سنة أولى (تقنيات الاسوب) 2018-2019 / 2020

رياضيات (1) نظري

المحاضرة (5)

نهاية واستمرار د.ج

*) تصنيف (أو أنواع) التوابع العددية (أو المتغير):

1) كثيرات الحدود (أو متوابع الصحيح): وهي التي من الشكل:

$$y = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

حيث $a_0, a_1, \ldots, a_n$ من الأمثال أو العناصر وهي أعداد حقيقية ثابتة

و n عدد صحيح غير سالب ($n = 0, 1, 2, \ldots$) ودرجة

مجموعة تعريفها: $D_f = \mathbb{R}$

مثلاً: متوابع الأول $y = f(x) = 2x + 3$ تابع صحيح من الدرجة الأولى

أو حقيقي أو كثير حدود من الدرجة الأولى

والثاني $y = f(x) = x^2 - 5x + 6$ تابع صحيح تربيعي (أو كثير حدود

من الدرجة الثانية)

لكل منها $D_f = \mathbb{R}$

2) المتوابع الكسرية: وهي من الشكل:

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$$

حيث كل من $P(x)$ و $q(x)$ كثير حدود من أي درجة أو أعداد ثابتة

مجموعة تعريفها: $D_f = \mathbb{R} - \{$ القيم التي تجعل المقام صفراً $\}$

مثلاً:

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 1}$$

تابع كسري مرتبة 2

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

وهكذا

3) التوابع الجذرية: مركّبة،

$$y = f(x) = \sqrt{P(x)}$$

حيث $P(x)$ كثير حدود من الدرجة الأولى، مجموعة تعريفها معرّفة بما يلي:

$$D_f = \{ P(x) \geq 0 \} \xrightarrow{\text{مثال}} y = f(x) = \sqrt{3x-1}$$

أو مركّبة أيضاً

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{q(x)}}$$

ونرث مجموعة تعريفها مرحلتين مثال للسهولة، p و q كثيرا حدود

(أي ترث $\mathbb{R}$ باستثناء قيم x التي تعدم $q(x)=0$) والتي تكون مقامات الجذر وبالتالي لا

نهتم،

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2+10}}$$

المقام هنا موجب تماماً ولذا لا نهتم به (بالتبسيط) أي يكفي $x-1 \geq 0$ أي $x \geq 1$

وعليه

$$D_f = [1, +\infty[$$

4) التوابع الأسية: وهي مركّبة،

$$y = f(x) = a^{g(x)} \quad ; \quad a \neq 1, \ a > 0$$

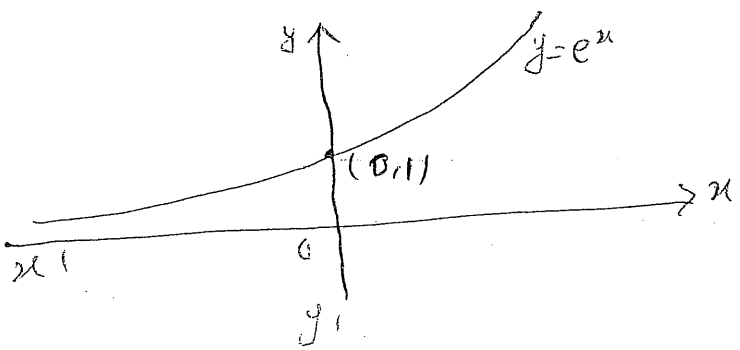
وبشكل خاص نأخذ

$$y = e^{g(x)} \quad ; \quad e \simeq 2{,}718$$

ومجموعة تعريفها هي مجموعة تعريف $g(x)$.

مثال: $y = f(x) = e^x$ مجموعة تعريفها هي $D_f = \mathbb{R}$

وخطها البياني



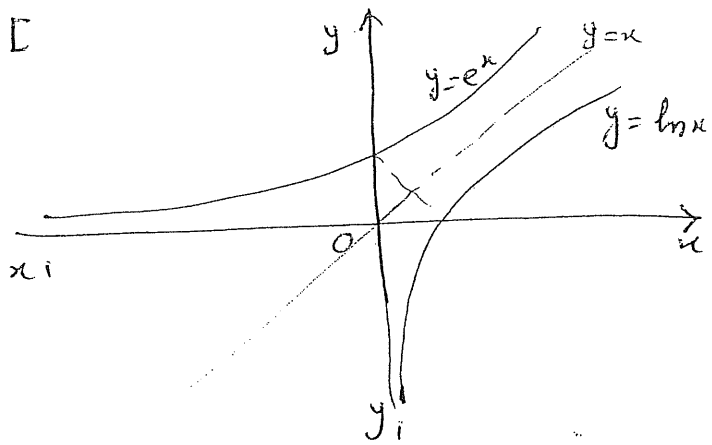
(5) التابع اللوغاريتمي الطبيعي

$y = \ln x$

وهو مايرمز بالتابع اللوغاريتمي الطبيعي الذي أساسه العدد النيبري $e \approx 2{,}718$

نعلم أن التابع الأسي $y = e^x$ تابع تزايدي.

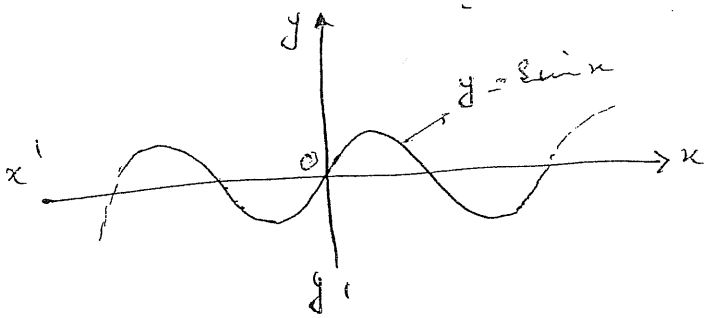
$D_f =]0, +\infty[$



(6) التابع الشكل (الجيبي والتجيبي) وهي

$y = \sin x$ $\quad y = \cos x$

وهي مرتبطة بـ $\mathbb{R}$ وتمثل التابع الجيبي الخط البياني:



(7) التابع (الظل): وهو

$y = f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

تابع تزايدي

$D_f = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + \pi k ; k \in \mathbb{Z}\}$

مثال: أدرس تغيرات أو رتابة التوابع (أي منطلق):

$y_1 = x^3 + x$, $\quad y_2 = \frac{1}{x^2+1}$, $\quad y_3 = e^{\frac{1}{x}}$, $\quad y_4 = \frac{2x+5}{2x-1}$

$y_5 = \cos(x+10)$, $\quad y_6 = \sin(3x+7)$

الحل: الناتج الأول صحيح (كل عدد) صرح بـ $\mathbb{R}$ أي $D_{y_1} = \mathbb{R}$

والثاني كسري بسطه ثابت ومقامه لا يساوي أبداً كائناً x ولذا نهدف بـ $\mathbb{R}$ والثالث جذر أسه زوجي أكبر من الواحد صحيح صرح عندما $x \neq 0$ أي بـ $\mathbb{R}^*$ إذاً

$$D_{y_2} = \mathbb{R}$$

$$D_{y_3} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

والرابع كسري صرح لما القاسم لا يساوي الصفر أي $2x - 1 \neq 0$ ولذا $x \neq \frac{1}{2}$ ومنه

$$D_{y_4} = \mathbb{R} - \{\tfrac{1}{2}\} =]-\infty, \tfrac{1}{2}[\cup]\tfrac{1}{2}, +\infty[$$

وأما الرابع والخامس فتواجه مشكلة (زوجيا الجذر تواجه صحيح) فلذا صرحا بـ $\mathbb{R}$ ومنه

$$D_{y_5} = D_{y_6} = \mathbb{R}$$

ملاحظة: يكتفا هنا إعطاء واجب منزلي في توابع مجموعات تعريفها ليتمكنه الطالب من حلها بنفسه.

---

* نهاية واستمرار عند عدد (حقيقي) :

1) نهاية تابع عند نقطة :

نفترض دالة عددية f عندما تؤول x إلى قيمة a (حيث $a \in D$ أو $a \notin D$) ونكتب رياضياً :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \dots (1)$$

ونقرأ الدالة f تؤول نحو l عندما تقترب x من a

مثال :

$$\lim_{x \to 1} (4x - 3) = 4(1) - 3 = 1$$

شرط وجود النهاية l لتابع عددي :

1. l عدد موجود ومحدد وحيد.
2. النهاية اليمينية = النهاية اليسارية، أي $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$

ونعني بالنهاية اليسارية

$$S_1 = \lim_{x \to a^-} f(x) \overset{\text{or}}{=} \lim_{x \to a^-} f(x) \quad \dots (2)$$

والنهاية اليمينية :

$$S_2 = \lim_{x \to a^+} f(x) \overset{\text{or}}{=} \lim_{x \to a^+} f(x) \quad \dots (3)$$

خواص النهايات : إذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$, $\lim_{x \to a} g(x) = l_2$ حيث l_1, l_2 منتهية

1) $\lim_{x \to a} [f(x) \mp g(x)] = l_1 \mp l_2$

2) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = l_1 \cdot l_2$

3) $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{l_1}{l_2} \quad ; \quad l_2 \neq 0$

4) $\lim_{x \to a} [\alpha \cdot f(x)] = \alpha \cdot \ell \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$

5) $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \ell^n$

6) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$

*) نظريات حول النهايات :

(1) نظرية : النهاية إذا وجدت فهي وحيدة

(2) [illegible]

إذا كانت $f(x) = c$ حيث c عدد ثابت فإن $\lim_{x \to a} f(x) = c$

(3) إذا كانت الدالتان f و g نهايتين عندما $x \to a$ وكان $f(x) \leq g(x)$ فإن :

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

(4) إذا كان : (نظرية الدالة المحصورة)

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \ell$$

وكان $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ فإن $\lim_{x \to a} h(x) = \ell$

*) حالات عدم التعيين : وهي :

$$\frac{0}{0} \; , \; \frac{\infty}{\infty} \; , \; \infty - \infty \; , \; 1^{\infty}$$

مثال : ليكن لدينا التابع :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; \; -\infty < x < 2 \\ x^2 & ; \; 2 \leq x < \infty \end{cases}$$

أوجد نهاية التابع عند $x=2$ أوجد $\lim_{x \to 2} f(x)$ ، وهل هي نهاية ؟

الحل : نوجد النهايتين من اليمين واليسار عند النقطة ($x=2$) أي :

$$S_1 = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x) = 4 \; , \quad S_2 = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2) = 4$$

نلاحظ أن $S_1 = S_2 = 4$ والنتيجة أن النهايتين = 4 .

مثال: بين إذا كان للتابع $y = g(x) = \frac{x}{|x|}$ نهاية عند $x \to 0$ ؟

الحل: التابع معرف في $\mathbb{R}^*$ أي $(D_g = \mathbb{R}^*)$ والتابع ثنائي الشعبة وعند نقطة تبديل قاعدته

$$|x| = \begin{cases} x & ; \ x > 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \\ -x & ; \ x < 0 \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} 1 & ; \ x > 0 \\ -1 & ; \ x < 0 \end{cases}$$

ولنوجد نهايتي:

$$S_1 = \lim_{x \to 0^-} g(x) = -1 \ , \quad S_2 = \lim_{x \to 0^+} g(x) = 1$$

بما أن $S_1 \neq S_2$ فليس للتابع نهاية عند $x \to 0$

أمثلة متنوعة أوجد النهايات الآتية (إن أمكن):

1) $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 3x - 1}{5x^2 + 2} = \frac{-1}{2}$ (نهاية موجودة وكسرية)

2) $\lim_{x \to 1} 5 = 5$ (نهاية الثابت يساوي الثابت) $(x \to \mp\infty)$

3) $\lim_{x \to \mp\infty} (x^2 - 5x + 2) = (\mp\infty)^2 = \infty$ (نهاية كثيرة الحدود)

4) $\lim_{x \to -\infty} (-x^2 + 3x) = -(-\infty)^2 = -\infty$

تذكرة: نهاية كثير الحدود عند $x \to \mp\infty$ هي نهاية حده الأعلى درجة.

5) $\lim_{x \to \mp\infty} (x^3 - 2x + 1) = (\mp\infty)^3 = \mp\infty$ (الحد الأعلى درجة)

(حالة الانبثار التزايدي)

(*) سنرى حالات عدم التعيين التالية ($\frac{\infty}{\infty}$) وإزالة:

6) $\lim_{x \to \mp\infty} \frac{3x^4 - 2x + 10}{x^4 + 3} = \frac{\infty}{\infty}$ (عدم تعيين) $\Rightarrow \lim_{x \to \mp\infty} \frac{3x^4 - 2x + 10}{x^4 + 3} = \frac{3}{1} = 3$ } نقسم على الحد الأعلى درجة

تذكرة: أكبر نهاية حاصل قسمة أمثال الحدود الأعلى درجة في البسط والمقام.

7) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{1 + 3x}{1 + 5x}} = \frac{\infty}{\infty}$ (عدم تعيين) $\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{3x + 2}{5x + 1}} = \frac{3}{5}$

8) $\lim_{x \to \mp\infty} \frac{x - 2}{x^2 + 3x + 7} = \frac{\infty}{\infty}$ (عدم تعيين) $\Rightarrow \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x(1 - \frac{2}{x})}{x^2(1 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2})} = 0$ } درجة البسط أكبر من درجة المقام

9) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^5-7x^3+x+10}{x^3+18x+9} = \frac{\infty}{\infty}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim \frac{1}{x^2} = 0$ } وهي وسيلة لإزالة عدم التعيين

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5\left(3-\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{10}{x^5}\right)}{x^3\left(1+\frac{18}{x^2}+\frac{9}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} x^2 \times \frac{3}{1} = \infty$

10) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{6-x} = +\infty$

* حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$:

11) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4+x^3}{x^3+2x^2} = \underbrace{\frac{0}{0}}_{\text{عدم تعيين}} \overset{\text{نبسط}}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{x^3(x+1)}{x^2(x+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{(x+2)} = \frac{0}{2} = 0$

12) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{0}{0}$ عدم تعيين $\Rightarrow$ لكن $D = \mathbb{R}-\{-1\}$ لهذا نأخذ $x \neq -1$ أي عندما $x = -1$ لا يوجد نهاية

$\lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x\to 1} (x-1) = 2$

13) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{2-\sqrt{x+4}} = \frac{0}{0}$ عدم تعيين

لإزالة عدم التعيين نضرب بمرافق المقام

$\lim_{x\to 2} \frac{x}{2-\sqrt{x+4}} = \lim_{x\to 2} \frac{x(2+\sqrt{x+4})}{(2-\sqrt{x+4})(2+\sqrt{x+4})} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2+\sqrt{x+4})}{4-x-4}$

$= \frac{2+2}{-1} = -4$

* حالة عدم التعيين $\infty - \infty$ ، وهذه نردها إما إلى حالة $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

15) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \infty - \infty$ (عدم تعيين)

لإزالة عدم التعيين نضرب ونقسم بالمقدار المرافق $\sqrt{x^2+x} + x$ فنجد :

$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2}{(\sqrt{x^2+x}+x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \underbrace{\frac{\infty}{\infty}}_{\text{عدم تعيين}}$

لإزالة عدم التعيين نقسم البسط والمقام على x :

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

* حالة عدم التعيين من الشكل 1^{∞} :

16) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1^{\infty}$ صورة عدم التعيين

إذن

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

ونتيجة

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{\alpha} \quad ; \alpha \in \mathbb{R}^*$$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

17) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{7x} = 1^{\infty}$ صورة عدم التعيين $\Rightarrow$ نضع $\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^7 = e^7$

* بعض النهايات المرجعية:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ ($\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$ صورة عدم التعيين)

نتيجة: 1) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$ ، 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{x} = \frac{0}{0}$ صورة عدم التعيين $(\alpha \neq 0)$

إذن

$$\alpha \lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \alpha \times 1 = 1$$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \frac{0}{0}$ صورة عدم التعيين $\Rightarrow$ نضع $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

نتيجة: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}-1}{\beta x} = \beta \times 1 = \beta$ إذن $(\beta \neq 0)$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \frac{0}{0}$ $(\beta \neq 0)$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{0}{0}$ صورة عدم التعيين $\Rightarrow$ نضع $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

نتيجة: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\lambda x+1)}{\lambda x} = \lambda \times 1 = \lambda$ $(\lambda \neq 0)$

أيضاً من النهايات الهامة لدينا:

4) $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}$ عدم تعيين

أو أيضاً:

$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \simeq 2,718$

مثال (4) ذلك: أوجد النهايات الآتية:

c) $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{7}{x}} = 1^{\infty}$ عدم تعيين $\Rightarrow$ بالتالي $\lim_{x \to \infty} \left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^7 = e^7$

cc) $\lim_{x \to 0} (1-3x)^{\frac{2}{9x}} = 1^{\infty}$ عدم تعيين $\Rightarrow$ بالتالي

يمكننا إيجادها مباشرة دون عدم التعيين

نفرض $y = -3x$ فيكون $\frac{1}{x} = \frac{-3}{y} \leftarrow x = -\frac{y}{3}$

وعندما $x \to 0$ فإن $y \to 0$

بالتعويض في النهاية نجد:

$$\lim_{y \to 0} (1+y)^{\frac{2}{9} \times \frac{-3}{y}} = \lim_{y \to 0} (1+y)^{\frac{1}{y} \times -\frac{2}{3}} = \lim_{y \to 0} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-\frac{2}{3}} = e^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$$

مثال: أوجد (أو اثبت) النهايات الآتية:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{0}{0}$ عدم تعيين

لإزالة عدم التعيين نضع:

$x = -y \leftarrow -x = y$

وعندما $x \to 0$ فإن $y \to 0$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{-y} = -\lim_{y \to 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = -1$$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^2 + x} = \frac{0}{0}$ عدم تعيين

لإزالة عدم التعيين نكتب:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x(x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{x+1} = 1$$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \frac{0}{0}$ عدم تعيين

لإزالة عدم التعيين نكتب:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}$$

$$= 1 \times 1 = 1$$

٢) استمرار تابع عند نقطة (تعريف): لنفرض أن التابع f معرف بالشكل: $f: D \to \mathbb{R}$

أي D_f هي مجموعة تعريفه.

نقول عن التابع $y=f(x)$ إنه مستمر عند النقطة $x=a$ (أو عند النقطة $x=a$ التي هي من مجموعة تعريفه) إذا تحققت الشروط الآتية:

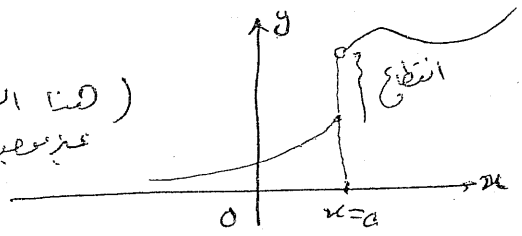
ش١) التابع معرف عند النقطة $x=a$ (أي $a \in D_f$) أي $f(a)$ موجودة ومحدودة.

ش٢) نهاية التابع موجودة ومحدودة عندما $x \to a$ أي $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة ومحدودة

ش٣) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ وهو شرط يعني أن التابع f يكون مستمراً في $x=a$ إذا كانت نهاية التابع عند النقطة (أو عند a) مساوية لقيمة التابع في (أو عند) a.

ملاحظة: إذا لم يحقق التابع شرطاً من الشروط السابقة (في حال اختلال أحد الشروط السابقة) عند $x=a$ نقول إنه غير مستمر (أو منقطع) عند $x=a$.

ولكي نوضح ذلك نعطي الشكل التالي:



(في هذا التابع غير مستمر لأنه غير معرف في النقطة أو عند $x=a$)

مثال (1): ادرس استمرار التوابع الآتية (في النقطة المعطاة بجوار ①):

1) $f(x) = \sin x \quad ; x = \frac{\pi}{2}$

2) $g(x) = x^3 + x + 1 \quad ; x = 0$

3) $h(x) = \frac{x-1}{x+3} \quad ; x = -3$

الحل: 1) التابع f معرف في $\mathbb{R}$ وبالتالي $x = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} = D_f$ (أي ينتمي إلى مجموعة التعريف أو المقبول) ومنه

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

والشرط الأول محقق، ولنوجد نهايته.

ومنه: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

والشرط الثاني محقق.

2) يدرس بنفس الطريقة.

3) التابع h معرف في $D_h = \mathbb{R} - \{-3\}$ أي أنه غير معرف في $x = -3$ والتابع غير مستمر في $x=-3$، لأنه لم يحقق الشرط الأول من شروط الاستمرار.

ملاحظة: كل التوابع الكثيرة الحدود والأسية واللوغاريتمية وتوابع الجيب مستمرة في مجموعات تعريفها (أو مقبولاتها).

تعريف (الاستمرار من اليمين واليسار): ① نقول عن التابع $y=f(x)$ إنه مستمر من اليمين عند النقطة $x=a$ إذا كان:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

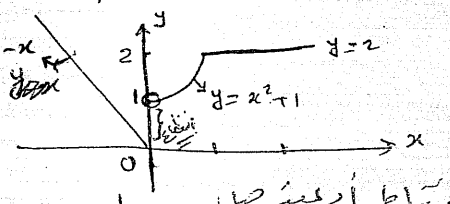
② ونقول عنه إنه مستمر من اليسار عند النقطة $x=a$ إذا كان $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

ملاحظة: (A) ليكن التابع f مستمراً في النقطة $x=a$ إذا كان مستمراً من اليمين ومن اليسار في هذه النقطة (أي عندها).

(ب) ليكن التابع f مستمراً على مجموعة ما (أي عندها) إذا كان التابع مستمراً في كل نقطة من نقاط هذه المجموعة (هذه المنزة).

مثال توضيحي: أدرس استمرار التابع الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -x & ; -\infty < x \leq 0 \\ x^2+1 & ; 0 < x \leq 1 \\ 2 & ; 1 < x < +\infty \end{cases}$$



في النقاط أي عندها: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

الحل: التابع معرف على $\mathbb{R}$ (أي $D_f = \mathbb{R}$) ولما أن الدراسة مفيدة وطلب منا ذلك فإن الدراسة ستكون:

- في جوار النقطة $x_1 = 0$ لدينا:

$f(0) = 0$ ؛

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2+1) = 1$$

وبما أن الغايات من اليمين واليسار موجودة ومختلفة فالتابع f ليس مستمراً في النقطة $x_1 = 0$ أي أنه منقطع أي أنه ليس مستمراً في أي نقطة أخرى.

- في جوار النقطة $x_2 = 1$ لدينا:

$f(1) = 2$ ؛

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2+1) = 2 \quad , \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2) = 2$$

نلاحظ أن $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2$ والتابع مستمر في النقطة $x_2 = 1$.

*) الدالة الدرجية مستمرة من اليمين وغير مستمرة من اليسار عند كل عدد صحيح ($x \in \mathbb{Z}$) وبالتالي فهي مستمرة عند كل $x \in \mathbb{Z}$