الباب الثاني

المحاضرة (5)

المحددات والمصفوفات

درسنا في المحاضرات السابقة التوابع ومشتقاتها وتكاملاتها غير المحدودة والمحدودة وسنتابع في هذه المحاضرة التعرف على بعض المواضيع الرياضية الأخرى كالمعينات وأنواعها والمصفوفات وأنواعها ثم نقوم بدراسة بعض خواصها والعمليات الجبرية المعرفة عليها مع إعطاء بعض الأمثلة.

1. المعينات (المحددات)

المعين هو $n \times n$ عنصرا مرتبة في n سطر و n عمود وموضوعة بين خطين شاقولين من الشكل:

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ويرمز له بشكل مختزل: $\det A = \Delta = |a_{ij}|_n$

حيث أنه في a_{ij} يرمز الدليل الأول لرقم السطر والدليل الثاني لرقم العمود الذي يقع فيه العنصر a_{ij}.

وتسمى العناصر الواقعة على القطعة المستقيمة الواصلة بين الزاوية العليا اليسرى والزاوية السفلى اليمنى عناصر القطر الرئيسي بينما تسمى العناصر الواقعة على القطعة المستقيمة الواصلة بين الزاوية العليا اليمنى والزاوية السفلى اليسرى عناصر القطر الثانوي.

أمثلة:

$|3|$ محدد من الدرجة الأولى

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ محدد من الدرجة الثانية

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ محدد من الدرجة الثالثة

الحل: (أ) نطبق اختبار الطبيب لدراسة تقارب

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{3^n} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 3 \times 1 = 3 > 1$$

وبالتالي $L = 3 > 1$ فالمتسلسلة متباعدة

(ب) نعود إلى المتسلسلة ونطبق اختبار النسبة:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 e^{-(n+1)^2}}{n^3 e^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 e^{-(2n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{2n+1}} = 1 \times 0 = 0 < 1$$

وبالتالي $L = 0 < 1$ فالمتسلسلة متقاربة

(ج) نعود إلى المتسلسلة لدينا:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

وبالتالي $L = 0 < 1$ فالمتسلسلة متقاربة

ملاحظة: لو طبقنا اختبار النسبة على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ لوجدنا أنها حادة؟ أو ضابطة؟

3) اختبار كوشي (الجذر النوني): إذا كانت لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0$ أو $a_n \geq 0)$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = C$$

وهذا يؤدي إلى الحالات الثلاث:

(1) إذا كان $C < 1$ فالمتسلسلة متقاربة

(2) " " $C > 1$ " متباعدة

(3) " " $C = 1$ فلا نستطيع الحكم وهنا نطبق اختبار آخر.

مثال: اختبر تقارب وتباعد المتسلسلات التالية:

1) $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$ ، $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ ، $\sum \frac{1}{n^2}$

ملاحظة (2) إستخدام اختبار المقارنة يتطلب معرفة تقارب أو تباعد عدد من المتسلسلات نذكر هنا بعض المتسلسلات التي يمكن استخدامها كقاعدة في هذا الاختبار:

1) المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$; $a \neq 0$ متقاربة إذا $|q| < 1$ ومتباعدة إذا $|q| \geq 1$.

2) " التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة.

3) " المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ متقاربة إذا $p > 1$ ومتباعدة إذا $p \leq 1$.

مثال للحل: اختبر تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+3} \quad , \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

بمتسلسلة ملاحظة (1):

$\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$; $n \geq 3$ و $\frac{1}{2^n+3} < \frac{1}{2^n}$ $(n \geq 0)$

$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$; $n \geq 2$ و $\frac{n}{n^3+1} \leq \frac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$

ق) اختبار دالمبير (اختبار النسبة): إذا كانت لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ حدودها موجبة، وكانت

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = h$$

فإن:

(1) إذا كان $h < 1$ فالمتسلسلة متقاربة.

(2) " " $h > 1$ " متباعدة.

(3) إذا كان $h = 1$ وهذه حالة شك (أي قد تتقارب أو تتباعد) وتحتاج إلى اختبار آخر

مثال: ادرس (أو اختبر) تقارب وتباعد المتسلسلات التالية:

أ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$ ، ب) $\sum n^3 e^{-n^2}$ ، ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

المتسلسلات العددية ذات الحدود غير السالبة (أو الموجبة) :

- سنبدأ (أو اختبارات) تقارب هذا النوع من المتسلسلات (أي المتسلسلات $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$)

أ) اختبار المقارنة : إذا كانت لدينا متسلسلة عددية (موجبة) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ،

وكانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة ، بأن $a_n \leq b_n \; ; \; n \in \mathbb{N}$

ب) إذا كانت المتسلسلة (2) تتقارب فإن (1) تكون متقاربة .

ج) " " " (1) متباعدة فإن (2) تكون متباعدة .

مثال (1) : أدرس تقارب المتسلسلة الآتية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

(هذا اختبار المقارنة لأن الحد العام هو أكبر من الصفر)

الحل : إن هذه المتسلسلة متقاربة ، لأنها أخذنا المتسلسلة الهندسية المتقاربة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \; ; \; (q = \tfrac{1}{2} < 1)$$

لوجدنا أن :

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

↓

المتسلسلة متقاربة

↓

المتسلسلة تتقارب (أي المطلوب) حسب اختبار المقارنة

ملاحظة (1) : يجب أنه نأخذ : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (حدودها > 0) ، نقارنها بالمتسلسلة الهندسية المتقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$ أي

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

↓

هذه متقاربة أيضاً حسب اختبار المقارنة

وكذلك لو أخذنا المتسلسلة الآتية : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $(p \leq 1)$ (حدودها أكبر من الصفر) ، فهذه المتسلسلة متباعدة ، لأنه

لو أخذنا المتسلسلة التوافقية المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ لوجدنا أن : $p \leq 1$ ، $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$ ...

ة: المتسلسلة الهندسية تتقارب عندما $|q|<1$ ومتباعدة عندما $|q|\geq 1$.

المتسلسلة (P): $\frac{1}{1^P}+\frac{1}{2^P}+\cdots+\frac{1}{n^P}+\cdots$ أو $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}$ (والتي تسمى المتوافقة المعممة لريمان)

ملاحظة:

(1) متقاربة إذا كانت $P>1$، (2) متباعدة إذا كانت $P\leq 1$

مثال: المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (والتي تسمى المتوافقة أو الهرمونية أو التوافقية) متباعدة لأن $P=1$

والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة لأن $P=\frac{1}{2}<1$

بينما المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$، ــــ متقاربة.

خصائص متقاربة:

(1) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ...(1)، $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ ...(2) و c ثابت ما فإنه إذا كانت

(1) متقاربة بالمقدار S فإن $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$ متقاربة أيضاً بالمقدار cS

(2) متقاربة، مجموع كل منها S_1، S_2، فإن متسلسلة المجموع $\sum(a_n+b_n)$ متقاربة ومجموعها S_1+S_2.

شرط اللازم: إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة، فإنه حد عام المتتالية يؤول للصفر أي أن $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ (وهذا يعتبر شرطاً لازماً لكن).

ملاحظة: إن الشرط الوارد في (3) يعتبر شرطاً لازماً لتقارب المتسلسلة، وغير كافٍ لأنه

توجد متسلسلات متباعدة مع ذلك $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

- في نفس الوقت فقد وجد نيلز أبل متسلسلة متباعدة قبل أن يتوصل الباحثون إلى الشرط الضروري ليكون المتسلسلة متباعدة.

مثال: المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (التوافقية) متباعدة، مع أن $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

أيضاً لاحظ أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ متباعدة وذلك لأن $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e\neq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n$$

این سری را بنویسید و همگرایی یا واگرایی آن را بررسی کنید.

$|q|<1$ یعنی $-1<q<1$ اگر $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ (سری هندسی)

$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ ، یعنی $\lim_{n\to\infty}(\lim_{n\to\infty} q^n = \infty)$: $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{}$ اگر

دنباله جزئی همگرا نیست.

$a+a+\cdots+a+\cdots$ دنباله $\lim_{n\to\infty} q = 1$: بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(a+a+\cdots+a)}{n} = \lim_{n\to\infty} a = \infty$$

دنباله جزئی همگرا نیست.

$a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots$: سری هندسی $q=-1$ بنابراین سری (۴

دنباله جزئی $S_n = \frac{a}{2} - \frac{a(-1)^n}{2}$: داریم $S_n = 0$ و $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$

نیست. واگرا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$$ سری را بررسی کنید. $|q|=\left|\frac{1}{3}\right|<1$ بنابراین سری همگرا است

$(a=1, q=\frac{1}{3}$ مجموع را بیابید)

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$(S=2$ یک سری همگرا است)

$$S_n = a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1} = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

با استفاده از فرمول مجموع S_n جمله‌های دنباله هندسی با $q\neq 1$ نیز

می‌توان حد را محاسبه کرد.

ملاحظة: نقول عن المتسلسلة $\sum a_n$ إنها متقاربة إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية (S_n) متقاربة، عندما (S) أي $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ والذي يسمى بمجموع المتسلسلة (أو نهايتها).

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (3)$$

مجموع المتسلسلة

وإذا كانت متتالية المجاميع الجزئية (S_n) متباعدة، فإن المتسلسلة (3) تكون متباعدة.

مثال (1): بين أن المتسلسلة العددية (أو المتسلسلة) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة وأوجد مجموعها (S).

الحل: نضع حدها العام a_n على الصورة التالية:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \text{(طريقة تجزئة الكسور)}$$

ونكون متتالية مجاميعها الجزئية الأولى S_n كما يلي:

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{\text{مجموع أول } n \text{ حد من المتسلسلة}} = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

وأخيراً،

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 = S$$

وهي متسلسلة متقاربة ومجموعها $S = 1$

مثال آخر (2): المتسلسلة المتقاربة وتسمى المتسلسلة المتناوبة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

نكون متتالية مجاميعها الجزئية:

$$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0,\ \cdots,\ S_{2k-1} = 1,\ S_{2k} = 0,\ \cdots$$

نجد هذه المتتالية متقاربة من أي حد، وبالتالي فهي متباعدة، وهذا يعني أن المتسلسلة المعرفة متباعدة.

مثال (3): المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ وتسمى متباعدة

ثانياً) المتسلسلات العددية (أو المتتاليات العددية):

*) تعريف المتسلسة العددية: لتكن لدينا المتتالية العددية (أو المتتالية) حقيقية الآتية:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

من العبارة (أو المجموع) الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad , (1)$$

تسمى متسلسة عددية لأن مجموع حدود المتتالية هي مجموع حدود (طبعاً) وهذا هو الذي سنتعامل معه في محاضراتنا.

الأعداد $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ تسمى حدود (أو عناصر) المتسلسة، والعدد a_n يسمى الحد العام للمتسلسة أو الحد المشترك لها أو الحد النوني لها أو الحد ذو الرتبة n.

فمثلاً: $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+3}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right\}$ متسلسلات عددية أرسمة اختيارياً.

*) السؤال الأهم حول متسلسة تقارب وتباعدها الآتية: لدراسة تقارب وتباعد متسلسة نشكل تتالي المجاميع الجزئية وترمز عادة S_n (أي مجموع n حداً من المتسلسة) للمتسلسة (1) بالصورة:

$$\begin{aligned}
(\text{منه}) \quad & S_1 = a_1 \quad , \\
; \quad & S_2 = a_1 + a_2 \quad , \\
; \quad & S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \; ; \\
& \vdots \\
(\text{منه}) \quad & S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\
& \vdots
\end{aligned}$$

بما أنه يحدد العدد الأول، نهايه المجاميع الجزئيه للمتسلسة (1) تشكل متتالي لأنها مجاميع جزئيه.

إذا كان $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ نقول عن (2) $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ متتالي المجاميع الجزئيه.

*) إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلتين عدديتين كيفيتين، عندئذ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ تكون حاصل جمع المتسلسلتين السابقتين، أي $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ على الترتيب.

كما أن جداء العدد الحقيقي λ بالمتسلسة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هو المتسلسة $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$.

المتتالية المحصورة:

نص: إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = l$ وكانت (x_n) متتالية عددية

بحيث أ-ر، $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \le x_n \le b_n$ فإن $\lim_{n\to\infty} x_n = l$

9) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cos n$

الحل: حسب خاصة لدينا مهما كان n

$$-1 \le \cos n \le 1 \quad ; \quad \forall n$$

بضرب الأطراف بـ $\frac{1}{n^3}$: $-\frac{1}{n^3} \le \frac{\cos n}{n^3} \le \frac{1}{n^3}$ ولدينا $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n^3}\right) = 0$

ومنه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n^3} = 0$$

10) $\lim_{n\to\infty} (q)^n = 0 \quad ; \quad |q|<1 \Leftrightarrow -1<q<1$

ومنه

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

11) $\lim_{n\to\infty} (10n) = \infty$

12) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3n^4+1}} = 0$

13) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{6}{n}\right)^n = 1^\infty$ شكل غير منته $\Rightarrow$ نطبق $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{6}{n}\right)^n = e^6$

14) $\lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{100n}\right) = 1^\infty$ شكل غير منته $\Rightarrow$ نطبق $\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{100} = e^{100}$

الأستاذ (تباشيرات):

20/12/

المحاضرة (4)

رياضيات (2) (علوم)

السداسي.

2020/2021

المتتاليات والمتسلسلات العددية

نتائج أساسية وخاصيات نهاية المتتاليات (أشكال) : أوجد نهايات المتتاليات الآتية (أو احسب) :

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = \frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين $\Rightarrow$ نقسم البسط والمقام على n

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1$

2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{\infty}{\infty}$ حالة عدم تعيين $\xrightarrow[\text{نقسم البسط والمقام على } n]{\text{نفس الحالة}}$ $\lim \frac{n}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$ لأن $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

3) $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \infty - \infty$ حالة عدم تعيين.

نضرب البسط والمقام لإزالة الفرق بالمرافق

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

4) $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = +\infty$

5) $\lim_{n\to+\infty} (1+2+3+\dots+n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$

(مجموع n حدود متتالية حسابية) — مطلوبة من متتالية الحدود

6) $\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = 1^{\infty}$ حالة عدم تعيين $\Rightarrow$ نتبع الطريقة

$\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$

$\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{\alpha}{n})^n = 1^{\infty}$ حالة عدم تعيين $\Rightarrow$ نتبع الطريقة

$\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{\alpha}{n})^n = e^{\alpha}$

7) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(-1)^n = 0$

متتالية محدودة

جداء متتالية محدودة بمتتالية معدومة

متتالية جداء حدودها العام $\frac{1}{n}(-1)^n$ متقاربة نحو 0