السنة الأولى

جامعة حماة

الكلية التطبيقية

الرياضيات (نظري +عملي)

المحاضرة ٣+٤

قسم التقانات

عدد الورق : ١٢

2021/2020 - 2018-2019 السنة الأولى - الفصل الثاني

جامعة حماة
المعهد التقاني
قسم تقنيات الحاسوب

المحاضرة (2) رياضيات (1) نظري

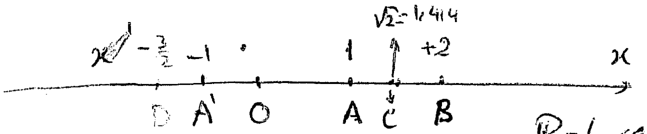
التحليل الرياضي

أولاً: مفاهيم أولية (بعض مبادئ الهندسة التحليلية) نبدأ أولاً بالتذكير بالمجموعات العددية:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ العقدية

1) الإحداثيات الديكارتية:

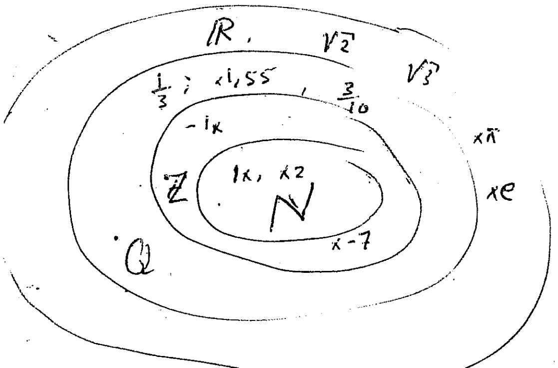
☒) المحور الحقيقي (أو مستقيم الأعداد الحقيقية): هو مستقيم $x'x$ (أو Ox) اتخذنا عليه نقطة O تمثل العدد الصفر ونقطة (A) تمثل العدد /1/ فيكون: $(O,A) = |\overrightarrow{OA}| = 1$ والتي تعتبر وحدة الأطوال وعليه يمكن تقسيم مجموعة الأعداد الحقيقية عليه ويعتبر الاتجاه من (O) إلى (A) اتجاهاً موجباً كما أشرنا سابقاً $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ (وحدة الأطوال) ونسمي (O, OA) معلماً للمستقيم $x'x$ الذي نسميه محوراً.



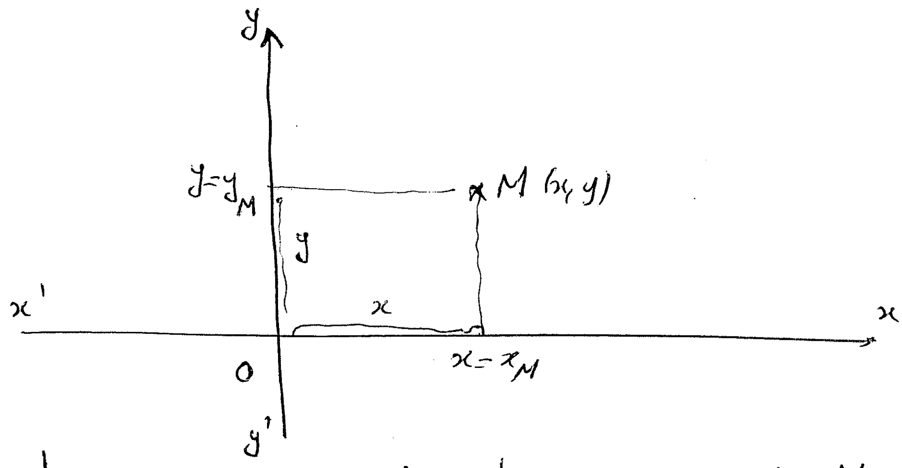
*) إذا مثلنا مجموعة الأعداد الحقيقية على مستقيم الأعداد (المحور الحقيقي) فإننا نرى:
كل نقطة من المحور $x'x$ تقابل عدد حقيقي يسمى فاصلة نقطة من المحور (أو x_A) إذا اعتبرنا النقطة A
وكل عدد حقيقي يقابله نقطة من المحور $x'x$ أي يوجد تقابل مجموعة نقاط المحور ومجموعة الأعداد الحقيقية ونرمز لها $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

*) نقاط نصف المستقيم Ox تمثل الأعداد الموجبة ونقاط نصف المستقيم Ox' تمثل الأعداد السالبة.
$+1, +1,5, \ldots$
$-1, -1,5, \ldots$

☒) ممكن تمثيل المجموعات كما يلي بالشكل:



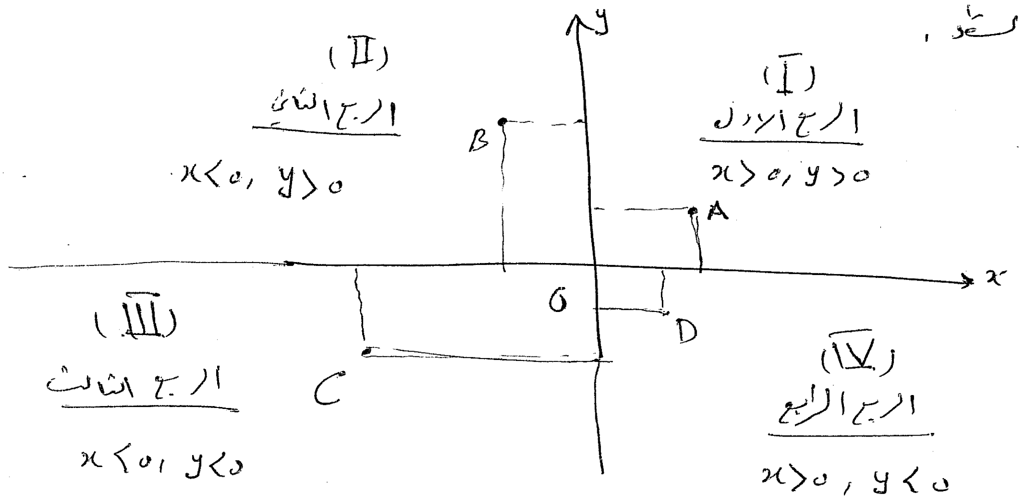
☒) نظم الإحداثيات الديكارتية (المستوي الديكارتي): سندرس هنا نظم الإحداثيات الديكارتية المتعامدة (الناظمية) والتي تتكون من محورين متعامدين أحدهما أفقي نسميه المحور السيني أو محور الفواصل Ox والآخر شاقولي محور عمودي على النقطة O المشتركة بينهما نسميه المحور العيني أو محور التراتيب Oy نسميهما المحورين الإحداثيين و O مبدأ الإحداثيات أو نقطة الأصل كما أشرنا سابقاً:



*) كل نقطة M من المستوي xoy الديكارتي (المعلم الإحداثي الديكارتي) مؤلف من المحورين المذكورين فيقابلها زوج وحيد (x,y) حيث x فاصلة النقطة M أو سينها (x_M) وتقع على x'x و y ترتيبها أو صاديها (y_M) وتقع على y'y ونكتب M(x,y) ، وبالعكس يقابل كل زوج مرتب (x,y) نقطة وحيدة من المستوي M .

تسمى (x,y) الإحداثيات الديكارتية

*) المحوران الإحداثيان يقسمان المستوي xoy الديكارتي إلى أربع أرباع ولا تنتمي نقاط المحورين من تلك الأرباع كما يلي .



- $M \in x'x$ نكون $y=0$ والعكس صحيح
- $M \in y'y$ نكون $x=0$ " "
- مبدأ الإحداثيات (أو النقطة الأصل) $O(0,0)$

<u>مثال</u> : خذ مستوياً إحداثياً (أي معلم المحورين المتعامدين) ثم عيّن فيه النقاط

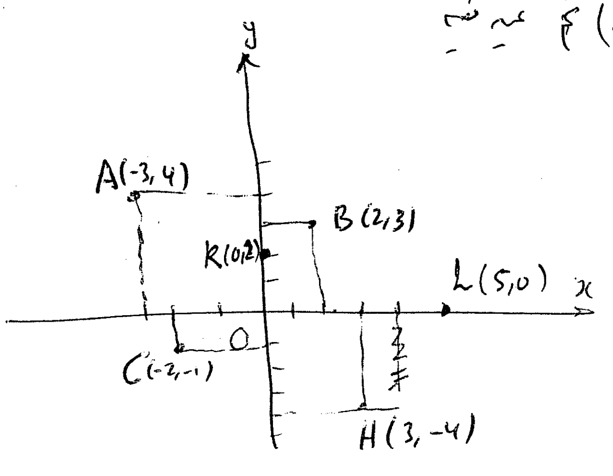
$A(-3,4)$, $B(2,3)$

$C(-2,-1)$, $H(3,-4)$

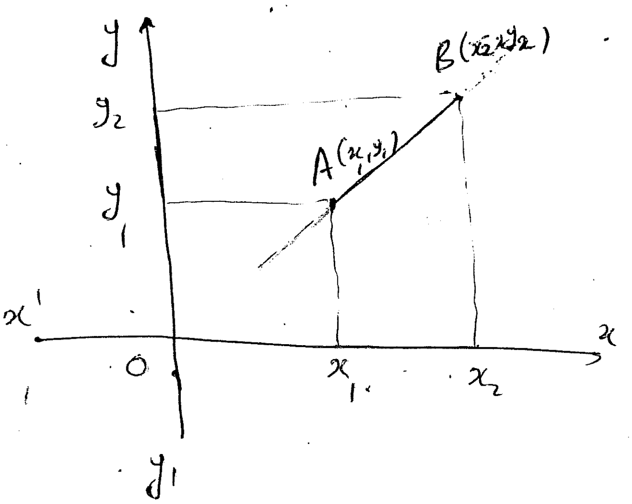
$y'y \ni K(0,2)$, $L(5,0) \in x'x$

$O(0,0)$ نقطة مبدأ الإحداثيات

لأن $x=y=0$



*) حساب المسافة بين نقطتين (أو البعد بين نقطتين): في مستوٍ مزود بمعلم إحداثيات ديكارتي قائم xoy متعامد، نفرض لدينا نقطتان



$A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2)$

(حيث $y_1 \neq y_2$, $x_1 \neq x_2$)

كما في الشكل جانباً.

إن البعد أو المسافة بين هاتين النقطتين A و B تعطى بالعلاقة الآتية:

$$d = d(A,B) = AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad \dots\dots \quad (1)$$

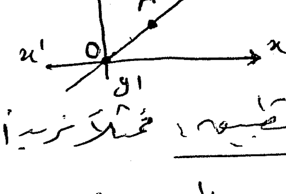
وهي ذاتها طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$.

ملاحظة: قصدنا بـ $d = AB$ طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ وبـ $|\overrightarrow{AB}|$ طول أو طويلة المتجه $\overrightarrow{AB}$، ونلاحظ أن رمز المستقيم (AB) أو بحرف واحد مثل L.

أما في حالة كانت النقطتان على محور واحد فإن ذلك يعني أن البعد بين النقطتين x_1 و x_2 على محور الأعداد $x'x$ يعطى بالشكل: $d(x_1, x_2) = |x_2 - x_1|$

مثال (1): احسب البعد أو المسافة بين النقطتين $A(x,y)$ و $O(0,0)$ مبدأ الإحداثيات في المستوي xoy

الحل: نطبق دستور المسافة (1) مباشرة:



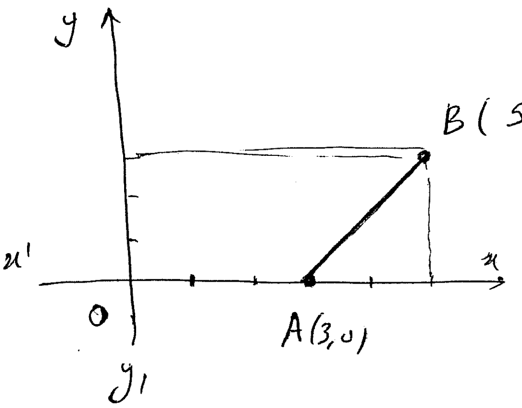
$$d = d(O,A) = OA = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

تطبيق: مثلاً نريد أن نحسب البعد بين النقطتين $O(0,0)$, $A(2,1)$ في المستوي xoy:

نطبق مباشرة:

$$d = OA = \sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

مثال آخر: احسب البعد (المسافة) بين النقطتين $A(3,0)$, $B(5,3)$ ، مع التوضيح بالرسم



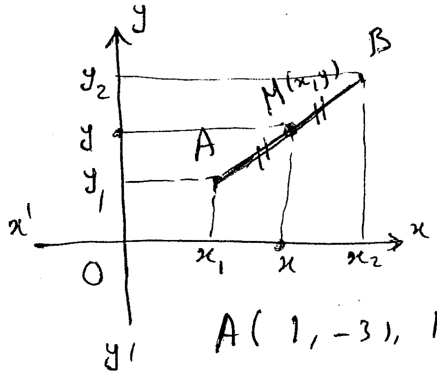
الحل: نطبق مباشرة (1):

$$d = AB = \sqrt{(5-3)^2 + (3-0)^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

*) منتصف قطعة مستقيمة: إذا كانت $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ نقطتان في المستوي xoy

ولنوجد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ بالشكل:

نرمز لإحداثيات المنتصف بالرمز $M(x,y)$ وعندها نجد:



$$x = x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \dots (2)$$

مثال (تطبيق عددي): دائرة قطرها $\overline{AB}$ حيث $A(1,-3)$, $B(7,5)$

المطلوب: عين مركز هذه الدائرة واحسب طول نصف قطرها.

الحل: مباشرة نطبق (1)، نجد:

$$d = AB = \sqrt{(7-1)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

ومنه (طول نصف قطرها):

$$R = \frac{d}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

إحداثيات مركزها نطبق (2):

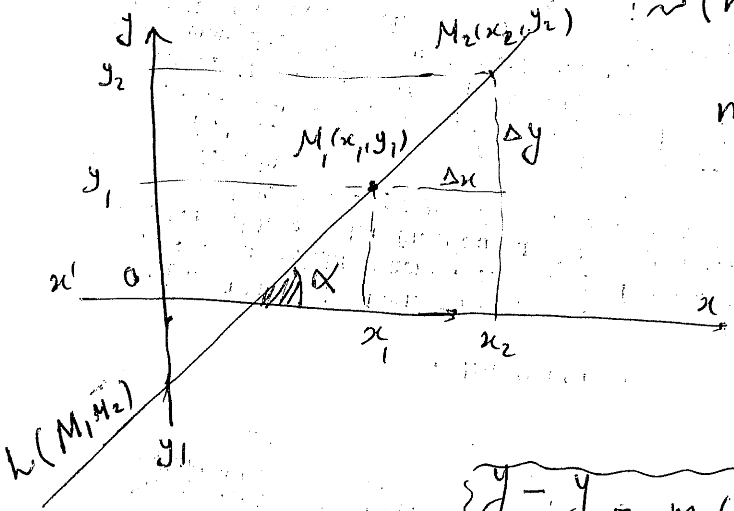
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+7}{2} = 4$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1$$

*) معادلة المستقيم في المستوي: نستعرض هنا الأشكال المختلفة لمعادلة المستقيم في المستوي:

1) معادلة مستقيم مار من نقطتين: أي نعرف نقطتين منه مثل $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$

وهنا علينا أولاً معرفة ميله (نرمزه بـ m) من:



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \dots (3)$$

كما الشكل جانباً

- وأصبح هنا علينا إيجاد معادلة مستقيم علم ميله ويمر من نقطة منه:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)} \quad \dots (4)$$

بالإصلاح نجد: $y = mx + p$ (الصيغة المختصرة لمعادلة مستقيم) أو $ax + by + c = 0$ & $\boxed{m = \frac{-a}{b}}$; $b \neq 0$

m: ميله، p: الجزء المقطوع من المحور yy'

$a \neq 0, b \neq 0$ (معاً)

قانون الميل

ملاحظة: ① الميل (m) هو ظل الزاوية التي يشكلها بين ذلك المستقيم والمحور السيني $x'x$، أي:

$$m = \tan \alpha$$

② لرسم مستقيم ما في المستوي xoy يكفينا تعيين نقطتين منه في هذا المستوي كما تعلمنا سابقاً.

مثال (توضيحي):

(1) أوجد ميل المستقيم المار من النقطتين: $M_1(-3,1), M_2(5,-3)$

(2) اكتب معادلة مستقيم ميله $\left(\frac{2}{3}\right)$ ويمر بالنقطة $C(5,4)$.

الحل: (1) الميل (m) هو (الصيغة 3)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-1}{5+3} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

(2) هنا مطلوب معادلة مستقيم ميله $m = \frac{2}{3}$ معلوم ويمر بالنقطة $C(5,4)$، نطبق الصيغة (4)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y-\cancel{4}=\frac{2}{3}(x-5)$$

بالإصلاح :

$$y-4=\frac{2}{3}x-\frac{10}{3} \Rightarrow$$

$$y=\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}+\frac{4}{1} \Rightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$$

وهي المعادلة المطلوبة.

ملاحظة: ٥) يكون المستقيمان متوازيان (أو منطبقان) إذا كان: $m_1 = m_2$ (أي $L_1 // L_2$ شرط)

٥) والمستقيمان متعامدان إذا كان: $m_1 \cdot m_2=-1 \Rightarrow m_2=-\frac{1}{m_1}$

تطبيق عددي: مستقيم (L_1) معادلته: $L_1: 2x-5y+8=0$ والمطلوب:

① هل النقطة $B(-4,0)$ تنتمي إلى المستقيم المفروض (L_1)؟ ثم اكتب معادلته بالشكل $y=mx+p$

② أوجد معادلة المستقيم الموازي له والمار من مبدأ الإحداثيات (سمه L_2)

③ " " " العمودي عليه والمار من النقطة $K(4,1)$ (سمه L_3)

مع الرسم لجميع الحالات.

الحل:

① انتماء النقطة من عدمه: نعوض إحداثيات النقطة في معادلة المستقيم فنجد.

$$2(-4)-5(0)+8=0 \Rightarrow -8+8=0 \Rightarrow 0=0$$

محققة أي $B \in L_1$ أي تنتمي إليه.

② إيجاد المعادلة المستقيم الموازي له: نوجد ميل (L_1) أولاً: $m_1=\frac{-a}{b}=\frac{2}{5}$

حسب شرط التوازي:

$$m_1=m_2=\frac{2}{5}$$

الآن معادلة مستقيم ميله معلوم ويمر من نقطة معطاة حسب (4):

$$y-y_1=m_2(x-x_1) \Rightarrow y-0=\frac{2}{5}(x-0) \Rightarrow \boxed{y=\frac{2}{5}x}$$

هي معادلة (L_2)

③ معادلة المستقيم العامودية، حسب شرط التعامد:

$$m_3 = -\frac{1}{m_1} = \frac{-5}{2}$$

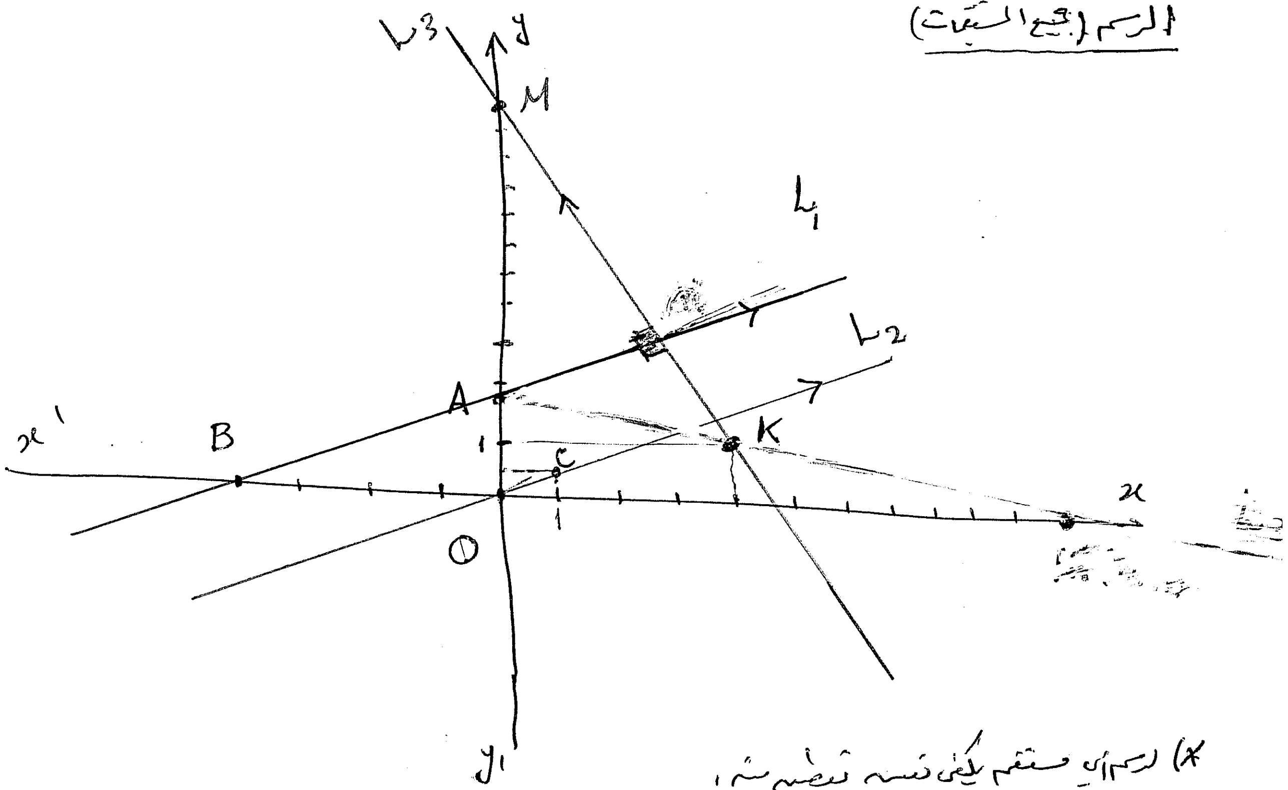
ومنه حسب (4) أعلاه،

$$y - y_1 = m_3 (x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -\frac{5}{2}(x - 4) \Rightarrow$$

$$y - 1 = -\frac{5}{2}x + 10 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{5}{2}x + 11}$$

معادلة (L_3)

الرسم (جميع المستقيمات)



* لرسم أي مستقيم يكفي تعيين نقطتين منه،

الأول (L_1) نعين هاتين النقطتين من الجدول، ثم في المستوي.

L_1:

x	0	-4
y	$\frac{8}{5}$	0

$A\left(0, \frac{8}{5}\right)$, $B(-4, 0)$

الثاني (L_2) من الجدول،

L_2:

x	0	1
y	0	$\frac{2}{5}$

$O(0,0)$, $C\left(1, \frac{2}{5}\right)$

الثالث (L_3) من الجدول كالتالي،

L_3:

x	0	4
y	11	1

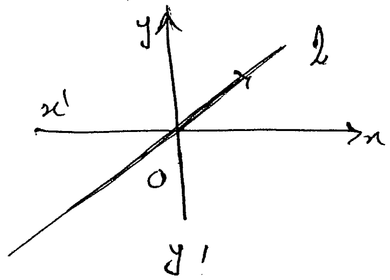
$K(4,1)$, $M(0,11)$

ثم نرسمها في المستوي

ب) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل (أو بمبدأ الإحداثيات):

هو: $\boxed{y = mx}$ ....(5) حيث m الميل ويمر بالنقطة $O(0,0)$

كما في الشكل:



مثال: أوجد معادلة المستقيم المار بمبدأ الإحداثيات وميله يساوي 1، ثم ارسمه.

الحل: كما نعلم معادلة مستقيم ميله معلوم ويمر بنقطة هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

وهنا

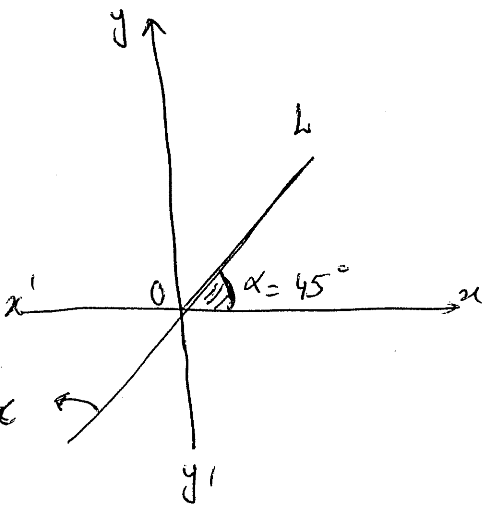
$$m = 1$$

$$(x_1, y_1) = O(0,0)$$

بالتعويض في المعادلة:

$$\boxed{y = x}$$

وهذا المستقيم يسمى منصف الربعين الأول والثالث كما نعلم

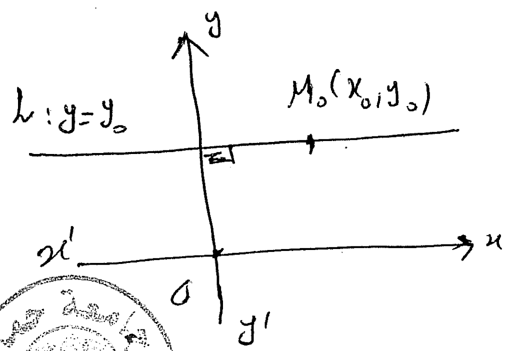


ت) معادلة مستقيم مار بنقطة معلومة وموازي للمحور السيني:

إن معادلة المستقيم المار بالنقطة $M_0(x_0, y_0)$ والموازي للمحور السيني أو المحور $x'x$ هي:

$\boxed{y = y_0}$ ....(6)

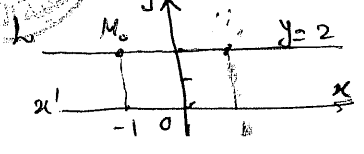
كما في الشكل جانباً.

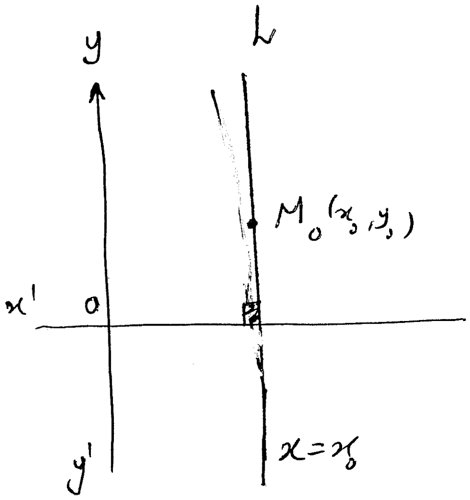


تطبيق: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $M_0(-1,2)$ والموازي لـ $x'x$ ثم ارسمه

الحل: إن معادلة هذا المستقيم هي: $\boxed{y = y_0 = 2}$

كما في الشكل.





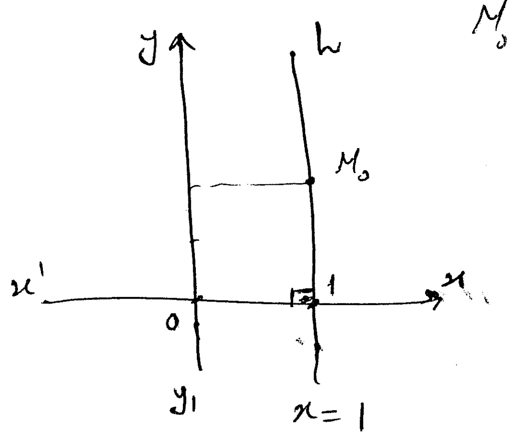
ث) معادلة مستقيم مار بنقطة معلومة ويوازي المحور الصادي :

إن معادلة المستقيم المار بالنقطة $M_0(x_0,y_0)$ والموازي للمحور الصادي أي لـ $y'y$ هي :

$$\boxed{x = x_0} \quad \cdots 7$$

كما في الشكل جانباً

تطبيق : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $M_0(1,2)$ والموازي للمحور $y'y$ مع الرسم.



الحل : إن معادلة هذا المستقيم هي :

$$\boxed{x = x_0 = 1}$$

كما في الشكل.

سنة أولى (تقنيات الحاسوب) - 2018-2019
2020-2021-2022

المحاضرة (4)

رياضيات (1) نظري

التوابع العددية ورسم خطوطها البيانية

*) تعريف التابع العددي أو التابع الحقيقي:

لنفرض أن A و B مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من $\mathbb{R}$ (مجموعة الأعداد الحقيقية أو المحور الحقيقي)

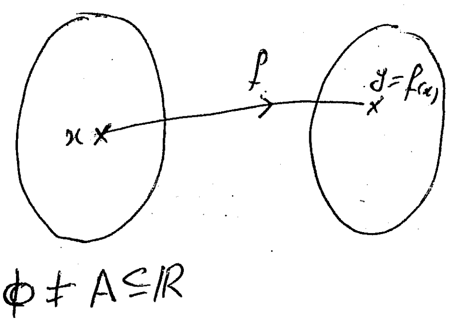
أي: $(\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$ ، $\phi \neq B \subseteq \mathbb{R})$.

التابع (أو الدالة) هو علاقة من المجموعة الأولى A إلى المجموعة B الثانية بحيث أن كل عنصر في A يرتبط بعنصر واحد فقط في B، أي نقول إن f تابع من المجموعة الأولى A إلى المجموعة B الثانية، إذا كان من أجل أي عنصر $x \in A$ يقابله عنصر وحيد $y \in B$ بحيث أن $y = f(x)$ ونكتب:

$$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

أو $y = f(x)$ أو f فقط للدلالة أنه لدينا تابع من A إلى B.

نسمي عادة المجموعة الأولى A منطلق التابع f،
= = B مستقر التابع f،
و $y = f(x)$ قاعدة الربط له (أي صورة x وفق f هي y)



$\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$

إذاً التابع يتميز بثلاثة هي المنطلق (A) (وتسمى مجموعة تعريف أيضاً ونرمز لها بـ: D_f)
المستقر B (تسمى مجموعة قيم التابع)، وقاعدة الربط f حيث لكل عنصر من المنطلق صورة وحيدة وفق f من المستقر.

وبشكل آخر: نقول عن المتغير y إنه تابع في المتحول المستقل x، إذا قابل كل قيمة للمتحول x قيمة معينة للمتغير y ونكتب اختصاراً $y = f(x)$.

أي x هو المتحول المستقل و y هو المتحول التابع ونسمي التابع عندئذٍ تابعاً في متغير واحد.

*) <u>مدى التابع (أو المستقر الفعلي)</u> : ونرمز له R_f (range) أو $f(A)$ أي أنه :

الصورة المباشرة للمنطلق أو مجموعة التعريف

$$R_f = \{ f(x) : x \in A \}$$

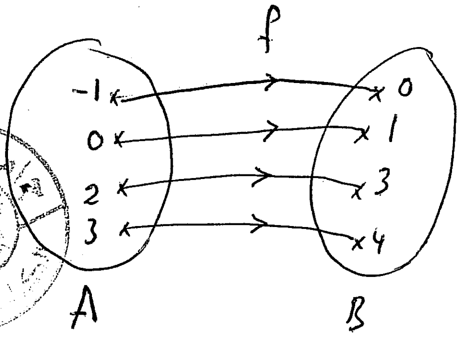
وهي مجموعة جزئية من B أو كل B.

*) <u>منحنى أو بيان التابع</u> f (أو المخطط البياني) : هو مجموعة الأزواج المرتبة $(x, f(x))$ لجميع العناصر x التي تقع في منطلق أو مجموعة تعريف التابع أي هي :

$$\{(x, f(x)) ; x \in A , y = f(x)\}$$

- لرسم منحنى التابع f (أو المخطط البياني) يجب تعيين بعض النقاط (أي الأزواج) التي تقع في منحنى التابع وذلك باختيار بعض قيم للمتغير المستقل x والتي تنتمي إلى منطلق التابع وإيجاد قيم المتغير التابع المناظرة لقيم x ثم نقوم بتعيين النقاط أو الأزواج $(x, f(x)) = (x, y)$ في مستوي الإحداثيات الديكارتية ثم نقوم بتوصيل النقاط مع بعضها البعض بواسطة منحنٍ أملس وهذا المنحنى يمثل منحنى التابع المطلوب (ونرمز هنا لمنحنى أو بيان أو المخطط البياني بـ C_f).

<u>مثال (١)</u> : لنفرض أن f علاقة من المجموعة $A = \{-1, 0, 2, 3\}$ إلى المجموعة $B = \{0, 1, 3, 4\}$ كما في الشكل المجاور :



: $f(-1) = 0 , f(0) = 1 , \ldots$

نلاحظ أن f هنا تمثل تابع وأنه يمكننا تعريف هذا التابع بالعلاقة (أو بالصورة) :

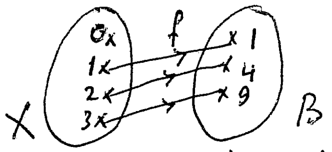
$y = f(x) = x + 1$ (قاعدة الربط بين x و y)

لكل قيم x التي تقع في منطلق التابع أي مجموعة تعريفه هي $D_f = A = \{-1, 0, 2, 3\}$ ومستقره هو المجموعة التالية :

$$B = \{0, 1, 3, 4\}$$

وأما العلاقة g من المجموعة $X = \{0, 1, 2, 3\}$ إلى المجموعة $B = \{1, 4, 9\}$ ومعرفة كالتالي :

$$y = f(x) = x^2 ; \forall x \in X$$



من الواضح أن العلاقة g لا تمثل تطبيقاً من X إلى B، لأن العنصر $0 \in X$ لا يرتبط بأي عنصر من B تحت تأثير العلاقة g.

مثال (2): لتكن لدينا التابع:

$$y = f(x) = 4x - 3$$

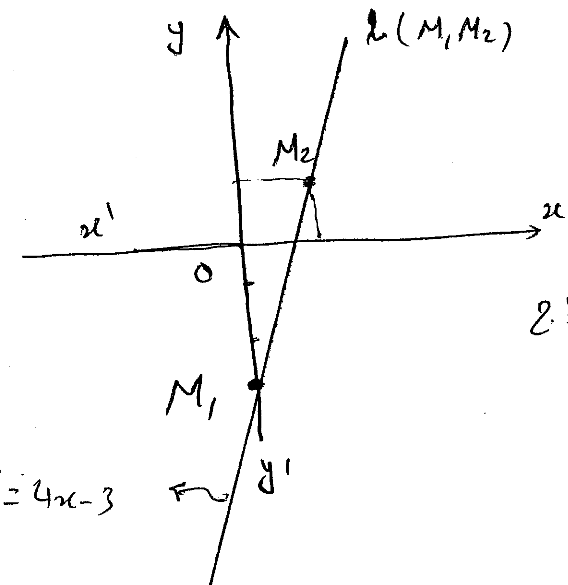
نلاحظ أنه من أجل أي قيمة ممكنة للمتحول x يأخذ y قيمة معينة (وحيدة)، فمثلاً من أجل $x=1$ يكون $y = f(1) = 1$ ومن أجل $x = -2$ نجد: $y = f(-2) = -11$

وهنا يمكن للمتحول x (المستقل) أن يأخذ أي عدد حقيقي، مما يعني أن منطلقه أو مجموعة تعريفه هي: $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ كما يمكن أن نستنتج أن مستقره هو $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ وهو مستقره الفعلي أيضاً

ولا نشك أن هذا التابع صحيح (خطي أي من الدرجة الأولى لـ x)، وخطه البياني مستقيم يقطع المحورين لا محالة، ويكفي لرسمه أن نعين نقطتين مختلفتين بواسطة هذا التابع الذي نعين ذلك من خلال الجدول:

x	0	1
y	-3	1

ومنه: الأزواج $M_1(0, -3)$ ، $M_2(1, 1)$



$y = 4x - 3$ (وهو مستقيم مائل)

ملاحظة: ① في هذا المقرر سنهتم بشكل أساسي بالتوابع ذات المتغير الواحد ونسمي هذه التوابع بالحقيقية أي ذات المتغير الحقيقي الواحد (وهنا $y = f(x)$).

② وهنا منطلق التابع (أي مجموعة تعريفه) D_f حيث $y = f(x)$ وهو أوسع مجموعة جزئية ممكنة من $\mathbb{R}$ أو كل $\mathbb{R}$ والتي عناصرها x تجعل قيم التابع $f(x)$ حقيقية، ونعتبر المستقر هو $\mathbb{R}$ أي كلها.

*) تعيين مجموعات التعريف (أو منطلق) للتابع، وذلك من خلال الأمثلة الآتية (مع رسم بعض خطوطها البيانية):

مثال (1): أوجد منطلقه والمدى كل من التابعين ثم ارسم خطه البياني:

a) $y = f(x) = 2x + \frac{3}{2}$, b) $y = g(x) = x^2$

الحل:

(a) إذا كان x عدد حقيقي فإن $2x + \frac{3}{2}$ يكون عدد حقيقي

ونعلم بأن منطلقه (أو مجموعة تعريفه) هو جميع الأعداد الحقيقية أي: $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

وإذا أردنا تحديد مداه أي: R_f فإننا نقوم بما يلي: لدينا

أي $-\infty < x < \infty \Rightarrow -\infty < 2x < \infty \Rightarrow -\infty < 2x + \frac{3}{2} < \infty$

$-\infty < f(x) < \infty$ ومنه يكون أن:

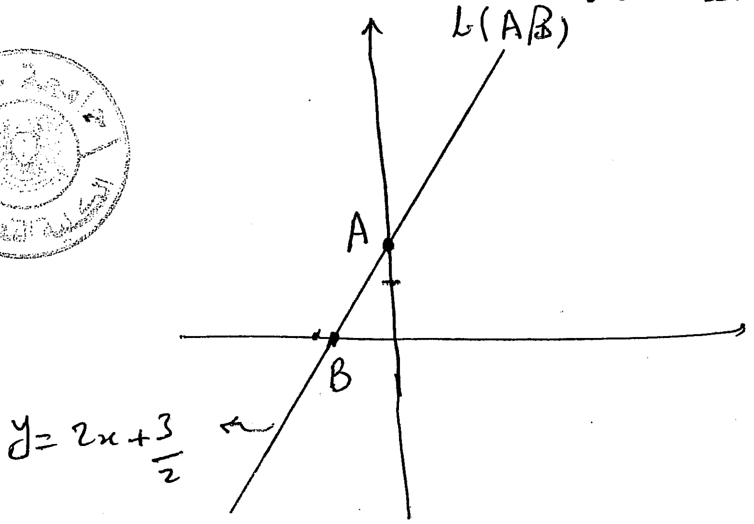
$R_f = (-\infty, +\infty)$

وخط البياني لهذا التابع من الدرجة الأولى لـ x كما أشرنا سابقاً (أرخص) مستقيم تقطع المحور سابقاً ... مناسبة لأن الكثافة الشغ،

ومن الجدول بجواره:

x	0	1	$-\frac{3}{4}$
y	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	0

$A(0, \frac{3}{2})$, $B(-\frac{3}{4}, 0)$



*) نعلم لرسم مستقيم يكفي تعيين نقطتين منه.

(b) إذا كان x من $\mathbb{R}$ فإن x^2 عدد حقيقي غير سالب (موجب أو صفر)

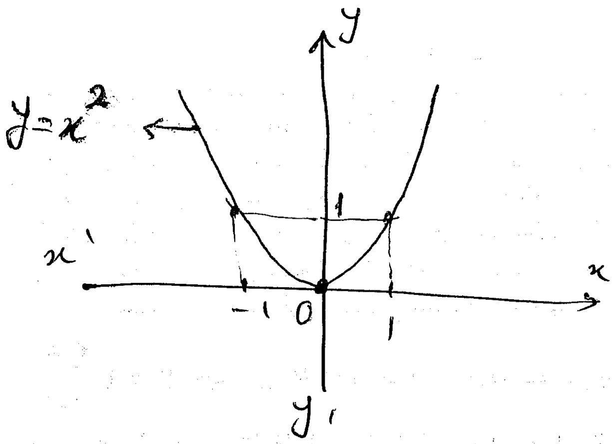
ونعلم بأن منطلق التابع هو كل $\mathbb{R}$ أي: $D_g = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

تحديد مداه: لدينا، $-\infty < x < \infty \overset{\text{بالتربيع}}{\Longrightarrow} 0 \leq x^2 < \infty$ ومنه

$R_f = [0, \infty[$

ويكون (أو الخط البياني) للتابع بأخذ الصورة،

(5)



x	-1	0	1
$y=x^2$	1	0	1

نعين هذه النقاط في المستوي الإحداثي xoy ثم نصل بين النقاط لنحصل على المنحني المطلوب جانباً.

مثال (2): حدد منطقة الدالة الآتية: $y = h(x) = \sqrt{x-1}$

هذه الدالة معرفة طالما كان ما تحت الجذر التربيعي أكبر أو يساوي الصفر أي

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

لذا فمنطقتها: $D_h = [1, \infty[$

والدالة الأخرى: $y = \psi(x) = \dfrac{x}{x+1}$

معرفة لكل $\mathbb{R}$ ما عدا القيم التي تجعل المقام صفراً أي $D_\psi = \mathbb{R} - \{-1\}$

وهكذا، مع أمثلة مشهورة أخرى لإيجاد منطقة أو مجموعة تعريف الدوال.

مثال (3): اذكر منطقة (أو مجموعة التعريف) لكل من الدوال الآتية:

تقطع أجب وتكون على حده العمل

•) $f(x) = \dfrac{3x-1}{(x-2)(x+1)}$; $x \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

•) $g(x) = \dfrac{5}{x^2+1}$; $x \in \mathbb{R}$

•) $h(x) = \sqrt{x^2+4}$; $x \in \mathbb{R}$

•) $\varphi(x) = \dfrac{8}{x^2-9}$; $x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$\psi(x) = \sqrt{4 - |x-1|}$

تعريف (التابعان المتساويان): نقول عن التابعين f و g إنهما متساويان إذا كان لهما المنطلق والمستقر وقاعدة الربط $f(x)=g(x)$. أي إذا كان للتابعين نفس المكونات.

مثال:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$; x \longmapsto \sin 2x$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$; x \longmapsto 2\sin x \cos x$

(* الصفات أو الخواص المميزة للتابع: من هذه الصفات أو الخواص ما يلي:

ليكن التابع: $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto y=f(x)$. نقول عن هذا التابع إنه:

1) **تابع زوجي:** إذا وفقط إذا حقق الشرطين الآتيين:

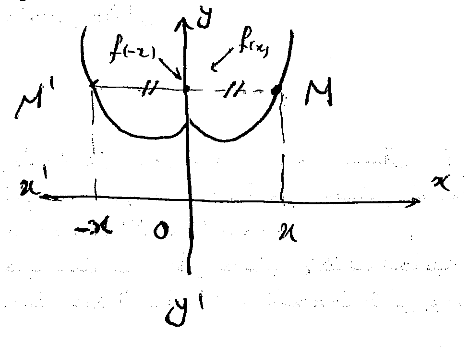
~~$\forall x \in D$~~

ش$_1$) أياً كان $x \in D$ فإن $-x \in D$ (أي المجموعة D متناظرة بالنسبة لمبدأ الإحداثيات)

ش$_2$) أياً كان $x \in D$ فإن $f(-x)=f(x)$

أي إذا لم تتغير قيم التابع بتغير إشارة المتحول المستقل (أي للعددين المتعاكسين x ، $-x$ نفس الصورة وفق التابع الزوجي).

هندسياً: الخط البياني للتابع الزوجي متناظر (أو متماثل) بالنسبة للمحور الشاقولي $y'y$ (أو محور التراتيب) كما في الشكل:



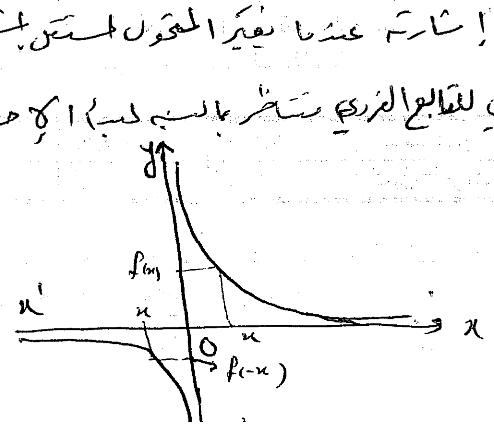
2) **تابع فردي:** إذا وفقط إذا حقق الشرطين الآتيين:

ش$_1$) $\forall x \in D$ فإن $-x \in D$

ش$_2$) $\forall x \in D$ فإن $f(-x)=-f(x)$

أي إذا تغير التابع إشارته عندما نغير المتحول المستقل إشارته (أي للعددين المتعاكسين صورتين متعاكستين وفق التابع)

هندسياً: الخط البياني للتابع الفردي متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات كما يوضح الشكل:



- ملاحظات وإشارات مفيدة : $\boxed{1}$ الشرط الأول هو نفسه في التابع الزوجي والفردي

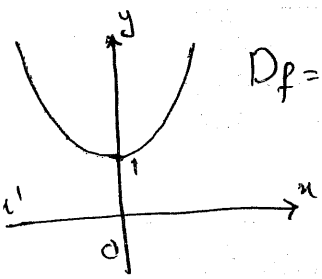
$\boxed{2}$ إذا لم يتحقق هذا الشرط فإن التابع ليس زوجي ولا فردي

الأهم $\boxed{3}$ إذا كانت D_f منطقة (مجموعة تعريف) التابع f يساوي إحدى المجموعات

$[-a,a]$ ، $]-a,a[$ ، $\mathbb{R}^*$ ، $\mathbb{R}$ فإن الشرط الأول يكون محققاً ولا داعي لمناقشته.

أمثلة عن الزوجي والفردي (أولاً...) : (1) التوابع $y=f(x)=x^2$ (وكذلك $y=x^2+1$)

و $y=g(x)=|x|$ و $y=h(x)=\cos x$ جميعها زوجية في $\mathbb{R}$



فمثلاً سنأخذ التابع $y=x^2+1$ فإنه معرف في $\mathbb{R}$ أي $D_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

والشرط الأول محقق أي $\forall x\in D_f$ فإن $-x\in D_f$

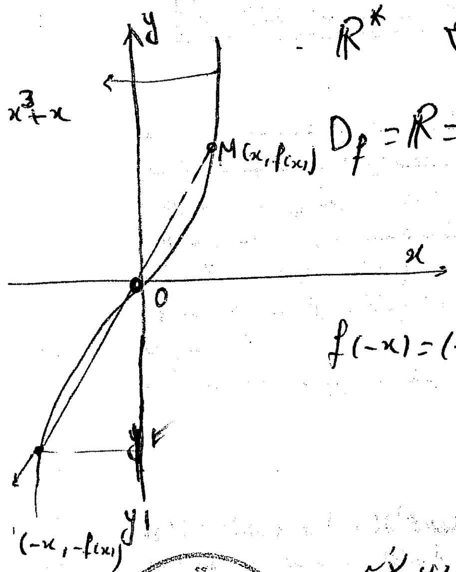
والشرط الثاني محقق لأنه:

$$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x) \Rightarrow f(-x)=f(x)$$

هذا يعني أنه تابع زوجي في $\mathbb{R}$

(2) والتوابع: $y=x$ ، $y=f(x)=x^3+x$ ، $y=\frac{1}{x}$

و $y=\sin x$ فردية في $\mathbb{R}$ والثالث فردي في $\mathbb{R}^*$.



فمثلاً في التابع $y=f(x)=x^3+x$ نلاحظ أنه $D_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

والشرط الأول محقق لأنه: إذا كان $x\in D_f$ فإنه $-x\in D_f$

والشرط الثاني محقق لأنه:

$$f(-x)=(-x)^3+(-x)=-x^3-x=-f(x)$$

أي

$$f(-x)=-f(x)$$

ينتج أنه فردي في $\mathbb{R}$

أما التابع التالي: $y=g(x)=x^2+x$ فلا زوجي ولا فردي لأنه:

$$f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x \neq f(x) \text{ or } (-f(x))$$

أي أنه الشرط الثاني غير محقق.

وأما التابع $y=f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ منطقته هو $\mathbb{R}-\{-1\}$ وهو غير متناظر بالنسبة لـ O .

فلا نبحث عن الزوجي والفردي لهذا التابع.

3) تابع دوري: نقول عن التابع f إنه دوري في D_f مساحة أو مجموعة تعريفه، إذا وجد عدد ثابت T بحيث يكون:

$$\forall x \in D_f \;;\; f(x \mp T) = f(x) \;;\; T \neq 0$$
$$x \mp T \in D_f$$

نسمي عادة أصغر عدد حقيقي موجب يحقق العلاقة السابقة بدور التابع ونرمز له بـ T
ونلاحظ البيان يتكرر في فترات (أو مجالات) طولها $T>0$

مثال: من أهم الأمثلة في ذلك التوابع $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$

من التوابع المثلثية $\sin x$ و $\cos x$ دوريان $T=2\pi$ لأن:

1) $\sin(x+2\pi) = \sin x \;;\; \forall x \in R$
2) $\cos(x+2\pi) = \cos x \;;\; \forall x \in R$

ومن أجل التابع $\tan x$ دوري، $T=\pi$ لأن:

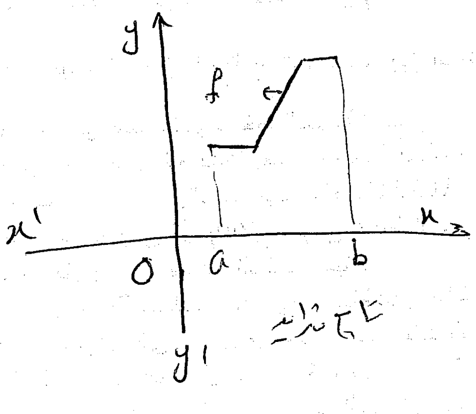
1) $\tan(x+\pi) = \tan x \;;\; \forall x \in R - \{\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in Z\}$

- ودور التابع $f(x)=\cos ax$ حيث ($a \neq 0$) هو $T=|\frac{2\pi}{a}|$ وكذلك بالنسبة $f(x)=\sin ax$

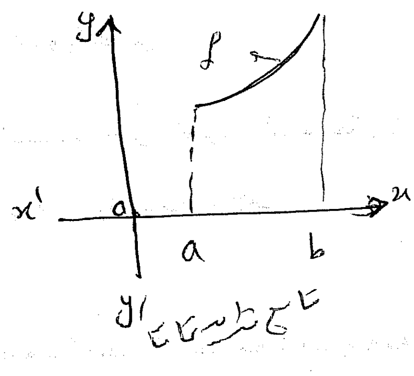
4) تابع متزايد أو متزايد تماماً: على مجموعة جزئية A من R (أي $A \subseteq R$) إذا كان

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \quad (\text{Or } f(x_2)-f(x_1) \geq 0)$$

والتابع متزايد في A.
أما إذا كان $f(x_2) > f(x_1)$ فالتابع متزايد تماماً لاحظ الأشكال

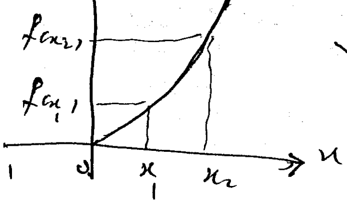


تابع متزايد



تابع متزايد تماماً

مثال: التابع $y=x^2$ تابع متزايد تماماً في $[0,\infty[$ لأن:



$$\forall x_1, x_2 \in [0,\infty[\;,\; x_2 > x_1 \Rightarrow x_2^2 > x_1^2$$

أي

$$x_2^2 - x_1^2 > 0$$

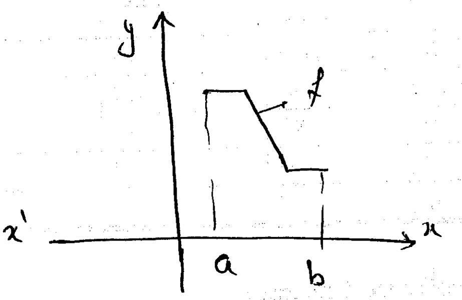
أو نحسب عددياً ...

5) تابع متناقص أو متناقص تماماً: تابع مجموعة جزئية $A \subseteq \mathbb{R}$ ، إذا كان

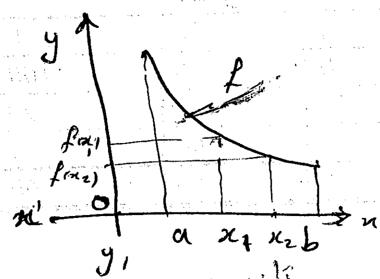
$$\forall x_1, x_2 \in A : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

فيكون التابع تنازلياً في A

أما إذا كان $f(x_2) < f(x_1)$ فالتابع متناقص تماماً كما في الشكل



تابع متناقص



تابع متناقص تماماً

ملاحظة: إن كل تابع متزايد أو متزايد تماماً أو متناقص أو متناقص تماماً يسمى تابع مطرد.

مثال: التابع $f(x) = \frac{1}{x}$ والمعرف في $\mathbb{R}^*$ تابع متناقص تماماً لأن

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*, \quad x_2 > x_1 \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} < 0$$

نجرب بالأعداد:

$$(\quad 3 > 2 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{2} < 0 \quad).$$

وهذا صحيح

6) تابع محدود: نقول عن تابع f والمعرف في $[a,b]$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ ، $a < b$ إنه محدود إذا كانت مجموعة مستقره العلوي محدودة (أي مجموعة محدودة) أي:

$$|f| = |f(x)| \leq M \; ; \quad \forall x \in [a,b]$$

مثال: التابع $f(x) = \sin x$ والمعرف على $\mathbb{R}$ محدوداً على $\mathbb{R}$

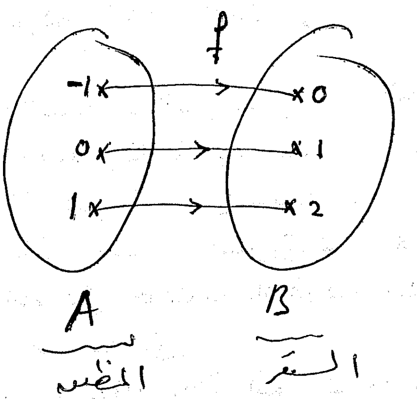
$$|f(x)| = |\sin x| \leq 1 \; ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

أي أن $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، $x \in \mathbb{R}$

*) التابع العكسي أو التابع المركب:

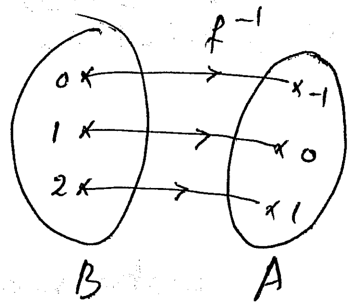
أ) التابع العكسي: مفهوم التابع: $f : A \to B \; ; \; x \mapsto y = f(x)$ تابع عكسي رمزه f^{-1} إذا كان التابع f تقابل (أي شامل ومتباين)

فمثلاً لو أخذنا التابع f والممثل بالمخطط السهمي التالي:



فنلاحظ أنه تقابل لأنه متباين وغامر ولهذا يوجد له تابع عكسي (أو معاكس) نرمز له اصطلاحاً بـ f^{-1}

فهنا يصبح f^{-1} بالشكل

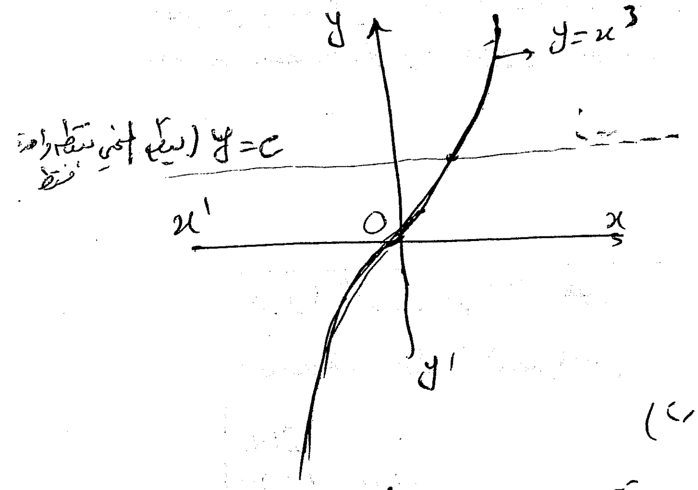


مع ملاحظة أن منطلق f يصبح مستقر f^{-1} ومستقر f منطلق لـ f^{-1}.

ملاحظة:

1) إن $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$ ليس هو المقلوب
وليس للتابع الزوجي تابع عكسي لأنه لا يكون تقابل

2) إذا كان التابع متزايد تماماً فهذا يعني أن التابع f يكون تقابل (أي متباين وغامر) لذا السؤال ويكون تابع عكسي هو f^{-1}



مثال: التابع $y=x^3$ تابع متزايد تماماً في $\mathbb{R}$.

أي إذا أخذنا أي مستقيم معادلته $y=c$ (يوازي محور الفواصل) ولا يتقاطع بمنحني التابع بأكثر من نقطة فإن التابع يكون تقابل وله تابع عكسي هو f^{-1}.

وهذا الشرطان لكون التابع تقابل

ولنوجد معادلة التابع العكسي للتابع:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; x \longmapsto f(x)=x^3$$

نحل هنا: $y=x^3$ بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين: $x=\sqrt[3]{y}$

وبتبادل x و y نحصل:

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$$

مثال: هل للتابع $y=g(x)=x^2$ تابع عكسي في المجال (مطلقاً) $[0,+\infty[$

الحل: نعم لأنه تابع متزايد تماماً في هذا المجال، ولذا له تابع عكسي يوجد له.

لنضع $y=x^2$ ثم نأخذ الجذر التربيعي للطرفين نجد: $x=\mp\sqrt{y}$

لكننا نختار $x=\sqrt{y}$ (الجذر الموجب) لأن $x\in[0,\infty[$ ، ولكن درجت العادة أن نأخذ x هو المتحول المستقل و y هو المتحول التابع وعليه فإن التابع العكسي يكون بالشكل.

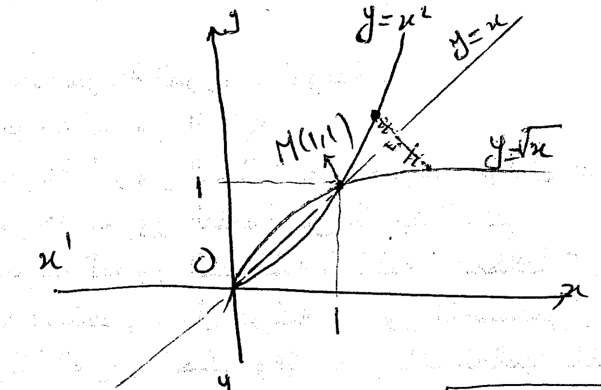
$$y=f^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

وهكذا فإن:

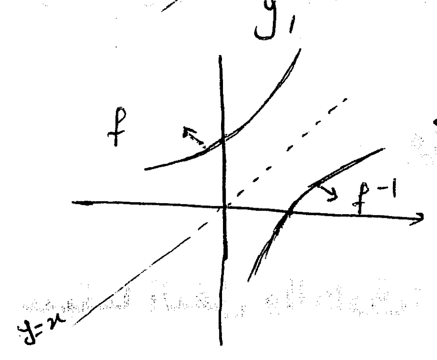
$$f:[0,\infty[\longrightarrow[0,\infty[\;;\; x\longmapsto y=f(x)=x^2$$

والتابع العكسي هو:

$$f^{-1}:[0,\infty[\longrightarrow[0,\infty[\;;\; x\longmapsto y=f^{-1}(x)=\sqrt{x}$$



ملاحظة: يجب أن نلاحظ أن التابع f وتابعه العكسي متناظران بالنسبة لمنصف الربعين الأول والثالث $y=x$ كما هو واضح بيانياً.



إذا كان $f:A\longrightarrow B$ تقابل فإن: $f^{-1}:B\longrightarrow A$ تابع العكسي

ب) التابع المركب (أو تركيب أو تحصيل تابعين):

ليكن لدينا التابعان $f:A\to B$ ، $g:B\to C$ حيث أن A,B,C مجموعات جزئية من $\mathbb{R}$. نعرف تركيبهما (أو التابع المركب الذي نحصل عليه من تركيب التابعين f و g) والذي يرمز له بالرمز $h=g\circ f$ ونكتب:

$$h=g\circ f: A\longrightarrow C \;;\; x\longmapsto h(x)=(g\circ f)(x)=g[f(x)] \;;\; \forall x\in A$$

حيث إن $g\circ f$ تقرأ g تلي f.

أي أن منطلق $h=g\circ f$ هو A ومستقره هو C ، ...

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

ملاحظة: علينا أن ننتبه لحصول ثم إمكانية التركيب ممكنًا أم لا وهذا سيكون من خلال الأمثلة.

مثال توضيحي (1): إذا كان $f(x)=2x-3$ و $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$ فأوجد التابع $g\circ f$ إن ...

مع تحديد منطلقه ومستقره إن أمكن ...

الحل: لدينا:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto f(x)=2x-3 \quad \& \quad g:\mathbb{R}\to(0,1]\ ;\ x\mapsto g(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

إن التركيب $g\circ f$ ممكن لأن مستقر f هو $\mathbb{R}$ وهو نفس منطلق g وهذا هو السبب وعليه توجد قاعدة الربط لـ $h=g\circ f$ أي:

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g(2x-3)=\frac{1}{(2x-3)^2+1}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & (0,1] \end{tikzcd} \quad , \quad g\circ f:\mathbb{R}\to(0,1]\ ;\ x\mapsto (g\circ f)(x)=\frac{1}{(2x-3)^2+1}$$

أي منطلقه منطلق f ومستقره مستقر g.

(2) أوجد $f\circ g$ و $g\circ f$ إن أمكن للتابعين:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto y=f(x)=x-10 \quad , \quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto g(x)=x^3$$

الحل: إن $g\circ f$ ممكن لأن مستقر f هو $\mathbb{R}$ وهو نفس منطلق g وعليه:

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g(x-10)=(x-10)^3$$

$$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ x\mapsto g(x)=(x-10)^3$$

وكذلك $f\circ g$ أيضاً لأن مستقر g هو $\mathbb{R}$ وهو نفس منطلق f وعليه:

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f(x^3)=x^3-10$$

ملاحظة: نستنتج $g\circ f \neq f\circ g$ وأي عملية تركيب التوابع ليست ...