الكلية التطبيقية — الفصل الثاني للعام 2018/2019 — 2020 — رياضيات (2)
قسم تقنيات الحاسوب — (1) — نظري
السنة الأولى

المحاضرة (6)

حل المعادلات الخطية

الى هنا نستعرض لكيفية حل المعادلات الخطية [illegible]

تعريف المعادلة الخطية: هي المعادلة التي تحتوي مجهولاً واحداً او اكثر ويكون كل منها من الدرجة الأولى

أمثلة: (1) المعادلة $2x = 5$ هي خطية لأنها من الدرجة الأولى لمجهول واحد هو x (أولية)

(2) المعادلة $3x - 2y = 7$ هي خطية بمجهولين هما [illegible] (من الدرجة الأولى)

(3) = $6x + 5y - 3z = 0$ هي خطية بثلاثة مجاهيل هي x, y, z (الدرجة الأولى)

(4) هذه المعادلة $y \cdot z = 0$ هي ليست خطية لأنها تحتوي حاصل ضرب (مجهولات)

حل المعادلة الخطية: يعني إيجاد قيم المجهول (المجاهيل) التي تحقق المعادلة

*) لو قلنا أعلاه المعادلة الخطية $ax = b$ (أو $ax - b = 0$)

هي خطية بمجهول واحد هو $x = \frac{b}{a}$ $(a \neq 0)$ [illegible]

مثال: حل المعادلة الآتية:

$$6x - 3 = 0 \Rightarrow 6x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

وهي قيمة المجهول التي تحقق المعادلة المعطاة

*) المعادلة بمجهولين $ax + by = c$; $a, b \neq 0$ (أو $ax + by - c = 0$)

هذه المعادلة [illegible] لا يوجد لها حل وحيد [illegible]

لأن عدد المجهولات أكبر من عدد المعادلات

مثلاً [illegible]

(2)

تمرين ١ : أرسم مخطط معادلة خطية بمتغيرين $2x - 3y = 5$ ثم اكتب بعض حلول

الحل : نحدد قيماً لعدد x ونحسب قيم y المقابلة من المعادلة ثم نمثل الأزواج في المستوي

لإيجاد مخطط المعادلة

$y = \frac{2x - 5}{3}$

ومنه مخطط المعادلة هو

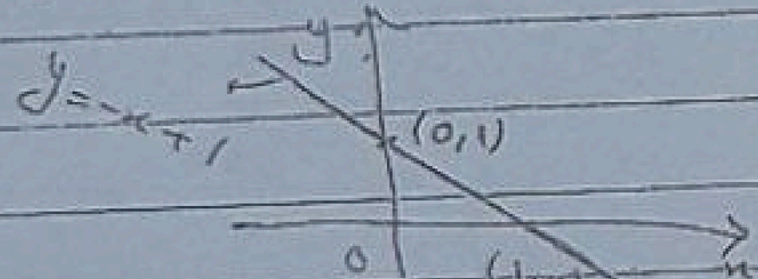
$y = \frac{2x - 5}{3}$ [illegible]

نختار $x = 1$ نجد $y = \frac{2(1) - 5}{3} = -1$

ملاحظة: المعادلة التي ليس فيها y مثل $3x = 7$ (أي $x = \frac{7}{3}$) تمثل مستقيماً يوازي محور الصادات (لأنه يقطع الأول)

2) مثل بيانياً $x + y = 1$ (أي) $x + y - 1 = 0$ أي $y = -x + 1$

فنحصل مستقيماً يقطع المحورين الإحداثيين بالنقطتين



* الحل المشترك لجملة معادلتين خطيتين:
هو مجموعة الأزواج التي تحقق كل المعادلات معاً

* حل المعادلات المتكافئة: تتولد جملة من المعادلات إذا تكافأت ... إذا كان لهما نفس مجموعة الحل [illegible]

(3)

حلقة بحث

*) جملة المعادلات الخطية: هي جملة المعادلات الخطية التي عددها m وذات المجاهيل $x_1, x_2, \dots, x_n$

والتي تأخذ الشكل:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \dots (*)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

حيث: $a_{ij} \in \mathbb{R},\ b_i \in \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{pmatrix}$

نسمي [illegible] المعادلات (*) ، [illegible] $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ [illegible]

ملاحظة: يوجد ثلاث حالات: 1) تقبل الجملة (*) حلاً وحيداً
2) لا تقبل أي حل (مستحيلة)
3) تقبل عدد لانهائي من الحلول

تمثيل الجملة:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$ جملة معادلتين خطيتين بمجهولين x, y

الطريقة الأولى

مثال: اكتب الشكل المصفوفي لجملة المعادلات الخطية الآتية:

$$x + 2y + 3z = 1$$
$$2x + y + 3z = 2 \quad \dots (1)$$
$$3x + y + z = 1$$

ثم [illegible]

الحل: يمكن كتابة الجملة (1) بالشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ [illegible] & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4)

حلقة بحث

أولاً: صيغة المصفوفة: $A \cdot X = B$

تسمى المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة الأمثال للمجاهيل

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ مصفوفة المجاهيل [illegible]

$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة الحدود الثابتة [illegible] (الحدود المطلقة)

*) طرائق حل جمل المعادلات الخطية: [illegible] حل جمل المعادلات الخطية بطريقتين

أ) الطريقة المصفوفية (باستخدام مقلوب مصفوفة)

ب) طريقة كرامر (باستخدام المحددات)

ويشترط في الطريقتين: عدد المعادلات = عدد المجاهيل، وعندئذٍ يكون لجملة المعادلات حل وحيد | نشرح طريقة [illegible] مع [illegible]

ج) الطريقة الحذفية

مثال (1) (الطريقة المصفوفية): حل جملة المعادلات الخطية الآتية مستخدماً [illegible]:

$2x + y = 5 \quad \dots(1)$

$x - y = -2 \quad \dots(2)$

باستخدام الطريقة المصفوفية

الحل: عند استخدام هذه الطريقة نتبع ما يلي:

*) نكتب المعادلات بالشكل المصفوفي الآتي: $A \cdot X = B$ أي: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$

*) إذا كان $\det A \neq 0$ (كون مصفوفة الأمثال) عندئذٍ يكون لجملة المعادلات حل وحيد وهو: $X = A^{-1} B$

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$ ومنه للجملة حل وحيد

نحسب A [illegible]

حلقة بحث

*/ استخدم أسلوب المعكوس لإيجاد قيم المجهولين x, y إذا ضربنا معكوس المصفوفة A في المصفوفة B .

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{Adj\,A}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

ملاحظة : تسمى المصفوفة $Adj\,A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ المصفوفة المرافقة للمصفوفة A

لذلك : $A \cdot X = B$ نضرب ... $X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5-2 \\ 5+4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

وهو الحل المطلوب .

$x = 1 , \ y = 3$

وهذا الحل المشترك لهاتين المعادلتين .

ويمكن التأكد من صحة الحل بالتعويض في المعادلتين .

ثانياً : طريقة كرامر

مثال (2) باستخدام طريقة كرامر أوجد الحل المشترك للمعادلتين .

$x + 2y = 3 \quad \text{---} \ (1)$

$2x + y = 3 \quad \text{---} \ (2)$

الحل : نحسب قيم المحددات كما يلي .

1) نحسب المحدد الأساسي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

وبما أن المعادلتين لهما حل مشترك وحيد .

2) نحسب المحدد الرئيسي Δ_x :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3$$

حلقة بحث

$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3$ ثم نعوض الحل بالمتغير (y)،

ثم [illegible]

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1$

$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1$

إذن فالحل [illegible]

$\{(x, y)\} = \{(1, 1)\}$ or $x = 1, y = 1$

مثال إضافي: أوجد الحل المشترك للمعادلتين

$x + 2y = 2$ ... (1)

$2x + 4y = 4$ ... (2)

جـ) نظام المعادلات [illegible]

*) [illegible]

$ax + by + cz = 0$

[illegible]

$ax + by = 0$ ... (1)

$cx + dy = 0$ ... (2)

[illegible]

[illegible]

[illegible] $x = 0$ [illegible] $y = 0$ [illegible]

[illegible]

[illegible] Δ [illegible] $\Delta \neq 0$ [illegible]

[illegible] Δ [illegible]

مثال: [illegible]

$\begin{cases} 2x + \frac{3}{4}y = 0 & \dots (1) \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}y = 0 & \dots (2) \end{cases}$

$\begin{cases} 8x + 3y = 0 \\ 10x - 3y = 0 \end{cases}$

[illegible]

[illegible] (0,0) [illegible]

العلوم التطبيقية
تقنيات الحاسوب

سنة أولى - تقنيات الحاسوب

المحاضرة (7)

المتراجحات وحلها (كمتراجحة وحل متراجحات بمتغير واحد أو أكثر):

أصبحنا نعلم أن حل معادلة ما هو عملية إيجاد جذورها والتي تحققها وتجعلها مطابقة.

*) ولنتعرف الآن على الرموز التالية:

$<$ أصغر تماماً ($5<7$)

$>$ أكبر تماماً ($6>3$)

$\leq$ أصغر أو يساوي ($5\leq5$) أو ($5\leq8$)

[illegible]

*) مصطلحات:

١- المتراجحة تعبر عن مقارنة بين طرفين (أي أنها علاقة) تحوي متغير واحد أو أكثر على جانب من طرفيها (تحيز)

-) قيم x التي تجعل المتراجحة صحيحة تسمى حلول هذه المتراجحة (أي عملية إيجاد قيم x التي تحقق المتراجحة صحيحة)

-) نقول عن متراجحتين إنهما متكافئتان إذا كان لهما نفس الحلول.

*) طريقة حل متراجحة من الدرجة الأولى (خطية) بمتغير واحد أو مجهول واحد) شكل: $ax+b > cx+d$ ومتكافئة

هنا نشترط أن: $a \neq c$

مسائل محلولة: حل المتراجحات الآتية - ثم مثل الحلول على مستقيم الأعداد ($\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$)

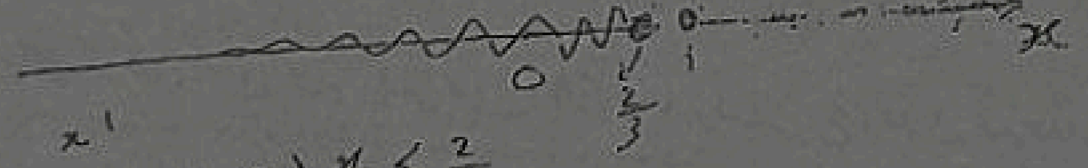
1) $4-3x \geq 2$, 2) $4x+8 < 16-2x$

الحل: كل منهما من الدرجة الأولى (خطية) بمتغير (أو مجهول) واحد، (ومباشرة) نحو الحل [illegible] نبدأ من الأولى:

$$-3x \geq 2-4=-2$$

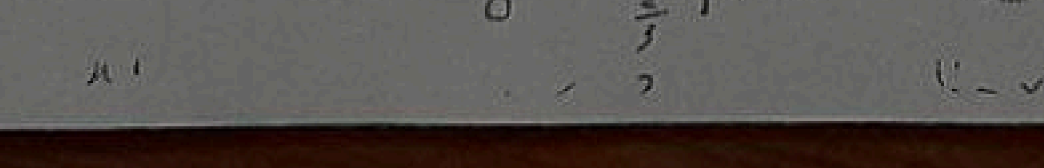
$$\xrightarrow{\div -3} x \leq \frac{2}{3} \Rightarrow x \in \left]-\infty, \frac{2}{3}\right]$$

تمثيل الحل على محور الأعداد:



أو

(حلول المتراجحة) $x \leq \frac{2}{3}$



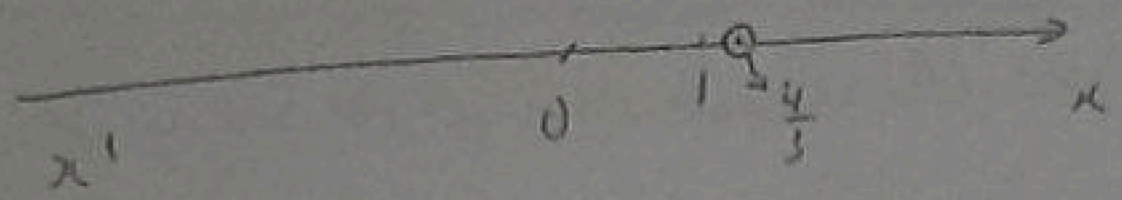
وبالضرب في 12 نجد:

$$4x+2x < 16-8 \Rightarrow 6x < 8 \rightarrow x < \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

ومنه أن مجموعة الحل هي:

$$x \in \left]-\infty, \frac{4}{3}\right[$$

تمثيل بيانياً:



[illegible]

$ax+by+c>0$ (or —) ; $a \neq 0, b \neq 0$ ونشرح ذلك من خلال الأمثلة التالية

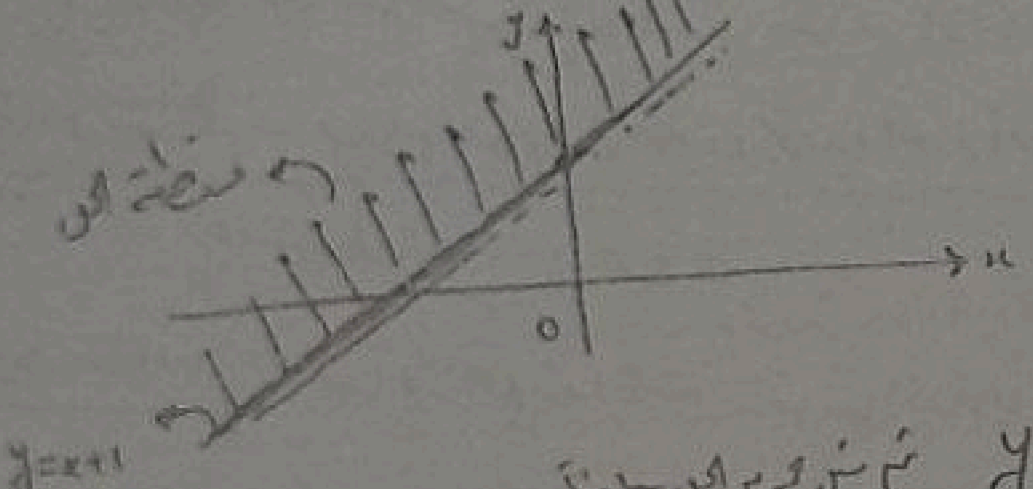
حل المتراجحة الآتية:

$y - x > 1$ والتي تكتب بصيغة الشكل

$y > x+1$ ثم مثل الحل بيانياً.

الحل: نرسم المستقيم $y-x=1$ أو $y=x+1$ ثم نظلل مجموعة الحل (أو المعرف) التي توافق المتراجحة.

نرسم المستقيم $y=x+1$ منقطاً لأنه لا يتضمنه.



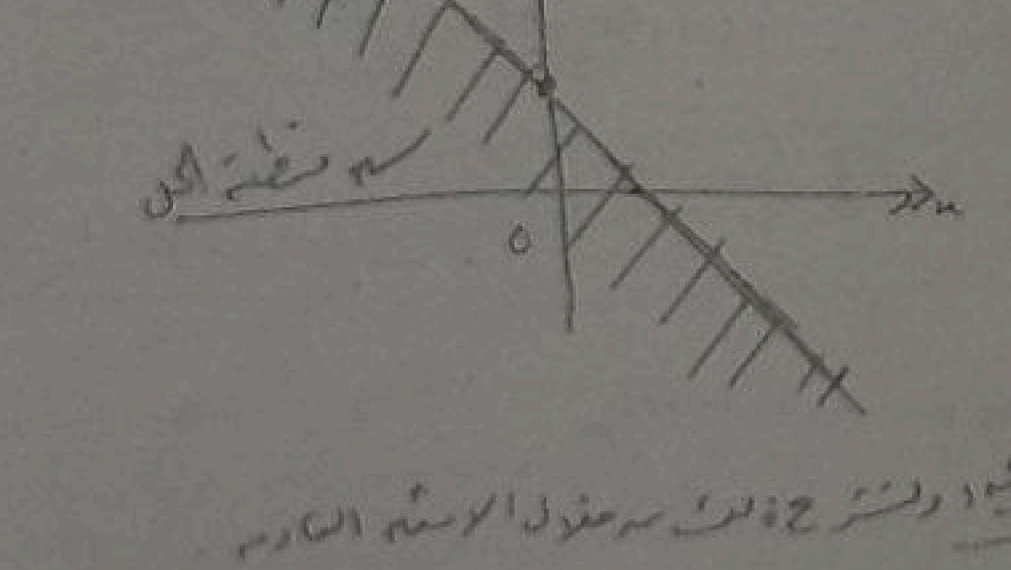
تكون مجموعة الحل كل النقاط فوق المستقيم (ما عدا نقاط المستقيم نفسه) والتي توافق $y>x+1$ وهي المظللة والمستقيم منقط.

مثال: حل المتراجحة: $y+3x \leq 1$ ثم مثل مجموعة الحل بيانياً

الحل: نكتب المتراجحة: $y \leq -3x+1$

نرسم المستقيم $y=-3x+1$

والمنطقة مجموعة الحل التي توافق: $y \leq -3x+1$ هي نقاط المستقيم والواقعة تحته والمظللة والمستقيم متصل.



إيجاد منطقة (...) حل جملة المتراجحات الآتية ونشرح ذلك من خلال الأمثلة التالية

مثال: أوجد منطقة حل جملة المتراجحات الآتية:

مرحلة 2
قسم التقنيات
تقنيات الحاسوب

سنة أولى - تقنيات الحاسوب
مقرر الرياضيات 2
الفصل الثاني 2018/2019 ت ب 2021/2022

المحاضرة (8) د...

المعادلات التفاضلية العادية

تعريف (1) [المعادلة التفاضلية]: هي معادلة تربط بين المتغير المستقل x والدالة $y = f(x)$ ومشتقاتها. هذه الدالة $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ...

المعادلة التفاضلية ...

تعريف (2) [رتبة ودرجة معادلة]: $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad \ldots(1)$

إن رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى مشتقة تدخل في هذه المعادلة، بينما درجة المعادلة هو درجة أعلى مشتقة رتبة فيها.

مثال (1) المعادلة الآتية: $y' + xy = e^x$ هي معادلة تفاضلية رتبتها الأولى ودرجتها الأولى (أعلى مشتقة رتبة هو الأول)

وبالنسبة للمعادلة $y^{(8)} - xy = x^2$ رتبتها الثامنة ودرجتها الأولى

وأما بالنسبة لـ: $(y'')^4 + (y')^2 + 1 = 0$ هي معادلة من الرتبة الثانية والدرجة الرابعة.

تعريف (3) [حل معادلة]: إن حل المعادلة (1) (أو تكاملها) في الفترة $]a,b[$ هو الدالة $y = f(x)$ المعرفة في هذه الفترة ولها مشتقات حتى الرتبة n بحيث تتحول هذه المعادلة إلى متطابقة في x إذا عوضنا عن y بـ $f(x)$ أي إذا كان

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)) \equiv 0$$

والخط البياني لحل معادلة تفاضلية يسمى منحنياً تكاملياً لهذه المعادلة.

مثال: لتكن المعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$ وهي من الرتبة الثانية والدرجة الأولى.

ولتكن الدوال $y = \sin x$ ، $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ ، $y = 2\cos x$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان هي حلول لها على المجال $]-\infty, +\infty[$ ...

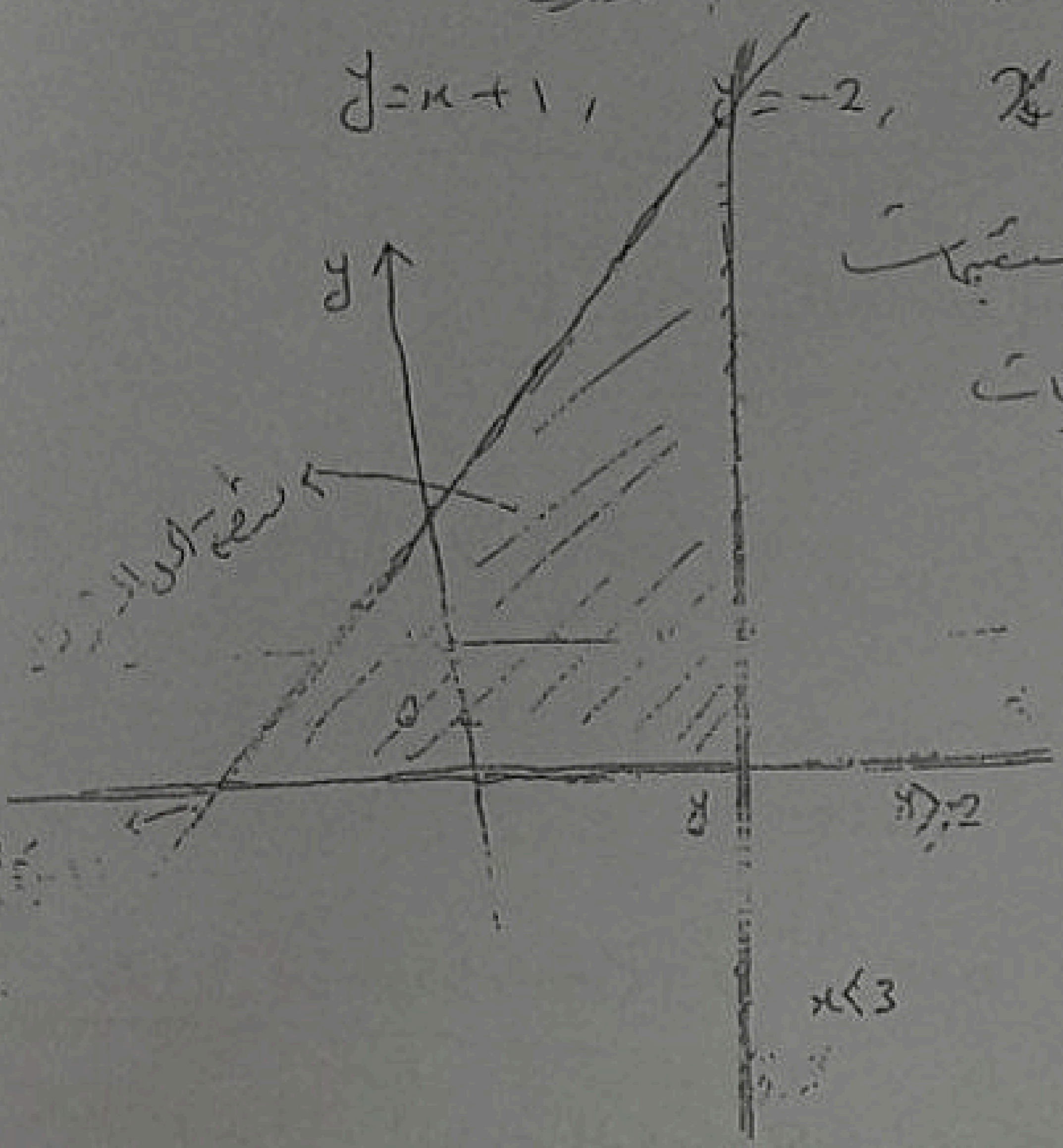
الحل: لنحاول تحديد هذه المنطقة من خلال الرسم البياني حيث أن:

$y=x+1,\quad y=-2,\quad x=3$

تمثل معادلة مستقيم في المستوى التي نرسم كل من هذه المستقيمات

ثم نظلل منطقة الحل المشتركة أي المحصورة بين هذه المستقيمات

في المستوى xoy.



مثال آخر: أوجد منطقة حل جملة المتراجحات المشتركة الآتية:

$x-y+3>0, \quad \text{---} \quad (1)$

$6x+y-30<0, \quad \text{---} \quad (2)$

$2y-5>0, \quad \text{---} \quad (3)$

الحل: من أجل ذلك نرسم المستقيمات الثلاثة في المستوى xoy ثم نحدد منطقة حل الجملة

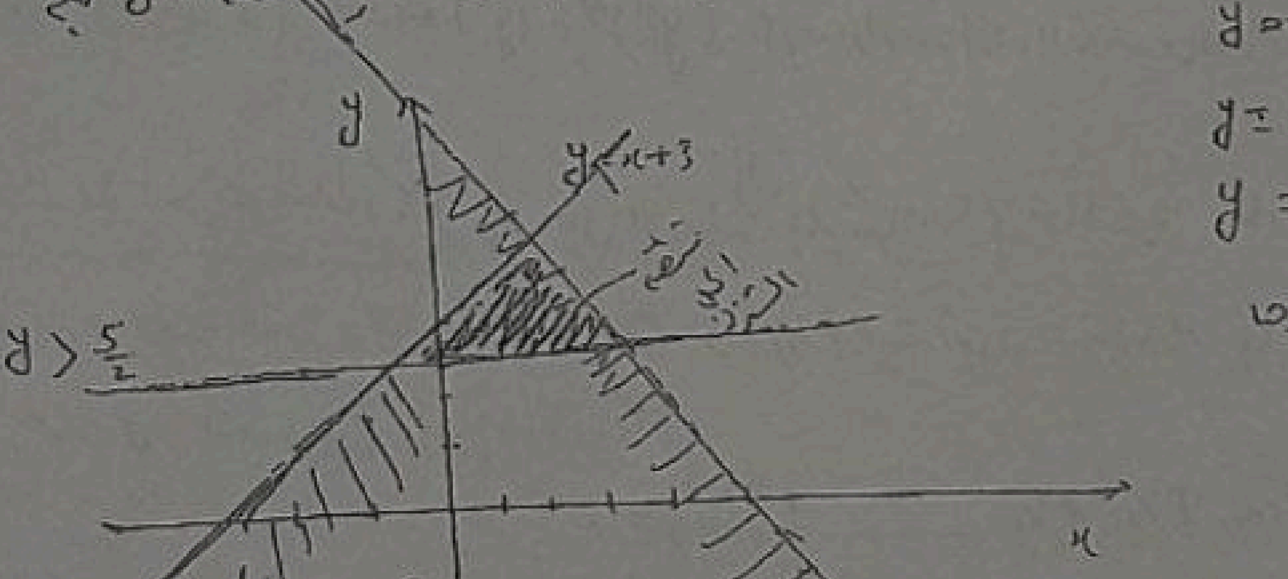
أي:

$y=x+3$

$y=-6x+30$

$y=\frac{5}{2}$

(شكل في المستوى) ثم نظلل منطقة الحل بينها



تمرين: أوجد منطقة حل جملة المتراجحات المشتركة الآتية:

$10x+y>30, \quad 2x+y<20, \quad x+4y>20$

من خلال الرسم البياني.