتبة $m \times n$.

المصفوفة المربعة:

هي مصفوفة يكون فيها:

$$\text{عدد الأسطر} = \text{عدد الأعمدة}$$

أي أن: $m = n$

$$B_{2 \times 2} = B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(4) المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ هي

مصفوفة مستطيلة من المرتبة 2×4 .

أنواع المصفوفات:

(1) المصفوفة السطرية (وحيدة السطر):

هي مصفوفة مستطيلة ذات المرتبة $(1 \times n)$ أي أن هذه المصفوفة تحوي سطرًا واحدًا و n عمود. وتكتب بالشكل:

$$A = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n]$$

مثال: المصفوفة $A = [2 \ 1 \ 5]$ هي

مصفوفة سطرية من المرتبة 1×3 .

(2) المصفوفة العمودية (وحيدة العمود):

هي مصفوفة مستطيلة ذات المرتبة $(n \times 1)$ أي أن هذه المصفوفة تحوي سطر و عمود واحد. وتكتب بالشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

مثال: المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة

عمودية من المرتبة 4×1 .

(3) المصفوفة وحيدة العنصر:

هي مصفوفة A تتألف من سطر واحد وعمود واحد أي: تتألف من عنصر واحد فقط.

وتكتب بالشكل $A = (a_{11})$.

مثال: المصفوفة $A = (5)$ هي مصفوفة وحيدة العنصر أي من المرتبة 1×1 .

(4) المصفوفة الصفرية:

هي مصفوفة تكون جميع عناصرها أصفار.

$$O_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

مثال:

$$O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(5) المصفوفة القطرية:

هي مصفوفة مربعة من المرتبة n عناصرها التي خارج القطر الرئيسي أصفار.

وتكتب بالشكل:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}_n$$

أو للمسهولة تكتب:

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

مثال: المصفوفة المربعة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

وتكتب بالشكل: $A = \text{diag}(2, 3, -5)$

المصفوفات

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

المصفوفة الواحدة هي حالة خاصة من المصفوفة السلمية وهي حالة خاصة أيضاً من المصفوفة القطرية.

(8) المصفوفة المثلثية:

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي (أو تحته) أصفر.

مثال: المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة مثلثية (علياً) من المرتبة الرابعة.

مثال: المصفوفة:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة مثلثية (دنياً) من المرتبة الثالثة.

(9) المصفوفة المتناظرة:

هي مصفوفة مربعة $A = (a_{ij})$ تحقق الشرط: $a_{ij} = a_{ji}$ وذلك إما كل:

$$i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$a_{12} = a_{21}$$

$$a_{25} = a_{52}$$

وهكذا.

المصفوفة السلمية:

هي مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها الرئيسي تساوي عدداً ثابتاً أما باقي عناصرها أصفر. وتكتب بالشكل:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}_n$$

مثال: المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_3$ هي مصفوفة سلمية وتكتب بالشكل:

$$A = \text{diag}(2, 2, 2)$$

ملاحظة:

المصفوفة السلمية هي حالة خاصة من المصفوفة القطرية.

(7) المصفوفة الواحدة (I_n) :

المصفوفة الواحدة من المرتبة n هي مصفوفة مربعة من المرتبة n بحيث جميع عناصر القطر الرئيسي فيها تساوي (1)، أما بقية العناصر فتساوي أصفر. وتكتب بالشكل:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_n$$

مثال: المصفوفة الواحدة من المرتبة الثانية هي:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_2$$

مثال: المصفوفة الواحدة من المرتبة الثالثة هي:

المصفوفات الجبر

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 0 - 2 \times 3 & 1 \times 1 - 2 \times 4 & 1 \times 2 - 2 \times 5 \\ 3 \times 0 + 4 \times 3 & 3 \times 1 + 4 \times 4 & 3 \times 2 + 4 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -7 & -8 \\ 12 & 19 & 26 \end{bmatrix} = C$$

مثال: أوجد A.B إذا كان:

فإن:

$$A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$A.B = \text{diag}(a_1.b_1, a_2.b_2, \dots, a_n.b_n)$$

(4) إن ضرب مصفوفة سطرية في مصفوفة عمودية يكون معرفاً فقط عندما يكون:

عدد عناصر المصفوفة السطرية مساوياً لعدد عناصر المصفوفة العمودية.

ويكون الجداء مصفوفة (وحيدة العنصر)

ملاحظة: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

في الحالة الخاصة: إذا كان $A.B = B.A$ فإننا نقول أن: A, B متبادلتان.

مثال: أوجد A.B مع العلم أن:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_3$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_3$$

الحل: نلاحظ:

$$A = \text{diag}(3, -3, 5)$$

$$B = \text{diag}(-2, 3, 1)$$

$$A.B = \text{diag}(3 \times -2, -3 \times 3, 5 \times 1) = \text{diag}(-6, -9, 5)$$

أي أن:

$$A.B = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:

* نفرض $A.B = C = (c_{ij})$

* بما أن A من المرتبة 2×3

و B من المرتبة 3×3

فإن C من المرتبة 2×3

$$c_{11} = 2 \times 2 - 1 \times 0 + 1 \times 0 = 4$$

$$c_{12} = 2 \times 1 - 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$$

$$c_{13} = 2 \times (-1) - 1 \times 3 + 1 \times 2 = -3$$

$$c_{21} = 1 \times 2 + 0 \times 0 - 1 \times 0 = 2$$

$$c_{22} = 1 \times 1 + 0 \times 1 - 1 \times 1 = 0$$

$$c_{23} = 1 \times (-1) + 0 \times 3 - 1 \times 2 = -3$$

ومنه:

$$A.B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

خواص عملية ضرب المصفوفات:

(1) في الحالة العامة: ضرب المصفوفات عملية ليست تبديلية.

أي أن: $A.B \neq B.A$

(2) قد يكون جداء مصفوفتين مساوياً مصفوفة صفرية دون أن تكون أيّاً منهما صفرية.

(3) إن ضرب المصفوفات القطرية من المرتبة نفسها هي عملية تبديلية والناتج مصفوفة قطرية عناصرها القطر الرئيسي هي $a_i.b_i$ حيث $(i = 1, 2, \dots, n)$

أي أن:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}_2$$

عند ضرب عناصر القطر الرئيسي بمصفوفة

الجبر

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \\ -1 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة متناظرة، لأن:

$$a_{12} = a_{21} = 3$$

$$a_{13} = a_{31} = -1$$

$$a_{23} = a_{32} = 7$$

تساوي مصفوفتين:

تتساوي مصفوفتان لهما نفس المرتبة، إذا تساوى كل عنصر من إحداهما مع العنصر المقابل له في المصفوفة الأخرى.

أي أن:

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

مثال:

لتكن المصفوفتان:

$$A = \begin{bmatrix} x+y & y-x \\ 2x & 2x+y \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

أوجد x, y مع العلم أن $A=B$.

الحل:

بما أن $A=B$ فرضاً فإن العناصر المتقابلة في المصفوفتين تكون متساوية.

ومنه:

$$\begin{cases} x+y=3 & (1) \\ y-x=1 & (2) \\ 2x=2 & (3) \\ 2x+y=4 & (4) \end{cases}$$

من (3) نجد: $x=1$

نعوض في (4) فنجد: $y=2$

فالجملتان $\{(3), (4)\}$ لهما حل وحيد هو:

$$(x, y) = (1, 2)$$

* نعوض الحل في (1)، فنجد:

$$1+2=3 \text{ محققة}$$

* نعوض الحل في (2)، فنجد:

$$2-1=1 \text{ محققة}$$

* ومنه: $(x, y) = (1, 2)$ حل مشترك

وحيد لمجموعة المعادلات الأربعة.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

العمليات على المصفوفات

أولاً: جمع المصفوفات:

مجموع مصفوفتين $A = (a_{ij})$ و

$B = (b_{ij})$ لهما نفس المرتبة هو مصفوفة

$C = (c_{ij})$ لهما نفس المرتبة، وعناصرها:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

والجمع لا يكون معرفاً إذا اختلفت مرتبتا المصفوفتين.

خواص عملية جمع المصفوفات:

(1) جمع المصفوفات عملية تبديلية.

$$A+B=B+A$$

أي أن:

(2) جمع المصفوفات عملية تجميعية.

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

(3) المصفوفة الصفريّة التي لها نفس

المرتبة هي عنصر حيادي بالنسبة

لجمع المصفوفات. أي أن:

المصفوفات

ثالثاً ضرب المصفوفات:

لتكن المصفوفتين:

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij})$$

* يكون A, B معرفاً إذا تحقق الشرط:

$$\begin{aligned} \text{عدد أعمدة المصفوفة الأولى } A \\ = \text{عدد أسطر المصفوفة الثانية } B \end{aligned}$$

* إذا كانت B, A مصفوفتان مربعتان من نفس المرتبة فإن A, B يكون معرفاً.

* إن جداء المصفوفة $A_{m \times n}$ بالمصفوفة $B_{n \times m}$ هو المصفوفة $C_{m \times m}$ وعناصرها c_{ij} معرفة بالشكل:

(1) العنصر c_{11} هو مجموع حواصل

ضرب عناصر السطر الأول من المصفوفة A في مقابلاتها من عناصر العمود الأول من المصفوفة B . أي أن:

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1r} \cdot b_{r1}$$

(2) العنصر c_{12} هو مجموع حواصل

ضرب عناصر السطر الأول من المصفوفة A في عناصر العمود الثاني من المصفوفة B . أي أن:

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + \dots + a_{1r} \cdot b_{r2}$$

(3) بشكل عام:

العنصر c_{ij} هو مجموع حواصل ضرب

عناصر السطر (i) من المصفوفة A في عناصر العمود (j) من المصفوفة B .

أي أن:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ir} \cdot b_{rj}$$

$$0_{m \times n} + A_{m \times n} = A_{m \times n} + 0_{m \times n} = A_{m \times n}$$

لكل مصفوفة $A = (a_{ij})$ نظير

بالنسبة لعملية جمع المصفوفات وهي $-A = (-a_{ij})$ حيث:

$$A_{m \times n} + (-A_{m \times n}) = (-A_{m \times n}) + A_{m \times n} = 0_{m \times n}$$

ثانياً الضرب بعدد حقيقي:

لضرب عدد حقيقي بمصفوفة نضرب العدد بجميع عناصر المصفوفة.

مثال إضافي:

$$\text{لتكن: } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{عندئذ: } \lambda \cdot A = \begin{bmatrix} 2\lambda & 3\lambda \\ 5\lambda & 7\lambda \end{bmatrix}$$

مثال إضافي:

لتكن المصفوفتان:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

أوجد $A + 2B$

الحل:

$$2B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 10 \\ 4 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A + 2B = \begin{bmatrix} 1+4 & 2+8 & 3+10 \\ 3+4 & 2+10 & 1+12 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A + 2B = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 13 \\ 7 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

ومنه:

المصفوفات الجبر

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 0 - 2 \times 3 & 1 \times 1 - 2 \times 4 & 1 \times 2 - 2 \times 5 \\ 3 \times 0 + 4 \times 3 & 3 \times 1 + 4 \times 4 & 3 \times 2 + 4 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -7 & -8 \\ 12 & 19 & 26 \end{bmatrix} = C$$

مثال: أوجد A.B إذا كان:

فإن:

$$A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$A.B = \text{diag}(a_1.b_1, a_2.b_2, \dots, a_n.b_n)$$

الحل:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

* نفرض $A.B = C = (c_{ij})$

* بما أن A من المرتبة 2×3
و B من المرتبة 3×3
فإن C من المرتبة 2×3

* ومنتها:

$$c_{11} = 2 \times 2 - 1 \times 0 + 1 \times 0 = 4$$

$$c_{12} = 2 \times 1 - 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$$

$$c_{13} = 2 \times (-1) - 1 \times 3 + 1 \times 2 = -3$$

$$c_{21} = 1 \times 2 + 0 \times 0 - 1 \times 0 = 2$$

$$c_{22} = 1 \times 1 + 0 \times 1 - 1 \times 1 = 0$$

$$c_{23} = 1 \times (-1) + 0 \times 3 - 1 \times 2 = -3$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

خواص عملية ضرب المصفوفات:

(1) في الحالة العامة: ضرب المصفوفات عملية ليست تبديلية.

$$A.B \neq B.A$$

(2) قد يكون جداء مصفوفتين مساوياً مصفوفة صفرية دون أن تكون أيّاً منهما صفرية.

(3) إن ضرب المصفوفات القطرية من المرتبة نفسها هي عملية تبديلية والناتج مصفوفة قطرية عناصرها القطر الرئيسي هي $a_i.b_i$ حيث $i = 1, 2, \dots, n$

أي أن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

عند ضرب عناصر القطر الرئيسي بمصفوفة

(4) إن ضرب مصفوفة سطرية في مصفوفة عمودية يكون معرّفاً فقط عندما يكون:

عدد عناصر المصفوفة السطرية مساوياً لعدد عناصر المصفوفة العمودية.

ويكون الجداء مصفوفة (وحيدة العنصر)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: $[3 \ 2]$

في الحالة الخاصة: إذا كان $A.B = B.A$ فإننا نقول أن: A, B متبادلتان.

مثال: أوجد A.B مع العلم أن:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_3$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_3$$

الحل:
نلاحظ:

$$A = \text{diag}(3, -3, 5)$$

$$B = \text{diag}(-2, 3, 1)$$

فتكون:

$$A.B = \text{diag}(3 \times -2, -3 \times 3, 5 \times 1)$$

$$= \text{diag}(-6, -9, 5)$$

أي أن:

$$A.B = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_3$$

إضافي:

مثال إضافي:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \star \text{ منقول}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{هي:}$$

$$B = [1 \ 2 \ 3] \quad \star \text{ منقول}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{هي:}$$

$$C = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad \star \text{ منقول}$$

$$C^T = [a \ b \ c \ d] \quad \text{هي:}$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \star \text{ منقول}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{هي:}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \star \text{ منقول}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{هي:}$$

نتائج:

(1) منقول مصفوفة سطرية هي مصفوفة عمودية.

(2) منقول مصفوفة عمودية هي مصفوفة سطرية.

$$A = [2 \ 1 \ 3]_{1 \times 3}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

أوجد $A.B$, $B.A$ ثم وزن بينهما ماذا تستنتج؟

الحل:

★ نلاحظ: عدد عناصر المصفوفة السطرية مساوياً عدد عناصر المصفوفة العمودية، وبالتالي $A.B$ يكون معرفاً:

$$A.B = [2 \times 4 + 1 \times 5 + 3 \times 6]$$

$$\Rightarrow A.B = [31]$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \cdot [2 \ 1 \ 3]_{1 \times 3}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 4 \times 2 & 4 \times 1 & 4 \times 3 \\ 5 \times 2 & 5 \times 1 & 5 \times 3 \\ 6 \times 2 & 6 \times 1 & 6 \times 3 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 10 & 5 & 15 \\ 12 & 6 & 18 \end{bmatrix}_3$$

★ بالموازنة: $A.B \neq B.A$

نستنتج أن: جداء المصفوفات عملية ليست تبديلية بالحالة العامة.

منقول مصفوفة:

منقول المصفوفة A هي مصفوفة A^T تنتج عن A بأن نبدل الأسطر بالأعمدة والأعمدة بالأسطر بالترتيب ذاته.

(3) إذا كانت B, A مصفوفتين مربعيتين من المرتبة n عندئذ:

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(A.B)^T = B^T.A^T$$

مثال إضافي:

لتكن المصفوفتان:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

تحقق أن:

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad (1)$$

$$(A.B)^T = B^T.A^T \quad (2)$$

الحل:

(1)

$$A+B = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+0 \\ 1+2 & 4+6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A+B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+B)^T = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 2+5 & 1+2 \\ 3+0 & 4+6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T + B^T = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

بالموازنة نجد:

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

(2)

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 \times 5 + 3 \times 2 & 2 \times 0 + 3 \times 6 \\ 1 \times 5 + 4 \times 2 & 1 \times 0 + 4 \times 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A.B = \begin{bmatrix} 16 & 18 \\ 13 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A.B)^T = \begin{bmatrix} 16 & 13 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$$

* نحسب $B^T.A^T$:

$$B^T.A^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^T.A^T = \begin{bmatrix} 5 \times 2 + 2 \times 3 & 5 \times 1 + 2 \times 4 \\ 0 \times 2 + 6 \times 3 & 0 \times 1 + 6 \times 4 \end{bmatrix}$$

$$B^T.A^T = \begin{bmatrix} 16 & 13 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$$

* بالموازنة نجد:

$$(A.B)^T = B^T.A^T$$

محدد مصفوفة مربعة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n .
إن قيمة محدد المصفوفة A ويرمز له
بالرمز $\det(A)$ هو مجموع جداءات كل
عنصر من أي سطر (أو عمود) من A
بالمحدد الأصغري المرافق له.

مثال إضافي:

احسب محدد المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

المصفوفات

(2) تكون A مصفوفة منتظمة عندما:

$$\det(A) \neq 0$$

ومنه:

$$\lambda \neq -2 \quad \text{و} \quad \lambda \neq 1$$

أي أن: A مصفوفة منتظمة عندما $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

مثال: لتكن المصفوفتان:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

اثبت أن A مفردة و B منتظمة.

الحل:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$-24 + 24 = 0$$

ومنه: A مصفوفة مفردة.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 1 - 3 \times (-1) + 2 \times (-3)$$

$$\Rightarrow \det(B) = -1 \neq 0$$

ومنه: B مصفوفة منتظمة.

المصفوفة المساعدة لمصفوفة مربعة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n، فإن:

المصفوفة المساعدة للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز $\text{adj}(A)$ هي منقول المصفوفة

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 4 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1 - 2 \times 8 + 4 \times 1$$

$$\Rightarrow \det(A) = -11$$

المصفوفة الشاذة أو المفردة:

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n. عندئذ:

* نقول أن A شاذة أو مفردة إذا

$$\det(A) = 0$$

* نقول أن A غير شاذة أو منتظمة

$$\det(A) \neq 0$$

مثال إضافي:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{bmatrix}$$

(1) أوجد مجموعة قيم λ كي تكون A مصفوفة مفردة.

(2) أوجد مجموعة قيم λ كي تكون A مصفوفة منتظمة.

الحل:

نحسب محدد المصفوفة:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(A) = \lambda^2 + \lambda - 2$$

(1) تكون A مصفوفة مفردة عندما:

$$\det(A) = 0$$

ومنه:

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\text{إما: } \lambda = -2$$

$$\text{أو: } \lambda = 1$$

أي أن: A مصفوفة مفردة عندما

$$\lambda \in \{-2, 1\}$$

التي عناصرها المحددات الصغرى
المرافقة لعناصر المصفوفة A .

مثال:

أوجد المصفوفة المساعدة للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

* نجد مصفوفة المحددات الصغرى
المرافقة لعناصر المصفوفة A
ولتكن A_1 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* نجد المصفوفة المساعدة للمصفوفة A
وهي منقول A_1 :

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

قضائيا أساسية:

(1) إذا كانت A مصفوفة مربعة من
المرتبة n عندئذ يكون:

$$A \cdot (adj A) = (adj A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$$

(2) إذا كانت A مصفوفة مربعة منفردة
من المرتبة n ، فإن:

$$A \cdot (adj A) = (adj A) \cdot A = 0 \cdot I_n = 0_{n \times n}$$

(3) إن محدد جداء مصفوفتين مربعتين
من المرتبة n يساوي جداء
محدديهما.

أي أن:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

وتعمم هذه الخاصية على أي عدد منته
من المصفوفات المربعة من نفس المرتبة.
(4) إذا تساوى سطران (أو عمودان) في
مصفوفة مربعة A ، فإن:

$$\det(A) = 0$$

(5) إذا تناسب سطران (أو عمودان) في
مصفوفة مربعة A ، فإن:

$$\det(A) = 0$$

(6) إذا بدلنا بين سطرين (أو عمودين)
في مصفوفة مربعة A ، فإن محدد
المصفوفة يغير إشارته.

(7) إن محدد مصفوفة مثلثية A يساوي
جداء عناصر القطر الرئيسي.

أي أن:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

(8) إن محدد مصفوفة A يساوي محدد
منقولها A^T .

أي أن:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

مثال إضافي:

لتكن المصفوفتان:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

(1) أثبت أن A منتظمة و B منفردة. (أرشدك)
(2) أوجد $A \cdot B$

المصفوفات

$$\det(A) \cdot \det(B) = 5 \times 0 = 0 \quad *$$

★ بالموازنة نجد:

$$\boxed{\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)}$$

(4) إيجاد $\text{adj}(A)$:

★ نجد مصفوفة المحددات الصغرى

المرافقة لعناصر المصفوفة A

ولتكن A_1 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} +4 & -3 \\ -1 & +2 \end{bmatrix}$$

★ نجد المصفوفة المساعدة للمصفوفة A

وهي منقول A_1 :

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

(إيجاد $\text{adj}(B)$):

★ نجد مصفوفة المحددات الصغرى

المرافقة لعناصر المصفوفة B

ولتكن B_1 :

$$B_1 = \begin{bmatrix} +6 & -2 \\ -3 & +1 \end{bmatrix}$$

★ نجد المصفوفة المساعدة للمصفوفة B

وهي منقول B_1 :

$$\text{adj}(B) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(5)

★ نجد $A \cdot (\text{adj} A)$:

$$A \cdot (\text{adj} A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-3 & -2+2 \\ 12-12 & -3+8 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A \cdot (\text{adj} A) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A \cdot (\text{adj} A) = 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

(4) أوجد المصفوفة المساعدة للمصفوفة

A والمصفوفة المساعدة للمصفوفة B .

(5) تحقق أن:

$$A \cdot (\text{adj} A) = (\text{adj} A) \cdot A = \det(A) \cdot I_2$$

(6) تحقق أن:

$$B \cdot (\text{adj} B) = (\text{adj} B) \cdot B = 0_{2 \times 2}$$

(7) تحقق أن:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

الحل:

★ (1)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 8 - 3 = 5$$

بما أن $\det(A) \neq 0$ ، فإن A مصفوفة منتظمة.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad *$$

لأن عناصر السطرين الأول والثاني متناسبة.

بما أن $\det(B) = 0$ ، فإن B مصفوفة مفردة (شاذة).

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

(2)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2+2 & 6+6 \\ 3+8 & 9+24 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 11 & 33 \end{bmatrix}$$

(3)

$$\det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 11 & 33 \end{vmatrix}$$

★

$$= 132 - 132 \Rightarrow$$

$$\det(A \cdot B) = 0$$

$$A \cdot (\text{adj } A) = \det(A) \cdot I_2 \dots \textcircled{1}$$

★ نجد $(\text{adj } A) \cdot A$:

$$(\text{adj } A) \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-3 & 4-4 \\ -6+6 & -3+8 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(\text{adj } A) \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(\text{adj } A) \cdot A = 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(\text{adj } A) \cdot A = \det(A) \cdot I_2 \dots \textcircled{2}$$

★ من ① و ② نجد:

$$A \cdot (\text{adj } A) = (\text{adj } A) \cdot A = \det(A) \cdot I_2$$

(7)

★ وجدنا: $\det(A) = 5$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ لدينا: } \star$$

فتكون منقول A هي:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^T) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 8-3 \Rightarrow \det(A^T) = 5$$

★ بالموازنة نجد:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

المصفوفة المعاكسة (المقلوب) لمصفوفة

مربعة:

تعريف:

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n (أربعة - ٤)

نعرف المصفوفة المعاكسة للمصفوفة A

بأنها مصفوفة مربعة من المرتبة n

ونرمز لها بالرمز A^{-1} والتي تحقق:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

حيث: I_n هي المصفوفة الواحدية من

المرتبة n .

ويُعطى مقلوب مصفوفة مربعة غير

منفردة بالعلاقة:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\text{adj } A)$$

مبرهنة:

الشروط اللازمة والكافية ليكون للمصفوفة

المربعة A مصفوفة معاكسة (مقلوب) هو

الواسع في الرياضيات - (الأساس في الرياضيات) - (الأساس في الرياضيات) - (الأساس في الرياضيات)

الواسع في الرياضيات - (الأساس في الرياضيات) - (الأساس في الرياضيات) - (الأساس في الرياضيات)

الواسع في الرياضيات - (الأساس في الرياضيات) - (الأساس في الرياضيات) - (الأساس في الرياضيات)

الواسع في الرياضيات - (الأساس في الرياضيات) - (الأساس في الرياضيات) - (الأساس في الرياضيات)

الواسع في الرياضيات - (الأساس في الرياضيات) - (الأساس في الرياضيات) - (الأساس في الرياضيات)

الواسع في الرياضيات - (الأساس في الرياضيات) - (الأساس في الرياضيات) - (الأساس في الرياضيات)

الواسع في الرياضيات - (الأساس في الرياضيات) - (الأساس في الرياضيات) - (الأساس في الرياضيات)

المصفوفات

فإن:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$$

الواضع في الرياضيات - (الجزء الثاني)

ن يكون محدّد هذه المصفوفة لا يساوي الصفر .
أي أن:

$$\boxed{A \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \text{ لها مقلوب}}$$

مقلوب مصفوفة مربعة غير منفردة من المرتبة الثانية:

لإيجاد مقلوب المصفوفة غير المنفردة:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

نتبع ما يلي:

★ نبادل عناصر القطر الرئيسي .

★ نغيّر إشارات القطر الثانوي .

★ نضرب المصفوفة الناتجة بالعدد

$$\frac{1}{\det(A)}, \text{ فنحصل على } A^{-1}.$$

أي أن:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

مقلوب مصفوفة قطرية غير منفردة:

إن مقلوب مصفوفة قطرية غير منفردة هي مصفوفة قطرية أيضاً، عناصر قطرها الرئيسي هي مقلوبات العناصر المقابلة لها في المصفوفة المفروضة .
أي أن:

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \Rightarrow \\ A^{-1} &= \text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}\right) \end{aligned}$$

أو بتعبير مكافئ:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \text{ إذا كان:}$$

الواضع في الرياضيات - (الجزء الثاني) - المدرّس محمد أحمد (محرّر)

بعض خواص المصفوفة المعاكسة: أ) التكمّل

(1) محدّد المصفوفة المعاكسة يساوي مقلوب محدّد المصفوفة الأصلية .

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}} \text{ أي أن:}$$

البرهان:

لدينا حسب تعريف المصفوفة المعاكسة:

$$A.A^{-1} = I$$

ومنه:

$$\det(A.A^{-1}) = \det(I)$$

$$\Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

(2) إذا كانت A مصفوفة غير منفردة،

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A} \text{ فإن:}$$

(3) إذا كانت A, B مصفوفتين غير منفردتين ولهما نفس المرتبة. فإن:

$$\boxed{(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}}$$

(4) يمكن تعميم الخاصية السابقة على عدد منته من المصفوفات غير المنفردة والتي لها نفس المرتبة:

$$\boxed{(A.B.C.D)^{-1} = D^{-1}.C^{-1}.B^{-1}.A^{-1}}$$

تمرين إضافي:

أوجد مقلوب كل من المصفوفات الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

إيجاد مقلوب A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6$$

$$\Rightarrow \det(A) = -1 \neq 0$$

ومنه A ليست منفردة فيكون لها مقلوب:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

إيجاد مقلوب B:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \text{diag}(3, 5, -1)$$

نلاحظ:

ونلاحظ:

$$\det(B) = 3 \times 5 \times -1 = -15 \neq 0$$

فتكون B ليست منفردة فلها مقلوب:

$$B^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{-1}\right) \Rightarrow$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

إيجاد مقلوب C:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

* نحسب محدد C:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

ننشر حسب السطر الأول:

$$\det(C) = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(C) = -1 - 1 \times 1 + 1$$

$$\Rightarrow \det(C) = -1 \neq 0$$

ومنه C لها مقلوب.

* نجد مصفوفة المحددات الصغرى

المرافقة لعناصر C ولتكن C_1 :

$$C_1 = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

* نجد المصفوفة المساعدة للمصفوفة C

وهي منقول C_1 :

الواسع في الرابضيات - (الجبر)

المدرسين محمد أحمد (مقرر) - الواسع في الرابضيات - (الجبر)

المدرسين محمد أحمد (مقرر) - الواسع في الرابضيات - (الجبر)

المدرسين محمد أحمد (مقرر) - الواسع في الرابضيات - (الجبر)

المدرسين محمد أحمد (مقرر) - الواسع في الرابضيات - (الجبر)

الواسع في الرابضيات - (الجبر)

المدرسين محمد أحمد (مقرر) - الواسع في الرابضيات - (الجبر)

المدرسين محمد أحمد (مقرر) - الواسع في الرابضيات - (الجبر)

المدرسين محمد أحمد (مقرر) - الواسع في الرابضيات - (الجبر)

المدرسين محمد أحمد (مقرر) - الواسع في الرابضيات - (الجبر)

المصفوفات

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{-1}{7}$$

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}}$$

بالموازنة نجد:

(2) نجد مقلوب A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{-1}{7} \end{bmatrix}$$

بما أن:

$$\det(A^{-1}) = \frac{-1}{7} \neq 0$$

فإن A^{-1} لها مقلوب:

$$(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{\frac{-1}{7}} \begin{bmatrix} \frac{-1}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-5}{7} & \frac{-3}{7} \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^{-1} = -7 \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-5}{7} & \frac{-3}{7} \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$$

تمرين إضافي:

لتكن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

تحقق أن: $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

الحل:

* نجد $A.B$:

$$\text{adj}(C) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

* نجد مقلوب C :

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \cdot \text{adj}(C) \Rightarrow$$

$$C^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تمرين إضافي:

لتكن المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

تحقق أن:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad (1)$$

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad (2)$$

الحل:

(1)

$$\det(A) = 3 - 10 \Rightarrow \det(A) = -7 \neq 0$$

ومنه: A لها مقلوب.

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{-1}{7} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{3}{49} - \frac{10}{49}$$

ومنه:

★ نجد $B^{-1} \cdot A^{-1}$:

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -2-1 & 1+1 \\ 4+1 & -2-1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

★ بالموازنة نجد: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

تدريب صفحة 86

لتكن المصفوفات:

$$\frac{1}{86}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

برهن أن $A \cdot B = A \cdot C$

الحل:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 \times (-2) - 6 \times 1 & 3 \times 3 - 6 \times 0 \\ -1 \times (-2) + 2 \times 1 & -1 \times 3 + 2 \times 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} -12 & 9 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1+2 & 1+1 \\ 1+4 & 1+2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

★ نجد مقلوب $A \cdot B$:

$$\det(A \cdot B) = 9 - 10 \Rightarrow$$

$$\det(A \cdot B) = -1 \neq 0$$

ومنه $A \cdot B$ لها مقلوب:

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

★ نجد B^{-1} :

$$\det(B) = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

ومنه B لها مقلوب:

$$B^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

★ نجد A^{-1} :

$$\det(A) = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

ومنه A لها مقلوب:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

نقينا أثر مصفوفة A في مجموعة المصفوفات 2×2 على $\text{Trace } A$

مشتق مستقیم

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \det A = 3 - 0 = 3 \neq 0$$

لذا مشتق معکوس وجود دارد

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \times 0 + 2 \times 0 & 0 \times 1 + 2 \times 0 \\ 0 \times 0 + 0 \times 0 & 0 \times 1 + 0 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 0 & -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\ 0 + 0 & 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

22/6/2020

در

$$|A| = \det A = \Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 + 2 \times 2 \times 0 + 0 \times 3 \times -1 - [(0 \times 1 \times 0) + 1 \times 2 \times -1 + 2 \times 3 \times 5] = 5 - (-2 + 30) = 5 - 28 = -23$$

$$= 5 - (-2 + 30) = 5 - 28 = -23$$

or

$$|A| = \det A = \Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1(5+2) - 2(15-0) = 7 - 30 = -23$$

این است

$$x+y=3$$

$$y-x=1$$

$$x=1, y=2$$

مجموع اعداد صحیح

فصل عملیات حساب

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_u = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_v = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{\Delta_u}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_v}{\Delta} = \frac{0}{2} = 0$$

then $(x, y) = (1, 0)$