المطلوب امتناناً في الاستقامة

(م نظري)

1) مشتقة تابع كسري: $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$

$$f'(x)=\frac{g'(x)h(x)-h'(x)g(x)}{h^2(x)}$$

Ex: جد مشتقة التابع:

$$f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$$

$$f'(x)=\frac{2(x+2)-(2x+3)}{(x+2)^2}=\frac{2x+4-2x-3}{(x+2)^2}=\frac{+1}{(x+2)^2}$$

مثال: جد مشتقة التابع: $f(x)=\frac{x^2+2x+5}{x-3}$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x-3)-(x^2+2x+5)}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{2x^2-6x+2x-6-x^2-2x-5}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{x^2-6x-11}{(x-3)^2}$$

2) مشتقة تابع جذري: $f(x)=\sqrt{g(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

مثال: جد مشتقة التابع: $f(x)=\sqrt{2x^2+5}$

$$f'(x)=\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+5}}=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+5}}$$

مثال: جد مشتقة التابع: $f(x)=\sqrt{\sin 3x}$

$$f'(x)=\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$$

3) مشتقة التابع الأسي: $f(x)=e^{g(x)}$

$$\Rightarrow f'(x)=g'(x)e^{g(x)}$$

مثال: جد مشتقة التابع الآتي:

$$f(x)=e^{3x^2}$$

الحل $\Rightarrow f'(x)=6x\,e^{3x^2}$

مثال: جد مشتقة التابع الآتي:

$$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$$

الحل $f'(x)=\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

4) مشتقة التابع اللوغاريتمي: $f(x)=\ln(g(x))$

الحل $f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$

مثال: جد مشتقة التابع الآتي: $f(x)=\ln(3x^3+2x)$

الحل $f'(x)=\frac{9x^2+2}{3x^3+2x}$

مثال: جد مشتقة التابع الآتي: $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

الحل $f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\frac{-x}{x^2}=\frac{-1}{x}$

مثال: جد مشتقة التابع الآتي: $f(x)=\ln(\sin x)$

الحل $f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

5) إذا كان $f(x) = \arcsin x$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

6) إذا كان: $f(x) = \arccos x$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

7) إذا كان $f(x) = \arctan x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

8) إذا كان $f(x) = \operatorname{arccot} x$

$$f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

انتهى المحاضرة

*) التابع الأصلي والتكامل غير المحدد: لقد رأينا قبل قليل أنه تفاضل تابع $y=f(x)$ هو:

$$dy = y' \cdot dx \quad \text{or} \quad dy = f'(x) \cdot dx$$

والآن سوف نتعرض لمسألة أخرى سالبة وهي عملية إيجاد التكامل غير المحدد.

تعريف التابع الأصلي لتابع (1): ليكن التابع $f(x)$ تابعاً معرفاً على مجال $I \subseteq \mathbb{R}$ إذا كان التابع F تابعاً أصلياً للتابع $f(x)$ على I أي $F'(x) = f(x)$ من أجل كل $x \in I$.

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad ; \quad \forall x \in I$$

مثال: إن $F(x) = y = x^2$ تابع أصلي للتابع: $f(x) = 2x$ لأن $F'(x) = 2x$ على $I = \mathbb{R}$.

ونعلم: إن التابع $F(x) = x^2 + c$ تابع أصلي لـ $f(x) = 2x$ على $\mathbb{R}$.

مبرهنة (1): إذا كان كل من $F(x)$ و $G(x)$ تابعاً أصلياً للتابع $f(x)$ فإن:

$$G(x) = F(x) + c \Rightarrow G(x) - F(x) = c$$

أي العبارة بينهما ثابت.

تعريف (2): نسمي مجموعة التوابع الأصلية (العائلة) لتابع ما على مجال I بالتكامل غير المحدد لذلك التابع (المعرف على I).

أي أنه إذا كان $F(x)$ تابعاً أصلياً للتابع $f(x)$ فإن التكامل غير المحدد لـ $f(x)$ هو $F(x)+c$، ونرمز للتكامل غير المحدد لـ $f(x)$ بالرمز:

$$\int f(x) \cdot dx = F(x) + c$$

(إشارة التكامل) — التابع المكامل — متحول التكامل — التابع الأصلي

مثال:

ا) $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

ب) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

ملاحظة: إن

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x & ; \quad x > 0 \\ \ln(-x) & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

وإن

$$(\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; \quad x > 0 \\ \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

المشتقة الأولى

-) إذاً بالنتيجة: التكامل غير المحدد هو مجموعة من التوابع $y = F(x) + C$ وعلى إيجاد التابع الأصلي نحسب التكامل غير المحدد وهي عملية الاشتقاء أو التفاضل.

ملاحظة: إذا كان التابع f مستمراً في فترة ما فعندئذٍ يكون هذا التابع قابلاً للتكامل (أو للمكاملة) في هذه الفترة. (أو أعطيه إيجاد التابع الأصلي أي التكامل غير المحدد له في هذه الفترة)

*) خواص التكامل غير المحدد: إذا كان f و g تابعين قابلين للمكاملة (أو للتكامل) على فترة ما فإن:

---

1) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x)$

أو

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$$

أي مشتقة التكامل غير المحدد يساوي التابع المكامل f وتفاضل التكامل غير المحدد يساوي التابع المكامل.

2) $\int d\left(F(x)\right) = F(x) + C$

أي التكامل غير المحدد لتفاضل تابع ما يساوي هذا التابع مضافاً إليه ثابت C.

3) $\int [a f(x) + b g(x)]\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$

حيث a, b ثوابت حقيقية غير الصفر.

*) فيما يلي بعض التكاملات الأساسية، سنذكر بعضها فقط مع بعض الأمثلة (بقية التكاملات الأساسية ستذكر لاحقاً):

1) $\int 0\,dx = c$ ، 2) $\int dx = x + c$ ، 3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $(n \neq -1)$

4) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ ، 5) $\int e^x dx = e^x + c$ ، 6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $(a \neq 1, a > 0)$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$ ، 8) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ ، 9) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$ أو $= -\arccos x + c$ ، 11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$

12) $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + c$

مثال: أوجد التكاملات الآتية:

$I_1 = \int (4x^3 - 2\cos x + 5\sqrt{x})\,dx$ ، $I_3 = \int \left(\frac{1-x}{x} + 3^x\right) dx$

$I_2 = \int \left(2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ ، $I_4 = \int \left(\sqrt[5]{x^3} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + e^{-2x}\right) dx$

الحل:

$I_1 = 4\int x^3 dx - 2\int \cos x\,dx + 5\int \sqrt{x}\,dx$

$= \frac{4}{4}x^4 - 2\sin x + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

$= x^4 - 2\sin x + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

$I_2 = \int \left(4x + 12 + \frac{9}{x}\right) dx = 2x^2 + 12x + 9\ln|x| + c$

ملاحظة: يثبت الثابت c مرة واحدة إذا كان لدينا مجموع جبري لعدة تكاملات.

$$I_3 = \int \left(\frac{1}{x} - 1 + 3^x\right) dx = \int \frac{dx}{x} - \int dx + \int 3^x dx = \ln|x| - x + \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$I_4 = \sqrt{5}\int x^{\frac{3}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{5}} \int x^{-\frac{3}{2}} dx + \int e^{-2x} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

- يمكننا إضافة بعض القواعد والتي نشرحها من خلال (نادية رشاد علي) ، إذا كان $u = u(x)$ دالة قابلة للاشتقاء بـ x،

$$R_1) \quad \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + C \xrightarrow{\text{مثال}} \int \frac{3x^2}{x^3 - 1} dx = \ln|x^3 - 1| + C$$

$$R_2) \quad \int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = 2\sqrt{u(x)} + C \xrightarrow{\text{مثال}} \int \frac{6x\, dx}{\sqrt{x^2+1}} = 3\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx = 6\sqrt{x^2+1} + C$$

$$R_3) \quad \int u^n(x)\, u'(x)\, dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + C \xrightarrow{\text{مثال}} \int (x^2+x)^9 (2x+1) dx = \frac{(x^2+x)^{10}}{10} + C$$

مثال آخر،

1) $I = \int \frac{dx}{x-5} = \ln|x-5| + C$

2) $I = \int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x| - \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$

في هذا المثال سنعمل على تجزيء الكسر:

$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$; توحيد المقام =

بمقارنة: $A = 1, \ B = -1$

- يمكننا الوقوف عند هذا الحد من الكسور التي نحتاج إلى تجزيء الكسور مثل المثال السابق (من خلال الأعلى).

$$R_4) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \quad R_5) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot\tan x + C$$

$$R_6) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan\frac{x}{a} + C \quad ; \ a \neq 0$$

$$R_7) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$