المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

تخصص إلكترونيات صناعية وتحكم

دوائر رقمية- 1

126 الك

طبعة ١٤٢٩ هـ

مقدمة

الحمد لله وحده، والصلاة والسلام على من لا نبي بعده، محمد وعلى آله وصحبه، وبعد،

تسعى المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني لتأهيل الكوادر الوطنية المدربة القادرة على شغل الوظائف التقنية والفنية والمهنية المتوفرة في سوق العمل، ويأتي هذا الاهتمام نتيجة للتوجهات السديدة من لدن قادة هذا الوطن التي تصب في مجملها نحو إيجاد وطن متكامل يعتمد ذاتياً على موارده وعلى قوة شبابه المسلح بالعلم والإيمان من أجل الاستمرار قدماً في دفع عجلة التقدم التنموي: لتصل بعون الله تعالى لمصاف الدول المتقدمة صناعياً.

وقد خطت الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج خطوة إيجابية تتفق مع التجارب الدولية المتقدمة في بناء البرامج التدريبية، وفق أساليب علمية حديثة تحاكي متطلبات سوق العمل بكافة تخصصاته لتلبي متطلباته ، وقد تمثلت هذه الخطوة في مشروع إعداد المعايير المهنية الوطنية الذي يمثل الركيزة الأساسية في بناء البرامج التدريبية، إذ تعتمد المعايير في بنائها على تشكيل لجان تخصصية تمثل سوق العمل والمؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني بحيث تتوافق الرؤية العلمية مع الواقع العملي الذي تفرضه متطلبات سوق العمل، لتخرج هذه اللجان في النهاية بنظرة متكاملة لبرنامج تدريبي أكثر التصاقاً بسوق العمل، وأكثر واقعية في تحقيق متطلباته الأساسية.

وتتناول هذه الحقيبة التدريبية " **دوائر رقمية- 1** " لمتدربي تخصص " **إلكترونيات صناعية وتحكم** " في الكليات التقنية موضوعات حيوية تتناول كيفية اكتساب المهارات اللازمة لهذا التخصص.

والإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج وهي تضع بين يديك هذه الحقيبة التدريبية تأمل من الله عز وجل أن تسهم بشكل مباشر في تأصيل المهارات الضرورية اللازمة، بأسلوب مبسط يخلو من التعقيد، وبالاستعانة بالتطبيقات والأشكال التي تدعم عملية اكتساب هذه المهارات.

والله نسأل أن يوفق القائمين على إعدادها والمستفيدين منها لما يحبه ويرضاه: إنه سميع مجيب الدعاء.

الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

تمهيد

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على نبينا محمد بن عبد الله وعلى آله وصحبه وسلم... وبعد،

نتيجة للتطور الذي تشهده المملكة العربية السعودية في شتى مجالات التقنية المختلفة، كان لزاماً تخريج كوادر وطنية قادرة على استيعاب هذه التقنيات بمهارة وإتقان.

وانطلاقاً من حرص ولاة الأمر في هذا البلد المعطاء وإيمانهم وقناعتهم بالاستفادة من هذه التقنيات والأخذ بأسباب التقدم بما يتوافق مع شريعتنا السمحة، ولتحقيق أهداف خطة التنمية، فقد عهدت الدولة إلى المؤسسة العامة للتدريب التقني و المهني مهمة إعداد كوادر فنية مدربة قادرة على استيعاب وسائل التقنية الحديثة والتعامل معها. وانطلاقاً من هذا الهدف النبيل قامت المؤسسة بجهد مشكور في هذا الميدان، حيث تم عمل مسح ميداني لكافة القطاعات الحكومية والصناعية المختلفة في المملكة، كما قامت بعمل ورش مختلفة وذلك بغرض تحديد المواصفات المهنية لكل تخصص فني، ومن ثم عهدت المؤسسة بتكليف بعض الأقسام في الكليات التقنية المختلفة بتأليف وإعداد مناهج نظرية وعملية متوافقة مع مواصفات التخصصات الفنية المختلفة. ومن هنا كانت حقيبة دوائر رقمية- 1من ثمار هذا الجهد الرائع الذي اضطلعت به الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج بالمؤسسة.

وإننا إذ نقدم هذه الحقيبة لطلاب الكليات التقنية، بما يتوافق مع احتياجات الطالب ومستواه الدراسي، وبإسلوب مبسط خالٍ من التعقيد، دون الإخلال بالمحتوى العلمي.

وختاماً، نسأل المولى عز وجل أن يوفق القائمين على هذا المشروع لكل خير، كما نسأله تعالى أن يوفق أبناءنا المتدربين لفهم هذا المنهج عملياً وأن يجعل أعمالنا خالصة لوجهه الكريم، وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين.

وصلى الله على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه وسلم، ......

دوائر رقمية- 1

مقدمة عن الدوائر المنطقية

مقدمة عن الدوائر المنطقية

1

الأهداف العامة للوحدة

عندما تكمل هذه الوحدة يكون لديك القدرة بإذن الله على:

- معرفة ما هي الدوائر المنطقية.
- معرفة الكميات الرقمية والتماثلية.
- معرفة مجالات استخدام الدوائر المنطقية.
- التعرف على مستويات الإشارة الرقمية.
- التعرف على شكل الموجات الرقمية.

1- 1 مقدمة *Introduction*

لفظ رقمي (*digital*) مستنتج من الطريقة التي يؤدي بها جهاز الحاسب عملياته، عن طريق عد الأرقام (*Counting Digits*). لسنوات عديدة كانت تطبيقات الإلكترونيات الرقمية تستخدم في أنظمة الحاسب. أما اليوم فان التقنية الرقمية مطبقة في مجال واسع من التطبيقات بالإضافة بالطبع إلى الحاسب.

من هذه التطبيقات أجهزة التلفاز، نظم الإتصالات، الرادار، النظم العسكرية، نظم التوجيه، الأجهزة الطبية، التحكم بالعمليات الصناعية وغيرها. التقنية الرقمية تم تطويرها من الدوائر التي تستخدم الصمامات المفرغة إلى الترانزستورات المنفصلة (*Discrete Transistors*) إلى الدوائر المتكاملة المعقدة، والتي يحتوي بعضها على ملايين من الترانزستور.

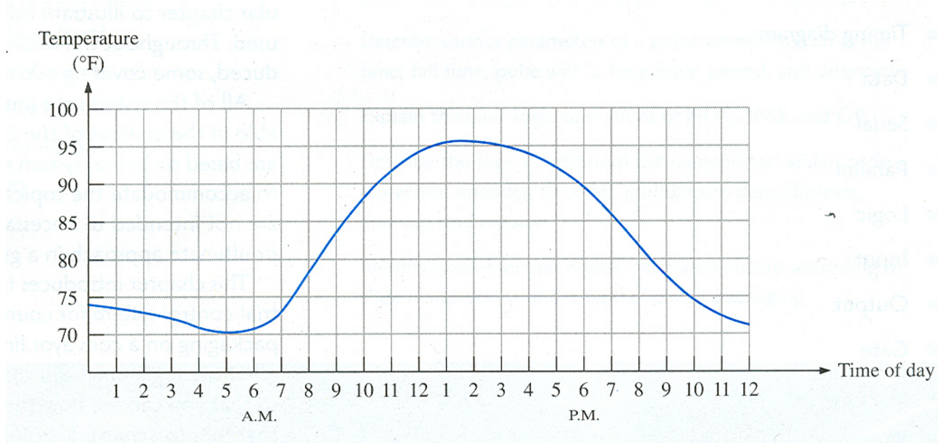
في هذه الوحدة سوف نتعرف على الكميات الرقمية والتماثلية، ومميزات الإشارة الرقمية، وسوف نتعرف أيضاً على مستويات الإشارة وشكل الموجات الرقمية.

1- 2 الكميات الرقمية والتماثلية *Digital and Analog Quantities*

الدوائر الإلكترونية يمكن تقسيمها إلى نوعين رئيسيين: رقمي وتماثلي. الإلكترونيات الرقمية تتضمن الكميات مع قيم متقطعة (*Discrete Values*)، والإلكترونيات التماثلية تتضمن الكميات مع قيم متصلة (*Continuous Values*). وبرغم أننا سوف ندرس في هذه الحقيبة أساسيات الرقمية، ولكن أيضاً يجب معرفة بعض الشيئ القليل عن التماثلية لأن عديد من التطبيقات تتطلب النوعين معاً.

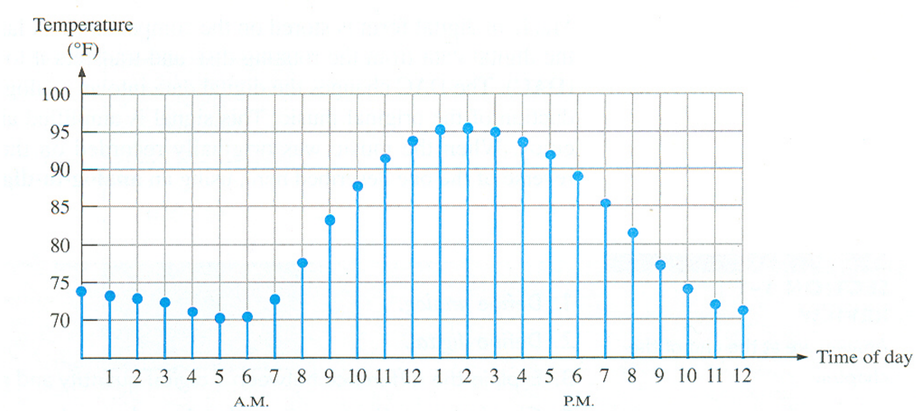
الكمية التماثلية هى التي لها قيم متصلة، والكمية الرقمية هي التي لها مجموعة من القيم المتقطعة. معظم الأشياء التي يمكن قياسها ككمية تظهر في الطبيعة على شكل تماثلي. وكمثال على ذلك، درجة حرارة الهواء تتغير على مدى متصل من القيم خلال يوم ما، فدرجة الحرارة لن تتغير مثلاً من 70ºF إلى 71ºF لحظياً، ولكنها تأخذ بالتدريج القيم المحصورة بين 70ºF وبين 71ºF.

إذا قمنا برسم درجة الحرارة مع يوم ما في فصل الصيف، فسوف نحصل على منحنى متصل كالموضح في شكل(1- 1). وهناك أمثلة أخرى للكميات التماثلية مثل الوقت، الضغط، المسافة والصوت.



شكل(1- 1) رسم لكمية تماثلية (درجة الحرارة مع الوقت).

إذا قمنا فقط بأخذ درجة الحرارة مثلاً كل ساعة بدلاً من رسمها بصورة متصلة كما في الشكل السابق، الآن يكون لدينا عينات (*Sampled Values*) تمثل درجة الحرارة عند نقاط منفصلة للوقت (كل ساعة) على مدى 24 ساعة، كما هو موضح في شكل(1- 2).



شكل(1- 2) قيم العينات تمثل الكمية التماثلية في شكل(1- 1).

بهذه الطريقة نحن حولنا ببساطة الكمية التماثلية إلى شكل يمكن الآن تحويله إلى رقمي بتمثيل كل قيمة عينة (*Sampled Values*) بشفرة رقمية (*Digital Code*). من المهم معرفة أن الشكل(1- 2) ليس تمثيلاً رقمياً للكمية التماثلية.

1- 2- 1 مميزات التمثيل الرقمي *The Digital Advantage*

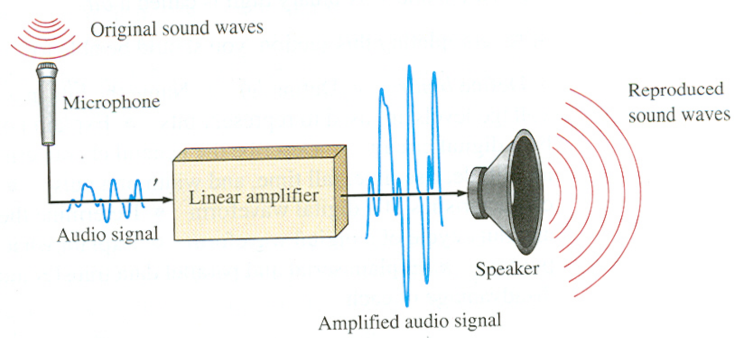
يتميز التمثيل الرقمي عن التمثيل التماثلي في التطبيقات الإلكترونية بعدة مميزات. البيانات الرقمية (*Digital Data*) يمكن إجراء عمليات عليها، وإرسالها بكفاءة أكثر من البيانات التماثلية. وأيضاً البيانات الرقمية لها ميزة عظيمة في حالة ضرورة تخزين البيانات. كمثال، عند تحويل الموسيقى إلى الشكل الرقمي يمكن تخزينها على شرائط كاسيت أو على اسطوانات مدمجة (*CD*) ويمكن إعادة إنتاجها بدقة كبيرة، عنها لو كانت ممثلة على شكل تماثلي.

الضوضاء لا تؤثر على البيانات الرقمية، بينما تؤثر بشكل كبير على الإشارات التماثلية.

1- 2- 2 النظام الإلكتروني التماثلي *An Analog Electronic System*

كمثال على تطبيقات الإلكترونيات الرقمية، سنأخذ المخطط الموضح في شكل(1- 3). هذا المخطط يبين كيف أن الموجات الصوتية (طبيعتها تماثلية) يتم التقاطها عن طريق الميكروفون، وتتحول إلى جهد تماثلي صغير يقال له إشارة صوتية (*Audio Signal*). هذا الجهد يتغير باستمرار معتمداً على إرتفاع درجة الصوت وتردده، ثم يطبق هذا الجهد على دخل مكبر خطي (*Linear Amplifier*).

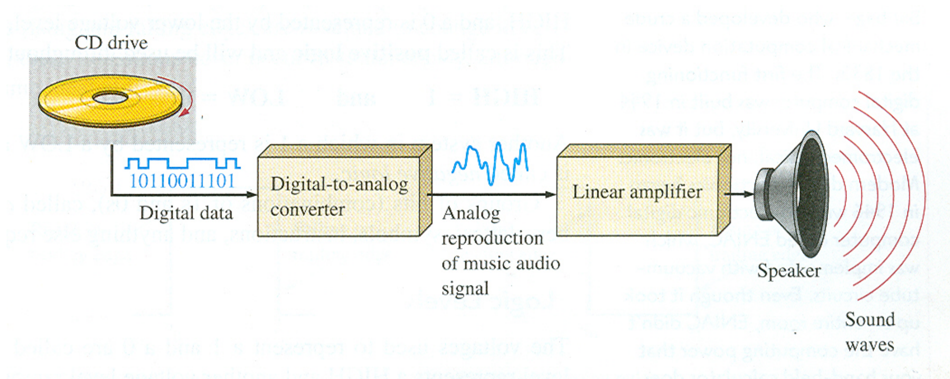
خرج المكبر والذي هو عبارة عن تكبير لجهد الدخل يذهب إلى السماعة (*Speaker*). السماعة تحول الإشارة الصوتية المكبرة مرة أخرى إلى موجات صوتية، والتي لها درجة صوت عالية بالمقارنة بالإشارات الأصلية الملتقطة بالميكروفون.



شكل(1- 3) نظام بسيط لنقل الإشارات الصوتية إلى السماعة.

1- 2- 3 استخدام الطريقة الرقمية والتماثلية في نظام واحد
A System Using Digital and Analog Methods

جهاز تشغيل الأسطوانة المدمجة (CD) مثال على نظام يستخدم كل من الدوائر الرقمية والتماثلية. المخطط المبسط في شكل(1- 4) يبين الأساسيات البسيطة للتشغيل.



شكل(1- 4) الأساسيات البسيطة لمشغل الإسطوانات المدمجة (CD).

الموسيقى في شكل رقمي تكون مخزنة على الإسطوانة المدمجة (CD). نظام الثنائي الضوئي باستخدام أشعة الليزر (*Laser Diode Optical System*) يلتقط البيانات الرقمية من الإسطوانة أثناء دورانها وينقلها إلى مدخل محول الإشارة من رقمي إلى تماثلي (DAC). محول الإشارة يحول البيانات الرقمية إلى إشارة تماثلية والتي هي إشارة كهربائية تم إعادة إنتاجها من الموسيقى الأصلية. هذه الإشارة يتم تكبيرها ثم يتم إرسالها إلى السماعة.

عندما يتم تسجيل الموسيقى في البداية على الإسطوانة المدمجة (CD)، فإن العملية المطلوبة هي عكس الطريقة التي تم شرحها سابقاً، ويتم ذلك باستخدام محول الإشارة من تماثلي إلى رقمي (ADC).

1- 3 الأرقام الثنائية، المستويات المنطقية والموجات الرقمية

Binary Digits, Logic Levels and Digital Waveforms

الإلكترونيات الرقمية تتضمن دوائر ونظم والتي لها فقط حالتين، هاتين الحالتين يمكن تمثيلهما بمستويين مختلفين من الجهد: المرتفع ($HIGH$)، والمنخفض (LOW). ويمكن تمثيل هاتين الحالتين باستخدام مستويات التيار، فتح وغلق المفاتيح، أو بإضاءة أو عدم إضاءة لمبات في النظم الرقمية مثل أجهزة الحاسب، فإن تركيبة من الحالتين تسمى شفرات ($Codes$) تستخدم لتمثيل الأعداد، الرموز، حروف الهجاء وغير ذلك من أنواع المعلومات.

النظام العددي المكون من حالتين يسمى بالنظام الثنائي (*Binary System*) وله رقمين أو رمزين فقط وهما 0,1، الخانة الثنائية أوالرقم الثنائي (*Binary Digit*) يسمى *bit*.

1- 3- 1 الأرقام الثنائية *Binary Digits*

الرقمين 1,0 في النظام الثنائي يطلق عليهم خانات ثنائية (*bits*). في الدوائر الرقمية هناك مستويان مختلفان للجهد يستخدمان لتمثيل الخانات الثنائية (1,0). عموماً، 1 يمثل الجهد الأعلى والذي سوف نطلق عليه *HIGH*، 0 يمثل بمستوى الجهد الأقل والذي سوف نطلق عليه *LOW*. وهذا النوع يسمى بالمنطق الموجب (*Positive Logic*(*HIGH*=1, *LOW*=0.

هناك نظام أخر والذي فيه 1 يمثل بواسطة *LOW*، 0 يمثل بواسطة *HIGH* والذي يطلق عليه المنطق السالب (*Negative Logic*(*HIGH*=0, *LOW*=1.

مجموعة من الخانات الثنائية (*bits*) وهي خليط من 1's, 0's تسمى شفرات (*Codes*) تستخدم لتمثيل الأعداد، الحروف، الرموز، الأوامر أو أي شيئ أخر مطلوب في تطبيق ما.

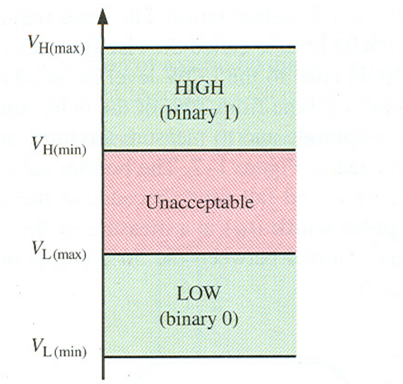
1- 3- 2 المستويات المنطقية *Logic Levels*

الجهود المستخدمة لتمثيل 1,0 تسمى بالمستويات المنطقية. وبشكل مثالي، يمكن القول بأن مستوى واحد من الجهد يمثل *HIGH*، ومستوى أخر من الجهد يمثل *LOW*. في الدوائر الرقمية العملية الجهد *HIGH* ممكن أن يكون أي جهد بين قيمة صغرى محددة وقيمة عظمى محددة. وبالمثل الجهد *LOW* ممكن أن يكون أي جهد بين قيمة صغرى محددة وقيمة عظمى محددة، ولا يمكن حدوث أي نوع من التداخل (*Overlap*) بين المستويات *HIGH* المقبولة والمستويات *LOW* المقبولة.

شكل(1- 5) يوضح المدى العام للمستويات *LOWs*, *HIGHs* لدائرة رقمية. الجهد المتغير $V_{H(max)}$ يمثل القيمة العظمى لمستوى الجهد *HIGH*، والجهد $V_{H(min)}$ يمثل القيمة الصغرى لمستوى الجهد *HIGH*.

القيمة العظمى لمستوى الجهد *LOW* تمثل بمستوى الجهد $V_{L(max)}$، والقيمة الصغرى لمستوى الجهد *LOW* تمثل بمستوى الجهد $V_{L(min)}$. قيم الجهود بين المستوى $V_{L(max)}$ والمستوى $V_{H(min)}$ غير مقبولة في أي عملية. الجهد في المدى الغير مقبول يمكن أن يظهر كمستوى *HIGH* أو كمستوى *LOW* في أي دائرة. وبناء على ذلك، هذه القيم الغير مقبولة لا تستخدم أبداً. ومثال على ذلك، القيم *HIGH* لنوع خاص من الدوائر الرقمية يسمى *TTL* يكون المدى له من *2v-5v*، والقيم *LOW* تكون من المدى *0v-0.8v*. وعليه إذا طبق على الدائرة جهد يساوي *3.5v*، فإن الدائرة سوف تقبل هذا الجهد

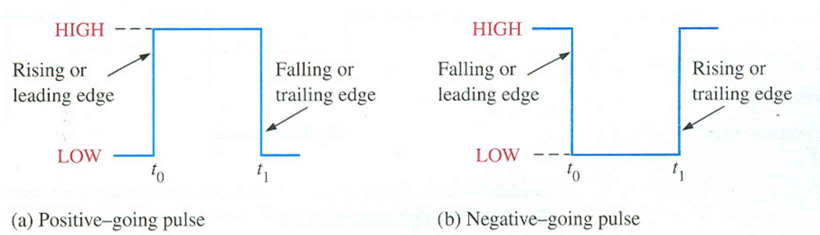
على أنه $HIGH$ أو الثنائي 1. وإذا طبق على الدائرة جهد يساوي $0.5v$، فإن الدائرة سوف تقبل هذا الجهد على أنه LOW أو الثنائي 0. لذلك هذا النوع من الدوائر، الجهود بين $0.8v$ إلى $2v$ لا تقبل ولا تستخدم أبداً.



شكل(1- 5) مدى المستويات المنطقية للجهد للدوائر الرقمية.

1- 3- 3 الموجات الرقمية *Digital Waveforms*

الموجات الرقمية تتكون من مستويات من الجهد تتغير بين المستوى (الحالة) *HIGH* والمستوى (الحالة) *LOW*. شكل(1- 6(a)) يبين نبضة مفردة موجبة الإتجاه (*Positive-going*)، والتي يمكن توليدها عندما يكون الجهد (أو التيار) يتحرك من وضعه العادي في المستوى *LOW* إلى المستوى *HIGH* ويعود مرة أخرى إلى المستوى *LOW*.



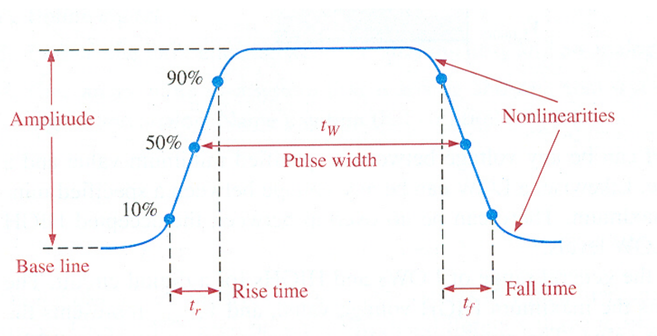
شكل(1- 6) أشكال النبضات المثالية.

النبضة المفردة سالبة الإتجاه (*Negative-going*)، والموضحة في شكل(1- 6(b)) يتم توليدها عندما يتحرك الجهد (أو التيار) من وضعه العادي في المستوى *HIGH* إلى المستوى *LOW* ويعود مرة أخرى إلى المستوى *HIGH*. وعموماً فإن الموجات الرقمية هى عبارة عن سلسلة من النبضات موجبة الإتجاه أو سالبة الإتجاه.

كما رأينا في شكل(1- 6(a))، أن النبضة لها حافتان: الحافة الصاعدة والتي والتي تحدث أولاً عند الزمن t_0، والحافة الهابطة والتي تحدث عند الزمن t_1. للنبضة موجبة الإتجاه، الحافة الصاعدة هي حافة البداية، والحافة الهابطة هي حافة النهاية.

النبضات الموضحة في شكل(1- 6) مثالية، لأن الحافة الصاعدة والحافة الهابطة أفترضنا أنهما يتغيران في زمن يساوي الصفر (لحظياً). عملياً، هذا التغير لا يمكن أبداً أن يحدث لحظياً، ومع ذلك في معظم المجال الرقمي نستطيع أن نفترض النبضة المثالية.

شكل(1- 7) يوضح نبضة غير مثالية. الوقت المطلوب للنبضة لترتفع من المستوى *LOW* إلى المستوى *HIGH* يسمى بزمن الصعود *rise time* (t_r)، والوقت المطلوب للهبوط من المستوى *HIGH* إلى المستوى *LOW* يسمى بزمن الهبوط *fall time* (t_f).

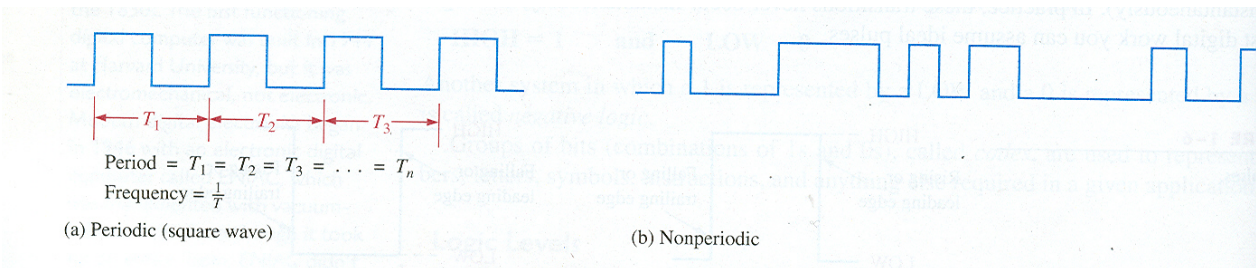


شكل(1- 7) خواص النبضة الغير مثالية.

عملياً، من الشائع قياس زمن الصعود من 10% إلى 90% من إرتفاع النبضة (*pulse amplitude*)، وقياس زمن الهبوط من 90% إلى 10% من إرتفاع النبضة كما هو موضح في شكل1- 7. عرض النبضة هو *pulse width* (t_w) هو عبارة عن قياس الوقت بين نقطتي 50% من عند الحافة الصاعدة والحافة الهابطة كما هو موضح بالشكل.

معظم الموجات التي تستخدم في الأنظمة الرقمية تتكون من سلسلة من النبضات، وتسمى أحياناً باسم قطار النبضات *pulse train*، ويمكن تقسيمها إلى نوعين رئيسيين: دورية وغير دورية. الشكل الموجي للنبضات الدورية هو الذي يكرر نفسه خلال فترة زمنية ثابتة تسمى الدورة *period (T)*. التردد *frequency (f)* هو معدل تكرار النبضة لنفسها ويقاس بوحدة الهيرتز *hertz (Hz)*. الشكل الموجي

للنبضات غير الدورية، بالطبع لا يكرر نفسه خلال فترة ثابتة وربما يحتوي على نبضات عشوائية في عرضها أو عشوائية في اختلاف الفترة الزمنية بين النبضات. كمثال على كل نوع من النوعين السابقين من النبضات موضح في شكل(1- 8).



شكل(1- 8) أمثلة على شكل الموجات الرقمية.

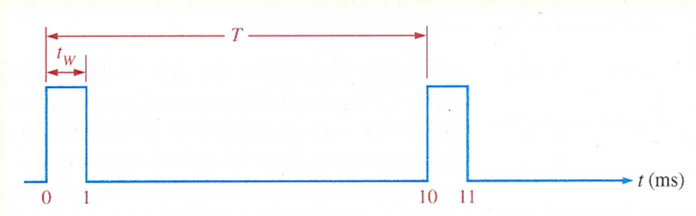
التردد (f) لموجة من النبضات هو مقلوب الدورة (T). العلاقة بين التردد والدورة يمكن التعبير عنها كما يلي:

$$f = \frac{1}{T} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{1}{f}$$

من الخواص الهامة للشكل الموجي للنبضات الدورية هو ما يسمى بدورة التشغيل $(duty\ cycle)$. دورة التشغيل هي النسبة بين عرض النبضة (t_W) إلى الدورة (T)، ويمكن التعبير عنه كنسبة مئوية كما يلي:

$$Duty\ Cycle = \left(\frac{t_w}{T}\right) 100\%$$

مثال: جزء من شكل **موجي دوري موضح في شكل(1- 9). جميع القياسات الموضحة مقاسة باستخدام وحدة المللي ثانية** (ms). **إحسب قيمة كل من: الدورة** (T)، التردد (f)، دورة التشغيل $(duty\ cycle)$.



شكل(1- 9) الشكل الموجي للمثال.

الحل: تقاس الدورة (T) من الحافة الصاعدة للنبضة الأولى إلى الحافة الصاعدة للنبضة الثانية كما هو موضح في شكل(1- 9) وعليه تكون $T = 10ms$.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10ms} = 100\ Hz$$

$$Duty\ Cycle = \left(\frac{t_w}{T}\right)100\% = \left(\frac{1ms}{10ms}\right)100\% = 10\%$$

تدريبـــات

1) عرف الكمية التماثلية؟

2) عرف الكمية الرقمية؟

3) إشرح الفرق بين الكمية الرقمية والكمية التماثلية؟

4) عرف كلمة ثنائي؟

5) ماذا تعني كلمة الخانة الثنائية (bit)؟

6) ما هي الخانات الثنائية في النظام الثنائي؟

7) كيف يقاس كل من زمن الصعود وزمن الهبوط للنبضة؟

8) إذا علمت الدورة (T) لشكل موجي ما، كيف يمكن إيجاد التردد (f)؟

9) شكل موجي دوري له عرض النبضة يساوي $25\mu s$، والدورة (T) تساوي $150\mu s$. إحسب قيمة التردد، ودورة التشغيل؟

دوائر رقمية- 1

الأنظمة العددية

الأهداف العامة للوحدة

عندما تكمل هذه الوحدة يكون لديك القدرة بإذن الله على:

- معرفة أنظمة الأعداد الأساسية.
- كيفية تمثيل الأعداد في كل نظام.
- التحويل من النظام العشري إلى مختلف أنظمة الأعداد الأساسية والعكس.
- التحويل بين أنظمة الأعداد الأساسية المختلفة.
- عمليات الجمع والطرح في أنظمة الأعداد الأساسية.

2- 1 مقدمة *Introduction*

إن مـن أفضـل الطـرق لفهـم أي شـيء جديـد هـو مقارنتـه بشـيء معـروف لـدينا وبالتـالي تظهـر لنـا الاختلافات. في هـذه الوحـدة سـوف نتنـاول بالدراسـة النظـام الثنـائي للأعـداد (*Binary Number System*) والذي يعتبر من أهم النظم المستخدمة في الـدوائر الإلكترونيـة الرقميـة (*Digital Electronic Circuits*).

ولكـي نـتمكن مـن فهـم هـذا النظـام العـددي الجديـد، سـوف نقـوم بمقارنتـه بالنظـام العشـري للأعداد (*Decimal Number System*) المألوف لـدينا. وبالإضـافة إلى النظـام الثنـائي للأعـداد هنـاك نظامـان عـدديان آخـران يسـتخدمان بكـثـرة في الإلكترونيـات الرقميـة وهمـا النظـام الثمـاني للأعـداد (*Octal Number System*) والنظام السداسي عشري (*Hexadecimal Numbering System*).

وتستخدم الأعداد الثنائية على نطاق واسع في الإلكترونيات الرقمية والحاسبات كما تستخدم نظم الأعداد الثمانية والسداسي عشرية في تمثيل مجموعات الأرقام الثنائية. ويمكننا استخدام كل النظم العددية المذكورة سابقاً في الحسابات وكلها تعتمد على القيم وأماكن الخانات في الأعداد. وعند دراستنا لأي نظام عددي سنتناول فيه دراسة الخواص الآتية:

1. أساس النظام.
2. الرموز المستخدمة في النظام.
3. التحويل من النظام العشري لهذا النظام والعكس.
4. التحويل من هذا النظام إلى بقية الأنظمة.
5. عمليات الجمع والطرح الخاصة بهذا النظام.

وقبـل أن نتنـاول دراسـة نظـم الأعـداد يجـب أن نفـرق بـين مصـطلحين هـامين همـا الـرقم (*Digit*) والعـدد (*Number*)، فـالرقم هـو قيمـة رمـز (*Symbol*) واحـد مـن الرمـوز الأساسـية للأعداد والذي يحتل خانـة واحـدة، فالأرقـام (0,1,2,3,4, ... , 8,9) كـل واحـد منهـا يمثـل رقمـاً واحداً في سلسلة العدد الواحد، أما العدد فهو المقدار الذي يتكون مـن رقـم واحـد أو أكثـر أو أنـه المقـدار الـذي يمثـل خانـة واحـدة أو أكثـر، فعلـى سـبيل المثـال المقـدار (14) يمثـل عـدداً وكـذلك المقدار (123) يمثل عدداً، وفي المقدار الأول فإن العـدد (14) يتكـون مـن رقمـين همـا (1,4) وفي

المقدار الثاني فإن العدد (123) يتكون من ثلاثة أرقام هي (1,2,3) ويمكن أن يكون رقم (6) مثلاً عدداً إذا كانت سلسلته تتكون من رقم واحد.

2-2 النظام العشري للأعداد *Decimal Numbering System*

نظراً لأن النظام العشري هو الأقدم استخداماً ومألوفاً لدينا لذا فإننا سنبدأ بدراسته كتمهيد لدراسة كل النظم العددية الأخرى. ويطلق على النظام العشري اسم نظام الأساس عشرة (10) أو منظومة الأساس (10) ويشار إليه بالأساس (10) لأنه يعتمد في تكوينه على عشرة رموز مختلفة وهي 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

وللنظام العشري خاصية مرتبة الرقم (*Positional Weight*) فعلى سبيل المثال العدد (128) نجد أن الرقم الأول (8) يقع في المرتبة الأولى (مرتبة خانة الآحاد) أي أن قيمته أو وزنه هو الثمانية ، وتكون عبارة عن حاصل ضرب الرقم الذي يمثل هذه المرتبة في 1 ($8 = 1 \times 8$)، أما الرقم الثاني (2) فإنه يقع في المرتبة الثانية (مرتبة العشرات) وقيمته أو وزنه عبارة عن حاصل ضرب الرقم الذي يحتل هذه المرتبة في 10 ($20 = 10 \times 2$)، أما الرقم الثالث (1) فإنه يقع في المرتبة الثالثة (مرتبة المئات) وقيمته أو وزنه عبارة عن حاصل ضرب الرقم الذي يحتل هذه الخانة في 100 ($100 = 100 \times 1$).

فإذا جمعنا قيمة أو وزن كل خانة من الخانات السابقة نحصل على القيمة التي يمثلها العدد ، أي أن:

$$(1 \times 100) + (2 \times 10) + (8 \times 1) = 100 + 20 + 8 = 128$$

وحيث أن هذا النظام يعرف باسم نظام الأساس (10) فإنه يمكننا أن نضع مراتب الخانات من اليمين إلى اليسار بحيث تمثل قوى العدد أو الأساس 10 وتبدأ من $1 = 10^0$ كالآتي:

$$\ldots\ldots\ 10^5 \quad 10^4 \quad 10^3 \quad 10^2 \quad 10^1 \quad 10^0$$

وبالتالي فإنه يمكن تمثيل العدد 128 طبقاً لذلك كما يلي:

	1	2	8
	مرتبة المئات	مرتبة العشرات	مرتبة الآحاد
	10^2	10^1	10^0
	1×10^2 +	2×10^1 +	8×10^0
$(128)_{10}$ =	100 +	20 +	8

ويلاحظ أننا وضعنا العدد العشري (128) داخل قوسين ثم وضعنا الأساس 10 على يمين العدد وفي الأسفل (*Subscript*) وذلك لنميز أن هذا العدد هو عدد في النظام العشري.

وفي حالة الأعداد الكسرية توضع مراتب الخانات لها أس سالب مرتبة من يمين العلامة العشرية بالوزن 10^{-1} كالآتي:

$$10^{2} \quad 10^{1} \quad 10^{0} \bullet 10^{-1} \quad 10^{-2} \quad 10^{-3} \quad \ldots\ldots$$

العلامة العشرية

(Decimal Point)

2- 3 **النظام الثنائي للأعداد** *Binary Numbering System*

يطلق على النظام الثنائي اسم نظام الأساس اثنين (2) ويشار إليه بالأساس (2) لأنه يعتمد على رمزين اثنين فقط هما (1 و0). ومراتب الخانات في النظام الثنائي من اليمين إلى اليسار تمثل قوى العدد (2) أي أن:

$$\ldots\ldots 2^{4} \quad 2^{3} \quad 2^{2} \quad 2^{1} \quad 2^{0}$$

وبالتالي فإن مراتب الخانات أو أوزانها العددية هي:

$$\ldots\ldots \quad 16 \quad 8 \quad 4 \quad 2 \quad 1$$

وعلى ذلك فإن العدد الثنائي (11001) يكافئ ما يلي:

$$\begin{array}{ccccc} 2^{4} & 2^{3} & 2^{2} & 2^{1} & 2^{0} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$= (1 \times 2^{4}) + (1 \times 2^{3}) + (0 \times 2^{2}) + (0 \times 2^{1}) + (1 \times 2^{0})$$

$$= 16 + 8 + 0 + 0 + 1 = (25)_{10}$$

والتعبير عن العدد الثنائي بهذه الطريقة يسمى بالشكل الموسع، ولتمييز العدد الثنائي عن غيره من الأعداد يوضع العدد الثنائي داخل قوسين ثم يكتب الأساس (2) على يمين العدد في الأسفل وبالتالي فإن العدد السابق يكتب $(11001)_2$.

وهناك بعض المصطلحات المستخدمة مع هذا النظام الثنائي منها:

■ **الخانة الثنائية** (*Bit*): الخانة الثنائية (*Bit*) هي اختصار لكلمتي (*Binary Digit*) والتي تعني الخانة الثنائية أو الرقم الثنائي. ويستخدم هذا المصطلح للتعبير عن عدد الأرقام (الخانات) التي يتكون منها العدد الثنائي، فمثلاً العدد $(1001)_2$ يتكون من (4-bits) أو أربع خانات ثنائية وكذلك العدد $(1101101)_2$ يتكون من (7-bits) أو سبع خانات ثنائية وهكذا.

■ **عدد التشكيلات الثنائية** (*Number of Binary Combinations*): عدد التشكيلات الثنائية تعني عدد الاحتمالات التي يمكن الحصول عليها من عدد معين من الخانات (*bits*). وهناك صيغة رياضية يمكن عن طريقها حساب هذا العدد من التشكيلات وهي :

$$N = 2^n$$

حيث: N = عدد التشكيلات الثنائية المحتملة

n = عدد الخانات (bits)

وبالتالي فإذا كان عدد الخانات يساوي (2) فإن عدد التشكيلات الثنائية هو :

$$N = 2^2 = 4$$

وإذا كان عدد الخانات يساوي (3) فإن عدد التشكيلات الثنائية هو :

$$N = 2^3 = 8$$

وإذا كان عدد الخانات يساوي (4) فإن عدد التشكيلات الثنائية هو :

$$N = 2^4 = 16$$

وهكذا لأي عدد من الخانات يمكن حساب عدد التشكيلات الثنائية المحتملة.

■ **أهمية رتبة الخانة الثنائية** (*Bit*): في أي تشكيلة من التشكيلات الثنائية المحتملة لأي عدد من الخانات نجد أن الخانة الأولى في اليمين تحت مرتبة 2^0 أي تساوي (1) أو يقال وزنها يساوي (1) وأن الخانة الثانية والتي على يسار الأولى تحت مرتبة 2^1 أي وزنها يساوي (2) والثالثة تحت مرتبة 2^2 أي وزنها يساوي (4) وهكذا. وبذلك نجد أن الخانة الثنائية الأولى التي في أقصى اليمين أقل وزناً وأن الخانة الأخيرة وهي آخر خانة على اليسار هي الأكبر وزناً، ولذلك يطلق على الخانة الثنائية الأولى، الخانة الأقل وزناً أو الأقل قيمة (***L****east* ***S****ignificant* ***B****it*) وتكتب اختصاراً (***LSB***) ويطلق على الخانة الثنائية الأخيرة في أقصى اليسار الخانة الأكبر وزناً أو الأعلى قيمة(***M****ost* ***S****ignificant* ***B****it*) وتكتب اختصاراً (***MSB***).

■ **وحدة تخزين البيانات** (*byte*): تعتبر الخانة الثنائية (*bit*) هي الوحدة الأساسية لتخزين المعلومات في الذاكرة الرئيسة لجهاز الحاسوب، لكن الخانة الثنائية الواحدة لا تعطي تشكيلات غير الصفر (0) والواحد (1) لذلك لا يمكن استخدامها في تمثيل (أو تخزين) أي من الأرقام العشرية الأساسية أو حروف الهجاء أو الرموز الخاصة. وللقيام بهذه العملية تم استخدام عدة خانات ثنائية متجاورة لتكون وحدة تخزين لها القدرة على إعطاء تشكيلات كثيرة تكون قادرة على تمثيل أو تخزين أي رقم عشري أساسي أو أي حرف هجاء أو أي رمز خاص.

وتتكون وحدة تخزين البيانات (*byte*) من ثماني خانات ثنائية متجاورة وبالتالي يمكن تعريف وحدة تخزين البيانات على أنها موقع في الذاكرة الرئيسة للحاسوب تحتوي على ثماني خانات ثنائية متجاورة. وبصيغة المعادلة الرياضية يمكن القول بأن :

$$1\ byte = 8\ bits$$

2- 4 التحويل من النظام العشري إلى النظام الثنائي *Decimal-to-Binary Conversion*

هناك طريقتان للتحويل من النظام العشري إلى الثنائي، الطريقة الأولى وهي طريقة جمع الأوزان (*Sum of Weights Method*) والطريقة الثانية يطلق عليها طريقة تكرار القسمة على (2)(*Repeated Division–by–2 Method*) وسوف نتناول بالتفصيل الطريقة الثانية حيث إنها الأسهل والأكثر شيوعاً في الإستخدام.

2- 4- 1 تحويل الأعداد العشرية الصحيحة إلى النظام الثنائي

لتحويل العدد العشري $(14)_{10}$ إلى الثنائي، نبدأ بقسمة العدد 14 على 2 ، ثم نقسم خارج القسمة الذي نحصل عليه على 2 وهكذا حتى نحصل على خارج قسمة يساوي صفر (0). في كل خطوة من خطوات القسمة نحصل على باقٍ من خارج القسمة وهو الذي يشكل العدد الثنائي. الباقي الأول الذي نحصل عليه يمثل (*LSB*) في العدد الثنائي والباقي الأخير يمثل (*MSB*)، وهذه الخطوات يمكن توضيحها كالآتي:

	الباقي
$14 \div 2 = 7$	0
$7 \div 2 = 3$	1
$3 \div 2 = 1$	1
$1 \div 2 = 0$	1

(*MSB*) → 1 1 1 0 ← (*LSB*)

وعلى ذلك يكون:

$$(14)_{10} = (1110)_2$$

مثال (2- 1): حول العدد العشري $(25)_{10}$ إلى مكافئه الثنائي.

الحل:

الباقي

$$
\begin{array}{lll}
25 \div 2 = 12 & 1 & (LSB) \\
12 \div 2 = 6 & 0 & \\
6 \div 2 = 3 & 0 & \\
3 \div 2 = 1 & 1 & \\
1 \div 2 = 0 & 1 & (MSB)
\end{array}
$$

وبالتالي يكون الناتج كما يلي :

$$(25)_{10} = (11001)_2$$

مثال (2- 2): حول العدد العشري $(87)_{10}$ إلى مكافئه الثنائي.

الحل:

الباقي

$$
\begin{array}{lll}
87 \div 2 = 43 & 1 & (LSB) \\
43 \div 2 = 21 & 1 & \\
21 \div 2 = 10 & 1 & \\
10 \div 2 = 5 & 0 & \\
5 \div 2 = 2 & 1 & \\
2 \div 2 = 1 & 0 & \\
1 \div 2 = 0 & 1 & (MSB)
\end{array}
$$

ويكون الناتج:

$$(87)_{10} = (1010111)_2$$

2- 4- 2 تحويل الأعداد الكسرية إلى النظام الثنائي

كما رأينا سابقاً فإنه يمكننا تحويل الأعداد العشرية الصحيحة إلى النظام الثنائي عن طريق تكرار القسمة على (2). والأعداد الكسرية (*Decimal Fractions*) نستطيع تحويلها إلى النظام الثنائي عن طريق الضرب المتكرر في (2).

ولتحويل العدد الكسري (0.3125) إلى النظام الثنائي نبدأ بضرب العدد الكسري (0.3125) في (2)، ثم نبدأ بضرب العدد الكسري الناتج مرة أخرى في (2) حتى يصبح العددالكسري الناتج يساوي صفراً (0) أو حتى نصل إلى العدد المطلوب من الخانات العشرية. الأرقام الحاملة (*Carried Digits*) الناتجة من حاصل الضرب المتكرر والموجودة على يمين الفاصلة العشرية تكون لنا العدد الكسري الثنائي. الرقم الحامل الأول يمثل (*MSB*) والرقم الحامل الأخير يمثل (*LSB*) . وهذه العملية يمكن تمثيلها كما يلي:

الحامل

$0.3125 \times 2 = 0.625 \quad 0$

$0.625 \times 2 = 1.25 \quad 1$

$0.25 \times 2 = 0.5 \quad 0$

$0.5 \times 2 = 1.00 \quad 1$

$(LSB)\ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ (MSB)$

نستمر حتى نصل إلى العدد المطلوب من الخانات العشرية أو نتوقف إذا كان الجزء العشري

مثال (2- 3): حول العدد العشري $(39.25)_{10}$ إلى نظيره الثنائي.

الحل: نبدأ أولاً بتحويل العدد العشري الصحيح وذلك بتكرار القسمة على (2) كما يلي:

	الباقي	
$39 \div 2 = 19$	1	(LSB)
$19 \div 2 = 9$	1	
$9 \div 2 = 4$	1	
$4 \div 2 = 2$	0	
$2 \div 2 = 1$	0	
$1 \div 2 = 0$	1	(MSB)

ويكون الناتج :

$$(39)_{10} = (100111)$$

ثم نبدأ بتحويل العدد الكسري وذلك بتكرار الضرب في (2) كما يلي:

الحامل

$0.25 \times 2 = 0.5 \quad 0$

$0.5 \times 2 = 1.00 \quad 1$

وبذلك نحصل على:

$$(0.25)_{10} = (0.01)_2$$

ويكون الناتج النهائي للعدد المطلوب هو :

$$(39.25)_{10} = (100111.01)_2$$

2- 5 التحويل من النظام الثنائي إلى النظام العشري *Binary-to-Decimal Conversion*

العدد الثنائي كما علمنا من قبل له مراتب في الخانات من اليمين إلى اليسار تمثل قوى العدد (2) وبالتالي فإن مراتب الخانات أو أوزانها العددية هي 1,2,4,8,16 وهكذا. قيمة العدد الثنائي معبراً عنها بالعدد العشري المكافئ يمكن حسابها عن طريق ضرب كل خانة (*bit*) تساوي الواحد (1) في مرتبة الخانة المقابلة لها وبجمع حاصل الضرب لكل خانة نحصل على العدد المكافئ المطلوب. ويمكن توضيح عملية التحويل بالمثال التوضيحي التالي.

مثال (2- 4): حول العدد الثنائي 1101001 إلى نظيره العشري.

الحل: نحدد مرتبة كل خانة تساوي (1) ثم نقوم بضربها في الوزن المقابل لها ونجمع حواصل الضرب كما يلي:

الوزن : $2^6 \quad 2^5 \quad 2^4 \quad 2^3 \quad 2^2 \quad 2^1 \quad 2^0$

العدد الثنائي : $1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1$

$$= 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$= 64 + 32 + 8 + 1 = (105)_{10}$$

والأعداد الكسرية في الأعداد الثنائية يمكن تحويلها أيضاً وذلك بوضع خانات (*bits*) على يمين العلامة الثنائية (*Binary Point*) تماماً كما في الأعداد الكسرية بالنظام العشري والتي توضع أيضاً على يمين العلامة العشرية (*Decimal Point*) وبالتالي فإن مراتب الخانات أو أوزانها العددية في النظام الثنائي تصبح كما يلي:

$$\ldots\ldots 2^4 \quad 2^3 \quad 2^2 \quad 2^1 \quad 2^0 \bullet 2^{-1} \quad 2^{-2} \quad 2^{-3} \quad 2^{-4}\ldots\ldots$$

العلامة الثنائية

مثال (2- 5): حول العدد الكسري الثنائي $(0.1011)_2$ إلى مكافئة العشري.

الحل:

$$\bullet\ 2^{-1} \quad 2^{-2} \quad 2^{-3} \quad 2^{-4}$$

$$0 \bullet 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1$$

$$\therefore (0.1011)_2 = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4}$$
$$= 0.5 + 0.125 + 0.0625 = (0.6875)_{10}$$

2- 6 العمليات الحسابية في النظام الثنائي *Binary Arithmetic*

العمليات الحسابية في النظام الثنائي ضرورية في كل أجهزة الحاسوب وأنواع أخرى عديدة من النظم الرقمية. وسنكتفي هنا بشرح القواعد الأساسية لعمليتي الجمع والطرح فقط.

2- 6- 1 الجمع الثنائي *Binary Addition*

لإجراء عملية الجمع في النظام الثنائي، هناك أربعة قواعد أساسية لجمع الخانات الثنائية (*Binary Digits*) وهي:

$0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1$

$1 + 0 = 1$

$0 + 1 = 0$ *carry* (الحامل) $1 \Rightarrow = 10$

لا تحتاج القواعد الثلاثة الأولى إلى مزيد من الإيضاح، والقاعدة الرابعة تقول إنه في حالة جمع $1 + 1 = 10$ وهي تعني رقم (2) بالعشري، والواحد (1) هو المجموع الواجب ترحيله إلى العمود التالي كما في الجمع العشري العادي. ولتوضيح علمية الجمع الثنائي نأخذ المثالين التاليين.

مثال (2- 6): اجمع الرقمين الثنائيين 011, 110.

الحل: نرتب الأعداد الثنائية بحيث تظهر في صورة أعمدة أو خانات واضحة كما يلي:

$$\begin{array}{r} 6 \\ +\,3 \\ \hline 9 \end{array} \text{(عشري)} \qquad \begin{array}{rrrr} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & 0 \\ + & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

مثال (2- 7): اجمع الرقمين الثنائيين 011, 100.

الحل:

$4 \qquad 1 \quad 0 \quad 0$

$$\begin{array}{r} +3 \\ \hline 7 \end{array} \quad \text{(عشري)} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$$

2- 6- 2 الطرح الثنائي *Binary Subtraction*

هناك طريقتان لإجراء عملية الطرح وهما :

1- الطريقة المباشرة أو ما يطلق عليه بالطريقة الحسابية.

2- الطريقة المتممة.

وسنكتفي هنا بشرح الطريقة المباشرة، وسوف نتناول الطريقة المتممة بالتفصيل فيما بعد. لإجراء الطرح بالطريقة المباشرة (الحسابية) يجب معرفة القواعد الأساسية لهذه العملية مع ملاحظة أن المقدار المطروح منه على اليسار والمقدار المطروح على اليمين:

$0 - 0 = 0$

$1 - 0 = 1$

$1 - 1 = 0$

$0 - 1 = 1$ تكون النتيجة (1) واستلفنا (1)

ويمكن تلخيص عملية الطرح في الطريقة المباشرة كما يلي :

- رتب الأرقام تحت بعضها بحيث تظهر في صورة أعمدة أو خانات واضحة.
- ابدأ من الخانة الأولى على اليمين متجهاً إلى اليسار متبعاً القواعد التالية في الطرح:
  - عند طرح (0) من (0) أو (1) من (1) نضع في الناتج (0).
  - عند طرح (0) من (1) نضع الناتج (1).
  - عند طرح (1) من (0) نضع في الناتج (1) ثم نغير كل (0) من الخانات التالية (في المطروح منه) إلى (1) حتى نصل إلى أقرب (1) فنغيره إلى (0).
  - أكمل بعد ذلك علمية الطرح باستخدام القواعد السابقة.

مثال (2- 8): اطرح من المقدار (101) المقدار (011).

الحل:

0 عندما استلفنا (1) أصبحت هذه الخانة (0)

1

المطروح منه	1	0	~~1~~
المطروح	1	1	− 0
	0	1	0

استلفنا (1) من العمود الذي يليه فأصبحت الخانة تحتوي على (10) وبطرح (1) منها يصبح الناتج (1)

2- 7 المتمم الأحادي والثنائي للأعداد الثنائية

One's and Two's Complements of Binary Numbers

إن أهمية المتممين الأحادي والثنائي يكمن في سماحهما لنا بتمثيل الأعداد الثنائية السالبة. والمتمم الثنائي هو الأكثر شيوعاً واستخداماً في أجهزة الحاسوب للتعامل مع الأعداد السالبة. وللحصول على المتمم الأحادي لأي عدد ثنائي فإننا ببساطة نقوم بتغيير كل (1) إلى (0) ونغير كل (0) إلى (1) في العدد الثنائي كما يلي:

العدد الثنائي ← 1 0 1 1 0 0 1 1

المتمم الأحادي ← 0 1 0 0 1 1 0 0

أما المتمم الثنائي للعدد الثنائي فإنه يمكن ايجاده بطريقتين كما يلي:

الطريقة الأولى: نقوم بإيجاد المتمم الأحادي كما سبق. ثم بعد ذلك نقوم بإضافة العدد (1) إلى المتمم الأحادي الذي حصلنا علية وبذلك نحصل على المتمم الثنائي أي أن:

المتمم الثنائي = المتمم الأحادي + 1

ومثال ذلك نفترض أننا نريد الحصول على المتمم الثنائي للعدد الثنائي 10110011. حيث يجب أولاً الحصول على المتمم الأحادي ثم نجمع عليه (1) لنحصل على المتمم الثنائي للعدد.

العدد الثنائي ← 1 0 1 1 0 0 1 1

المتمم الأحادي ← 0 1 0 0 1 1 0 0

نضيف (1) ← + 1

المتمم الثنائي 0 1 0 0 1 1 0 1

الطريقة الثانية: نقوم بالنظر للخانة الثنائية ذات القيمة الدنيا (*LSB*) من أقصى اليمين للعدد الثنائي فإن كانت تساوي (0) نقوم بكتابته ونستمر في ذلك وبمجرد أن نقابل أول خانة ثنائية تساوي واحداً عند

ذلك نقوم بكتابة الواحد الذي قابلناه ثم بعد ذلك نقوم بقلب الصفر واحد اوالواحد صفراً وهكذا إلى أن ننتهي من كتابة العدد (وفي حال قابلنا أول واحد في الخانة الثنائية ذات القيمة الدنيا فإننا نقوم بكتابته ثم نتبع الطريقة السابقة بقلب الصفر إلى واحد والواحد إلى صفر) ومثال على ذلك، نفترض أننا نريد تحويل العدد الثنائي $(10101101)_2$ إلى المتمم الثنائي:

العدد الثنائي ⟵ 1 0 1 0 1 1 0 1 المتمم الأحادي

المتمم الثنائي ⟵ 1 0 1 0 0 1 0 1

2- 8 تمثيل الأعداد ذات الإشارة *Representation of Signed Numbers*

إن النظم الرقمية التي تستخدم في الحاسوب يجب أن تكون لديها القدرة على التعامل مع الأعداد الموجبة والسالبة على حد سواء ونتيجة لذلك فإن الخانة الثنائية ذات القيمة العليا والموجودة في أقصى يسار العدد الثنائي تمثل إشارة العدد، حيث يوضع في هذه الخانة (0) للعدد الموجب، ويوضع بها (1) للعدد السالب. فمثلاً في حالة العدد الثنائي المكون من ثماني خانات ثنائية فإن الخانة الثنائية ذات القمية العليا للعدد والموجودة في أقصى يسار العدد تمثل إشارة العدد (*Sign Bit*) وبقية الخانات تمثل قيمة العدد (*Magnitude*).

وهناك ثلاثة طرق لتمثيل الأعداد ذات الإشارة في النظام الثنائي وهي: إشارة المقدار (*Sign-Magnitude*) والمتمم الأحادي (*1'sComplement*) والمتمم الثنائي (*2's Complement*).

2- 8- 1 نظام إشارة المقدار (*Sign-Magnitude System*)

عند تمثيل العدد الثنائي بنظام إشارة المقدار، فإن الخانة الثنائية (*bit*) ذات القيمة العليا والموجودة في أقصى يسار العدد تمثل خانة الإشارة وبقية الخانات تمثل مقدار العدد. حيث أن الخانات التي تمثل مقدار العدد تظل كما هي سواء أكان العدد سالباً أم موجباً أما في خانة الإشارة فإنه يتم وضع صفر إذا كان العدد موجباً أو واحد إذا كان العدد سالباً. فمثلاً لتمثيل العدد العشري (+23) بنظام إشارة المقدار فإننا نكتب العدد كالتالي:

0 0 0 1 0 1 1 1

خانة الإشارة **(Sign Bit)**

خانات المقدار **(Magnitude Bits)**

ولتمثيل العدد العشري (23–) فإننا نكتب ما يلي:

1 0 0 1 0 0 1 1 1

حيث نلاحظ أن الفرق الوحيد بين العددين (23+) , (23–) هو في خانة الإشارة فقط.

2- 8- 2 نظام المتمم الأحادي (*1's Complement System*)

الأعداد الموجبة في نظام المتمم الأحادي تمثل بنفس الطريقة التي تمت في تمثيل الأعداد الموجبة بنظام إشارة المقدار. أما الأعداد السالبة فيتم الحصول عليها عن طريق إيجاد المتمم الأحادي للعدد الموجب. وكمثال على ذلك العدد العشري (23–) يمكن تمثيله عن طريق ايجاد المتمم الأحادي للعدد كما يلي :

العدد (23+) ⟵ 0 0 0 1 0 1 1 1

العدد (23–) ⟵ 1 1 1 0 1 0 0 0

حيث إن الإشارة في كلا العددين تمثلها الخانة الأخيرة ذات القيمة العليا الموجودة في أقصى يسار العددين.

2- 8- 3 نظام المتمم الثنائي (*2's Complement*)

كما في نظام المتمم الأحادي فإن الأعداد الموجبة في نظام المتمم الثنائي تمثل بنفس الطريقة كما في نظام إشارة المقدار. أما الأعداد السالبة فنحصل عليها عن طريق إيجاد المتمم الثنائي للعدد الموجب، فمثلاً العدد العشري (23–) يمكن تمثيله عن طريق ايجاد المتمم الثنائي للعدد (23+) كما يلي:

العدد (23+) ⟵ 0 0 0 1 0 1 1 1

العدد (23–) ⟵ 1 1 1 0 1 0 0 1

وكما ذكرنا سابقاً فإن نظام المتمم الثنائي هو الأكثر شيوعاً واستخداماً في النظم الحاسوبية.

2- 9 العمليات الحسابية مع الأعداد ذات الإشارة

Arithmetic Operations with Signed Numbers

تعلمنا سابقاً كيف يمكن تمثيل الأعداد ذات الإشارة بثلاثة نظم مختلفة، وهنا سوف نتعلم كيف نجري العمليات الحسابية المختلفة على الأعداد ذات الإشارة وسنكتفي هنا بشرح عملية الطرح فقط، حيث إننا شرحنا عملية الجمع بالتفصيل في الجزء (2- 6). ولأن نظام المتمم الثنائي كما أسلفنا هو الأكثر استخداماً لتمثيل الأعداد السالبة في أجهزة الحاسوب فسوف نكتفي هنا بشرح عملية الطرح باستخدام نظام المتمم الثنائي فقط. ولفهم عملية طرح الأعداد ذات الإشارة باستخدام المتمم الثنائي فإننا سوف نعطي بعض الأمثلة كما يلي:

مثال (2- 9): اطرح من المقدار 00001110 المقدار 11111010 باستخدام المتمم الثنائي للأعداد.

الحل: في هذه الحالة فإن:

$$14-(-6)=14+6=20$$

يمكن ترتيب العددين تحت بعضهما كما يلي:

$$\begin{array}{rl} 0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,0 & \text{(+14) المطروح منه} \\ +\ \ 0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,0 & \text{(+6) المتمم الثنائي للمطروح} \\ \hline 0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0 & \text{(+20) الفرق} \end{array}$$

مثال (2- 10): اجرِ عملية الطرح الآتية باستخدام نظام المتمم الثنائي:

$$(00001000)_2-(00000100)_2$$

الحل: في هذه الحالة فإن:

$$8-4=8+(-4)=4$$

وبالتالي نجد أن:

$$\begin{array}{rl} 0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0 & \text{(+8) المطروح منه} \\ +\ 1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0 & \text{(– 4) المتمم الثنائي للمطروح} \\ \hline \cancel{1}\ 0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0 & \text{(+4) الفرق} \end{array}$$

يهمل الحامل

(Discard carry)

مثال (2- 11): اجرِ علمية الطرح الآتية باستخدام المتمم الثنائي.

$$(11100111)_2 - (00001001)_2$$

الحل: في هذه الحالة فإن:

$$-25 - (+9) = -25 - 9 = -34$$

وبالتالي فإنه:

1 1 1 0 0 1 1 1	المطروح منه (25 –)
+ 1 1 1 1 0 1 1 1	المتمم الثنائي للمطروح (9 –)
$\cancel{1}$ 1 1 0 1 1 1 1 0	الفرق (34 –)

يهمل الحامل
(Discard carry)

2- 10 النظام الثماني للأعداد *The Octal Numbering System*

يطلق على النظام الثماني اسم نظام الأساس ثمانية (8) ويشار إليه بالأساس (8) لأنه يحتوي على ثمانية رموز وهي(0,1,2,3,4,5,6,7) ونتيجة لأن التعامل مع الأعداد الثنائية الطويلة يجعل الإنسان عرضة للخطأ في التعامل معها من ناحية الكتابة أو النسيان، لذا يتم اللجوء إلى استخدام النظام الثماني في التعامل مع الأعداد الثنائية بصورة غير مباشرة ومن ثم يتم التحويل بين النظامين الثنائي والثماني.

2- 10- 1 التحويل من النظام الثماني إلى العشري *Octal-to-Decimal Conversion*

مراتب الخانات في النظام الثماني مرتبة من أقصى اليمين إلى اليسار وتمثل قوى العدد (8) أي (8^0 8^1 8^2 8^3......) وهكذا، وبالتالي فإن مراتب الخانات أو أوزانها العددية هي (1 8 64 512 ......) وهكذا، .ولتمييز العدد الثماني عن غيره من الأعداد يكتب الأساس في أسفل العدد الثماني على اليسار. فعلى سبيل المثال لتحويل العدد الثماني $(2275)_8$ إلى عدد في النظام العشري فإننا نقوم بالتحويل كما يلي :

الأوزان : $8^3 \quad 8^2 \quad 8^1 \quad 8^0$

العدد الثماني : $2 \quad 2 \quad 7 \quad 5$

$$\therefore\ (2275)_8 = (2 \times 8^3) + (2 \times 8^2) + (7 \times 8^1) + (5 \times 8^0)$$

$$= (2 \times 512) + (2 \times 64) + (7 \times 8) + (5 \times 1)$$
$$= 1024 + 128 + 56 + 5 = (1213)_{10}$$

2- 10- 2 التحويل من النظام العشري إلى الثماني *Decimal–to–Octal Conversion*

عند تحويل عدد من النظام العشري إلى عدد في النظام الثماني فإننا نقوم بعملية القسمة المكررة على العدد (8)، وهي تشبة طريقة تحويل الأعداد من النظام العشري إلى الثنائي حيث اختلف الأساس هنا فاصبح (8) بدلاً من (2).

2- 10- 2- 1 تحويل الأعداد العشرية الصحيحة إلى النظام الثماني

لتحويل العدد العشري $(150)_{10}$ إلى عدد في النظام الثماني فإننا نبدأ بقسمة العدد 150 على (8) ثم نقسم خارج القسمة الذي حصلنا عليه علي (8) وهكذا حتى تحصل على خارج قسمة يساوي صفراً (0). في كل خطوة من خطوات القسمة نحصل على باقٍ من خارج القسمة وهو الذي يشكل العدد الثماني. وكما في التحويل من النظام العشري إلى الثنائي فإن الباقي الأول الذي نحصل علية يمثل (***LSD***) {***L****east* ***S****ignificant* ***D****igit*} في العدد الثاني والباقي الأخير يمثل {***M****ost* ***S****ignificant* ***D****igit*} (***MSD***) وهذه الخطوات موضحة كالآتي:

	الباقي	
$150 \div 8 = 18$	6	(*LSD*)
$18 \div 8 = 2$	2	
$2 \div 8 = 0$	2	(*MSD*)

وبالتالي يكون الناتج كما يلي :

$$(150)_{10} = (226)_8$$

مثال (2- 12): حول العدد العشري $(624)_{10}$ إلى نظيرة في النظام الثماني.

الحل:

	الباقي	
$624 \div 8 = 78$	0	(*LSD*)
$78 \div 8 = 9$	6	
$9 \div 8 = 1$	1	
$1 \div 8 = 0$	1	(*MSD*)

وبالتالي يكون الناتج كما يلي :

$(624)_{10} = (1160)_8$

2- 10- 2- 2 تحويل الأعداد الكسرية إلى النظام الثماني

يتم تحويل الأعداد الكسرية في خطوات مشابهة لطريقة تحويل الأعداد في النظام الثنائي وذلك عن طريق الضرب المتكرر في (8). ولتحويل العدد الكسري (0.265) إلى عدد في النظام الثماني فإننا نبدأ أولاً بضرب العدد الكسري 0.265 في (8)، ثم نبدأ بضرب العدد الكسري الناتج مرة أخرى في (8) حتى يصبح العدد الكسري الناتج يساوي صفراً (0) أو حتى نصل إلى العدد المطلوب من الخانات العشرية. الارقام الحاملة (*Carried Digits*) الناتجة من حاصل الضرب المتكرر تكون لنا العدد الثماني. الرقم الحامل الأول يمثل (*LSD*) أما الرقم الأخير فإنه يمثل (*MSD*) وهذه العملية يمكن تمثيلها كالآتي:

	الحامل	
$0.265 \times 8 = 2.12$	2	(*MSD*)
$0.12 \times 8 = 0.96$	0	
$0.96 \times 8 = 7.68$	7	
$0.68 \times 8 = 5.44$	5	
$0.44 \times 8 = 3.52$	3	
$0.52 \times 8 = 4.16$	4	(*LSD*)

إذا فرضنا أن العدد المطلوب من الخانات العشرية هو ستة (6) خانات فتكون نتيجة التحويل النهائية هي:

$(0.625)_{10} = (0.207534)_8$

مثال (2- 13): حول العدد العشري $(44.5625)_{10}$ إلى مكافئه في النظام الثماني.

الحل: نبدأ بتحويل العدد العشري الصحيح وذلك بتكرار القسمة على (8).

	الباقي	
$44 \div 8 = 5$	4	(*LSD*)
$5 \div 8 = 0$	5	(*MSD*)

وبالتالي يكون الناتج كما يلي:

$(44)_{10} = (54)_8$

ثم نبدأ بتحويل العدد الكسري وذلك بتكرار الضرب في ثمانية (8) كما يلي :

	الحامل
$0.5625 \times 8 = 4.5$	4
$0.5 \times 8 = 4.00$	4

وبذلك نحصل على :

$$(0.5625)_{10} = (0.44)_8$$

ويكون الناتج النهائي للعدد المطلوب هو :

$$(44.5625)_{10} = (54.44)_8$$

2- 10- 3 التحويل من النظام الثماني إلى النظام العشري *Octal-to-Decimal Conversion*

العدد الثماني كما علمنا من قبل له مراتب في الخانات من اليمين إلى اليسار وتمثل قوى العدد (8) وبالتالي فإن مراتب الخانات أو أوزانها العددية هي 1,8,64,512,4096 وهكذا. وقيمة العدد الثماني معبراً عنها بالعدد العشري المكافئ يمكن حسابها عن طريق ضرب كل خانة (*Digit*) في مرتبة الخانة المقابلة لها وبجمع حاصل ضرب كل خانة نحصل على العدد المكافئ المطلوب. ويمكن توضيح هذه العملية بالمثال التالي.

مثال (2- 14): حول العدد الثماني $(324)_8$ إلى عدد في النظام العشري.

الحل:

الأوزان : $8^2 \quad 8^1 \quad 8^0$

العدد الثماني : $3 \quad 2 \quad 4$

$$\therefore\ (324)_8 = (3 \times 8^2) + (2 \times 8^1) + (4 \times 8^0)$$
$$= (3 \times 64) + (2 \times 8) + (4 \times 1)$$
$$= 192 + 16 + 4 = (212)_{10}$$

والأعداد الكسرية في الأعداد الثمانية يمكن تحويلها أيضاً مثل الأعداد الثنائية تماماً مع تغيير الأساس وذلك بوضع خانات على يمين العلامة الثمانية (*Octal Point*) وبالتالي فإن مراتب الخانات أو أوزانها العددية في النظام الثماني تصبح كالآتي:

$$\ldots\ldots 8^4 \quad 8^3 \quad 8^2 \quad 8^1 \quad 8^0 \bullet 8^{-1} \quad 8^{-2} \quad 8^{-3} \quad 8^{-4} \ldots\ldots$$

العلامة الثمانية

مثال (2- 15): حول العدد الثماني $(567.14)_8$ إلى نظيره في النظام العشري.

الحل:

الأوزان : $8^2 \quad 8^1 \quad 8^0 \quad \bullet \quad 8^{-1} \quad 8^{-2}$

العدد الثماني : $5 \quad 6 \quad 7 \quad \bullet \quad 1 \quad 4$

$$\begin{aligned} \therefore\ (567.14)_8 &= (5\times 8^2)+(6\times 8^1)+(7\times 8^0)+(1\times 8^{-1})+(4\times 8^{-2}) \\ &= (5\times 64)+(6\times 8)+(7\times 1)+(1\times 0.125)+(4\times 0.015625) \\ &= 320+48+7+0.125+0.0625=(375.1875)_{10} \end{aligned}$$

2- 10- 4 التحويل من النظام الثماني إلى النظام الثنائي *Octal-to-Binary Conversion*

حيث إنه يمكن تمثيل كل رقم (*Digit*) من أرقام العدد الثماني كعدد ثنائي مكون من ثلاث خانات (*3-bits*)، وعليه فإنه من السهل علينا التحويل من النظام الثماني إلى الثنائي. كل رقم في النظام الثماني يمثل بثلاث خانات كما هو موضح في جدول(2- 1).

الرقم الثماني	0	1	2	3	4	5	6	7
العدد الثنائي	000	001	010	011	100	101	110	111

الجدول(2- 1) تمثيل الأرقام الثمانية كأعداد ثنائية.

ولتحويل العدد الثماني إلى نظيره الثنائي ببساطة نستبدل كل رقم ثماني بما يقابله من ثلاث خانات ثنائية كما هو موضح بالمثالين التاليين.

مثال (2- 16): حول العدد الثماني $(357)_8$ إلى نظيرة في النظام الثنائي.

الحل:

$$(357)_8 = \begin{array}{ccc} 3 & 5 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 011 & 101 & 111 \end{array}$$

$$= (011101111)_2$$

مثال (2- 17): حول العدد الثماني $(1276.543)_8$ إلى مكافئة الثنائي.

الحل:

$$(1276.543)_8 = \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 7 & 6 \bullet & 5 & 4 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 001 & 010 & 111 & 110 \bullet & 101 & 100 & 011 \end{array}$$

$$= (1010111110.101100011)_2$$

لاحظ أننا أهملنا الصفرين الأخيرين من أقصى اليسار لأنه لا قيمة لهما.

2- 10- 5 التحويل من النظام الثنائي إلى النظام الثماني *Binary-to-Octal Conversion*

إن التحويل من النظام الثنائي إلى النظام الثماني هو عكس عملية التحويل من النظام الثماني إلى الثنائي. حيث نقوم بتجميع كل ثلاث خانات ثنائية متجاورة بعد العلامة الثنائية –إن وجدت- وكتابة ما يقابلها بالنظام الثماني مع ملاحظة أنه عند تجميع الخانات الثنائية في أقصي يسار العدد أو أقصى يمين العدد بعد العلامة الثنائية حيث إنه إذا كان مجموع الخانات واحداً أو اثنين فإنه يمكننا إكمال العدد إلى ثلاث خانات وذلك بإضافة صفرين أو صفر للعدد وحتى يكون لدينا وحدات متكاملة من الخانات الثنائية ذات خانات الثلاث.

مثال (2- 18): حول العدد الثنائي $(1011001011100.00101)_2$ إلى نظيرة في النظام الثماني.

الحل:

$$\begin{array}{ccccccc} 001 & 011 & 001 & 011 & 100 \bullet & 001 & 010 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 4 \bullet & 1 & 2 \end{array}$$

لاحظ أنه تم زيادة صفر واحد على يمين الكسر الثنائي وصفرين على يسار العدد الصحيح وبذلك يكون لدينا ما يلي:

$$(1011001011100.00101)_2 = (13134.12)_8$$

2- 10- 6 العمليات الحسابية في النظام الثماني *Arithmetic Operations in Octal System*

سنقتصر هنا على دراسة عملية الجمع وعملية الطرح بالطريقة المباشرة.

2- 10- 6- 1 الجمع الثماني *Octal Addition*

إذا جمعنا عدداً من الأرقام العشرية الأساسية – أي التي بين (0,9) وكان حاصل الجمع لا يزيد عن (9) فإنه يعبر به تماماً ، أما إذا زاد حاصل الجمع عن (9) بواحد فقط فإنه يعبر عنه بالرقم (10) الذي هو بداية التكرار للرموز العشرية الأساسية. وكذلك الحال بالنسبة للنظام الثنائي فإنه لو زاد حاصل الجمع عن الرموز الأساسية والتي هي (0,1) بواحد فقط عبر عنه بالرقم الثنائي (10) الذي هو بداية التكرار للرموز الأساسية للنظام الثنائي أيضاً كما تم شرحه سابقاً. وعلى هذا فإنه يمكن تطبيق قواعد الجمع في النظام العشري على الأعداد في النظام الثماني ما دام حاصل الجمع لا يزيد على الرقم (7) الذي هو آخر رمز في النظام الثماني – أما إذا زاد حاصل الجمع عن (7) بواحد فقط عبر عنه بالرقم (10) الثماني ، الذي هو بداية التكرار الأول للأرقام الثمانية ويأتي بعده (11,12,13,14,15,16,17) ثم يبدأ التكرار الثاني (27,......,20,21,22) ثم التكرار الثالث (37,......,30,31) وهكذا. والجدول(2- 2) يبين عملية الجمع في النظام الثماني مع ملاحظة أن الجمع يتم بين رقم واحد رأسي مع رقم واحد أفقي وأن حاصل الجمع في نقطة التقاء الخط الرأسي والذي نتصور أنه نازل من الرقم الرأسي مع الخط الأفقي والذي نتصور أنه خارج من الرقم الأفقي. ويمكن تلخيص عملية الجمع في النظام الثماني كالآتي:

- أنه يمكننا إجراء عملية الجمع للأرقام الثمانية كما في النظام العشري تماماً مادام حاصل الجمع لم يزد على رقم (7).
- إذا زاد حاصل الجمع عن رقم (7) فإننا نضيف إلى حاصل الجمع العشري (2) لنحصل على مقابله الثماني، حيث إن الرقم التالي للرقم (7) في النظام العشري هو (8) أما الرقم (7) الثماني فإن الرقم التالي له هو (10) الثماني أي أننا لو جمعنا (2) على حاصل الجمع العشري ينتج حاصل الجمع الثماني المقابل (لاحظ أن هذه الطريقة لا تستخدم في عملية التحويل من النظام العشري إلى النظام الثماني إنما تستخدم فقط في عملية الجمع).

7	6	5	4	3	2	1	0	+
7	6	5	4	3	2	1	0	**0**
10	7	6	5	4	3	2	1	**1**
11	10	7	6	5	4	3	2	**2**
12	11	10	7	6	5	4	3	**3**
13	12	11	10	7	6	5	4	**4**
14	13	12	11	10	7	6	5	**5**
15	14	13	12	11	10	7	6	**6**
16	15	14	13	12	11	10	7	**7**

الجدول(2- 2) عملية الجمع في النظام الثماني.

مثال (2- 19): اجمع العددين الثمانيين $(34)_8$ ، $(42)_8$.

الحل: نرتب أولاً العددين رأسياً ثم نقوم بعلمية الجمع:

$$\begin{array}{r} 34 \\ +\ 42 \\ \hline 76 \end{array}$$

$$\therefore (34)_8 + (42)_8 = (76)_8$$

نلاحظ هنا أن مجموع أي من الرقمين الرأسيين(4,2) أو (3,4) لم يزد عن رقم (7) وبالتالي يكتب حاصل الجمع كما هو.

مثال (2- 20): اجمع العددين الثمانيين $(56)_8$ و $(63)_8$.

الحل:

$$\begin{array}{rrr} & 5 & 6 \\ + & 6 & 3 \\ \hline 1 & 4 & 1 \end{array}$$

نلاحظ في هذا المثال أنه عند زيادة حاصل الجمع عن رقم (7) أضفنا (2) إلى الناتج ثم رحلنا الحامل (*Carry*) إلى الخانة التالية.

2- 10- 6- 2 الطرح في النظام الثماني *Subtraction in Octal System*

يمكن تلخيص عملية الطرح في النظام الثماني كالتالي:

- إذا كان المطروح منه أكبر من المطروح أو يساويه فيتم كطرح الأرقام العشرية تماماً.
- أما إذا كان المطروح منه أصغر من المطروح فيتم إستلاف (1) من الخانة التالية – هذا الواحد يعبر عنه بثمانية (8) تضاف إلى الخانة التي يراد الطرح منها في العدد المطروح منه ثم يتم الطرح كالمعتاد في النظام العشري.

مثال (2- 21): اجرِ عملية الطرح الآتية: $(657)_8 - (346)_8$

الحل: نضع الرقمين بصورة رأسية كما يلي :

$$\begin{array}{rccc} & 6 & 5 & 7 \\ - & 3 & 4 & 6 \\ \hline & 3 & 1 & 1 \end{array}$$

المطروح منه

المطروح

$$\therefore (657)_8 - (346)_8 = (311)_8$$

نلاحظ هنا أن كل رقم من المطروح منه أكبر من المطروح ولذلك تمت عملية الطرح كما في الأرقام العشرية تماماً.

مثال (2- 22): اجرِ عملية الطرح الآتية: $(732)_8 - (634)_8$

الحل:

$$\begin{array}{rccc} & 6 & 2 & 1 \\ & \cancel{7} & \cancel{3} & 2 \\ - & 6 & 3 & 4 \\ \hline & 0 & 7 & 6 \end{array}$$

المطروح منه

المطروح

$$\therefore (732)_8 - (634)_8 = (76)_8$$

نلاحظ هنا في العمود الأول عند طرح (4) من (2) فإن المطروح أكبر من المطروح منه ولذلك استلفنا (1) من الخانة التالية وهذا الواحد بثمانية تجمع على المطروح منه، ثم تمت عملية الطرح كما في النظام العشري وتكررت هذه العملية أيضاً عند طرح (3) من (2) في العمود الثاني.

2- 11 النظام السداسي عشري للأعداد *Hexadecimal Numbering System*

يطلق على النظام السداسي عشري اسم نظام الأساس ستة عشر (16) ويشار إليه بالأساس (16) لأنه يتعمد على ستة عشر رمزاً وهي (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F) مع ملاحظة أن الحروف (A,B,C,D,E,F) تكافئ الأرقام العشرية (10,11,12,13,14,15)على الترتيب.

2- 11- 1 التحويل من السداسي عشري إلى العشري *Hexadecimal–to–Decimal Conversion*

مراتب الخانات في النظام السداسي عشري من اليمين إلى اليسار تمثل قوى العدد 16 أي $(16^0\ 16^1\ 16^2 \ldots 16^3)$ وهكذا وبالتالي فإن مراتب الخانات هي (1 16 256 4096 ...) وهكذا، وعلى ذلك فإنه يمكن التعبير عن العدد $(522.39)_{16}$ كالآتي:

الأوزان : $16^2 \quad 16^1 \quad 16^0 \bullet 16^{-1} \quad 16^{-2}$

العدد السادس عشري : $5 \quad 2 \quad 2 \bullet 3 \quad 9$

$$\begin{aligned}\therefore\ (522.39)_{16} &= (5\times16^2)+(2\times16^1)+(2\times16^0)+(3\times16^{-1})+(9\times16^{-2})\\ &= (5\times256)+(2\times16)+(2\times1)+(3\times0.0625)+(9\times0.0039062)\\ &= 1280+32+2+0.1875+0.0351558=(1314.222655)_{10}\end{aligned}$$

والتعبير بهذه الطريقة عن العدد السداسي عشري تسمى بالشكل الموسع. ولتمييز العدد السداسي عشري عن غيره يوضع الأساس (16) على يمين العدد في الأسفل كما هو موضح سابقاً.

2- 11- 2 التحويل من العشري إلى السداسي عشري *Decimal-to-Hexadecimal Conversion*

طريقة تحويل الأعداد من النظام العشري إلى السداسي عشري تتم بتكرار القسمة على (16) والتي تماثل تماماً الطريقة التي استخدمت في التحويل من النظام العشري إلى النظام الثماني والثنائي حيث اختلف في الأساس هنا فاصبح (16) بدلاً من (8) أو (2).

2- 11- 2- 1 تحويل الأعداد العشرية الصحيحة إلى النظام السداسي عشري

لتحويل العدد العشري $_{10}(97)$ إلى مكافئه السداسي عشري فإننا نبدأ بقسمة العدد 97 على (16) ثم نقسم خارج القسمة الذي حصلنا عليه على (16) وهكذا حتى نحصل على خارج قسمة يساوي صفراً (0). في كل خطوة من خطوات القسمة نحصل على باقي من خارج القسمة وهو الذي يشكل العدد السداسي عشري. وكما في التحويل العشري إلى الثماني، فإن الباقي الأول الذي نحصل عليه يمثل (*LSD*) والباقي الأخير يمثل (*MSD*) وهذه الخطوات موضحة كالآتي:

الباقي

$$97 \div 16 = 6 \quad 1 \quad (LSD)$$
$$6 \div 16 = 0 \quad 6 \quad (MSD)$$

وبالتالي يكون الناتج كما يلي:

$$(97)_{10} = (61)_{16}$$

مثال (2- 23): حول العدد العشري $(314)_{10}$ إلى مكافئه في النظام السداسي عشري.

الحل:

الباقي

$$314 \div 16 = 19 \quad A \quad (LSD)$$
$$19 \div 16 = 1 \quad 3$$
$$1 \div 16 = 0 \quad 1 \quad (MSD)$$

وبالتالي يكون الناتج كما يلي:

$$(314)_{10} = (13A)_{16}$$

2- 11- 2- 2 تحويل الأعداد الكسرية في النظام السداسي عشري

يتم تحويل الأعداد الكسرية في خطوات مشابهة لطريقة تحويل الكسور في النظام الثماني والثنائي وذلك عن طريق الضرب المتكرر في (16). فمثلاً لتحويل العدد الكسري $(0.78125)_{10}$ إلى نظيره في النظام السداسي عشري فإننا نبدأ بضرب العدد الكسري في (16) ثم نضرب العدد الكسري الناتج مرة أخرى في (16) وهكذا حتى يصبح العدد الكسري الناتج يساوي الصفر (0) أو حتى نصل إلى العدد المطلوب من الخانات العشرية. والأرقام الحاملة الناتجة من حاصل الضرب المتكرر تكون لنا العدد السداسي عشري. والرقم الحامل الأول فإنه يمثل (LSD) والرقم الحامل الأخير فيمثل (MSD) وتتم عملية التحويل كالآتي:

الحامل

$$0.78125 \times 16 = 12.5 \quad C$$
$$0.5 \times 16 = 8.00 \quad 8$$

وبذلك نحصل على:

$$\therefore (0.78125)_{10} = (0.C8)_{16}$$

مثال (2- 24): حول العدد العشري $(329.52)_{10}$ إلى مكافئه السداسي عشري.

الحل: نبدأ أولاً بتحويل العدد العشري الصحيح وذلك بتكرار القسمة على 16:

الباقي

$$\begin{array}{llll} 329 \div 16 = 20 & 9 & (LSD) \\ 20 \div 16 = 1 & 4 & \\ 1 \div 16 = 0 & 1 & (MSD) \end{array}$$

وبالتالي يكون الناتج كما يلي:

$$\therefore (329)_{10} = (149)_{16}$$

وبتكرار الضرب في (16) يتم تحويل العدد الكسري:

الحامل

$$\begin{array}{lll} 0.52 \times 16 = 8.32 & 8 & (MSD) \\ 0.32 \times 16 = 5.12 & 5 & \\ 0.12 \times 16 = 1.92 & 1 & \\ 0.92 \times 16 = 14.72 & E & \\ 0.72 \times 16 = 11.52 & B & \\ 0.52 \times 16 = 8.32 & 8 & (LSD) \end{array}$$

فاذا فرضنا أن العدد المطلوب من الخانات العشرية هو ست (6) خانات فتكون نتيجة التحويل هي:

$$(0.52)_{10} = (0.851EB8)_{16}$$

ويكون الناتج النهائي للعدد المطلوب هو:

$$(329.52)_{10} = (149.851EB8)_{16}$$

2- 11- 3 التحويل من السداسي عشري إلى العشري *Hexadecimal-to-Decimal Conversion*

العدد السداسي عشري كما علمنا من قبل له مراتب في الخانات من اليمين إلى اليسار تمثل قوى العدد (16). وبضرب كل خانة من خانات العدد السداسي عشري في مرتبة الخانة المقابلة لها ثم بجمع حاصل ضرب كل خانة نحصل على العدد المطلوب. ويمكن توضيح عملية التحويل بالمثال التالي.

مثال (2- 25): أوجد مكافئ العدد السداسي عشري $(F9B)_{16}$ في النظام العشري.

الحل:

الأوزان : $16^2 \quad 16^1 \quad 16^0$

العدد صحيحة عشري : F 9 B

$$\begin{aligned} \therefore (F9B)_{16} &= (F \times 16^2) + (9 \times 16^1) + (B \times 16^0) \\ &= (15 \times 256) + (9 \times 16) + (11 \times 1) \\ &= 3840 + 144 + 11 = (3995)_{10} \end{aligned}$$

والأعداد الكسرية في الأعداد السداسي عشرية يمكن تحويلها كما في الأعداد الثنائية والثمانية وتصبح مراتب الخانات في النظام السداسي عشري كالآتي:

$$\ldots\ldots 16^3 \quad 16^2 \quad 16^1 \quad 16^0 \bullet 16^{-1} \quad 16^{-2} \quad 16^{-3} \ldots\ldots$$

العلامة السادسة عشرية

مثال (2- 26): أوجد مكافئ العدد السداسي عشري $(A15.C3)_{16}$ بالنظام العشري.

الحل:

الأوزان : $16^2 \quad 16^1 \quad 16^0 \bullet 16^{-1} \quad 16^{-2}$

العدد السادس عشري : A 1 5 • C 3

$$\begin{aligned} \therefore (A15.C3)_{16} &= (A \times 16^2) + (1 \times 16^1) + (5 \times 16^0) + (C \times 16^{-1}) + (3 \times 16^{-2}) \\ &= (10 \times 256) + (1 \times 16) + (5 \times 1) + (12 \times 0.0625) + (3 \times 0.0039062) \\ &= 2560 + 16 + 5 + 0.75 + 0.0117186 = (2581.7617)_{10} \end{aligned}$$

2- 11- 4 التحويل من السداسي عشري إلى الثنائي *Hexadecimal-to-Binary Conversion*

عرفنا سابقاً أن النظام السداسي عشري يستخدم الرموز (0,1,2,……,9,A,B,C,D,E,F) وأن الحروف الأبجدية المستخدمة (A,B,C,D,E,F) تكافئ على الترتيب الأعداد العشرية (10,11,12,13,14,15). وبالتالي فإنه يمكن تحويل الأعداد من النظام السداسي عشري إلى ما يقابلها في النظام الثنائي، بحيث يمثل كل رمز من رموز النظام السداسي عشري بأربع خانات ثنائية (*4-bits*) بدلاً من ثلاث خانات كما في النظام الثماني وكما هو موضح بالجدول(2- 3).

مثال (2- 27): حول العدد $(3A5)_{16}$ إلى مكافئه الثنائي.

الحل:

$$(3A5)_{16} = \underset{0011}{3}\ \underset{1010}{A}\ \underset{0101}{5} = (001110100101)_2$$

العدد السداسي عشري	العدد الثنائي	العدد العشري
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
A	1010	10
B	1011	11
C	1100	12
D	1101	13
E	1110	14
F	1111	15

الجدول(2- 3) تمثيل العدد السداسي عشري كعدد عشري وعدد ثنائي.

مثال (1- 28): أوجد مكافئ العدد $(B35.D1)_{16}$ في النظام الثنائي.

الحل:

$$(B35.D1)_{16} = \underset{1011}{B}\ \underset{0011}{3}\ \underset{0101}{5}\ \bullet\ \underset{1101}{D}\ \underset{0001}{1}$$

$$= (101100110101.11010001)_2$$

2- 11- 5 التحويل من الثنائي إلى السداسي عشري *Binary-to-Hexadecimal Conversion*

إن التحويل من النظام الثنائي إلى النظام السداسي عشري يتم بتكوين مجموعات مكونة من أربع خانات ثنائية وذلك ابتداءً من يمين الفاصلة الثنائية للعدد الصحيح وعلى يسار الفاصلة الثنائية للعدد الكسري ثم كتابة ما يقابل كل مجموعة مكونة من أربع خانات بما يكافئها في النظام السداسي عشري. ويلاحظ أنه في حالة تجميع الخانات الثنائية الموجودة في أقصى اليسار من العدد الصحيح أو أقصى اليمين بالنسبة للعدد الكسري فإنه يمكن زيادة الخانات من صفر واحد إلى ثلاثة أصفار حتى يكون مجموع الخانات الثنائية في أقصى اليمين أو اليسار مساوياً لأربع خانات ثنائية.

مثال (2- 29): حول العدد الثنائي $(110111101.101001)_2$ إلى نظيره السداسي عشري.

الحل:

$$\begin{array}{ccccccc} 0001 & 1011 & 1101 & \bullet & 1010 & 0100 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 1 & B & D & \bullet & A & 4 \end{array}$$

لاحظ أنه تم زيادة صفرين على يمين الكسر وثلاثة أصفار على يسار العدد الصحيح.

$$\therefore (110111101.101001)_2 = (1BD.A4)_{16}$$

مثال (2- 30): حول العدد الثنائي $(11010010011.011001)_2$ إلى نظيره في النظام السداسي عشري.

الحل:

$$\begin{array}{ccccccc} 0001 & 1010 & 1011 & \bullet & 0110 & 1000 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 1 & A & B & \bullet & 6 & 8 \end{array}$$

$$\therefore (11010010011.011001)_2 = (1AB.68)_{16}$$

2- 11- 6 التحويل من السداسي عشري إلى الثماني *Hexadecimal-to-Octal Conversion*

من السهل إجراء التحويل من النظام السداسي عشري إلى النظام الثماني وذلك بتحويل العدد السداسي عشري إلى ما يكافئه في النظام الثنائي ومن ثم تحويل العدد الثنائي الناتج مرة أخري إلى عدد في النظام الثماني وكما هو موضح بالمثال التالي.

مثال (2- 31): حول العدد $(AB3E.87D)_{16}$ إلى عدد في النظام الثماني.

الحل: نبدأ أولاً بتحويل العدد السداسي عشري إلى مكافئه الثنائي:

$$(AB3E.87D)_{16} = (1010101100111110.100001111101)_2$$

ثم نقوم تحويل العدد الثنائي الناتج إلي عدد في النظام الثماني عن طريق تقسيمه إلى مجموعات كل منها عبارة عن ثلاث خانات ثنائية كما سبق شرحه كالآتي:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 001 & 010 & 101 & 001 & 111 & 110 & \bullet & 100 & 001 & 111 & 101 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & \bullet & 4 & 1 & 7 & 5 \end{array}$$

لاحظ أنه تم إضافة صفرين على يسار العدد الصحيح لتكوين مجموعات كاملة من ثلاث خانات.

$$\therefore (AB3E.87D)_{16} = (125476.4175)_8$$

2- 11- 7 التحويل من الثماني إلى السداسي عشري *Octal-to-Hexadecimal Conversion*

تتم عملية التحويل وذلك بتحويل العدد الثماني إلى مكافئه الثنائي حيث إن كل رمز ثماني يتم تمثيله بثلاث خانات ثنائية ، وبعد ذلك يتم تكوين مجموعات كل منها مكون من أربع خانات ثنائية سواء بالنسبة للعدد الصحيح أو العدد الكسري الثنائي، ومن ثم كتابة ما يقابل كل مجموعة بمكافئها السداسي عشري وكما هو موضح في المثال التالي.

مثال (1- 32): حول العدد الثماني $(25.342)_8$ إلى نظيره في النظام السداسي عشري.

الحل: نحول أولاً العدد الثماني إلى ثنائي كما يلي :

$$\therefore (25.342)_8 = (010101.011100010)_2$$

ثم نحول العدد الثنائي إلى عدد في النظام السداسي عشري كما يلي:

$$\begin{array}{cccccc} 0001 & 0101 & \bullet & 0111 & 0001 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & \bullet & 7 & 1 \end{array}$$

لاحظ أنه تم حذف الصفر الموجود على يمين الكسر الثنائي وإضافة صفرين على يسار العدد الصحيح.

$$\therefore (25.342)_8 = (12.71)_{16}$$

2- 11- 8 العمليات الحسابية في النظام السداسي عشري

Arithmetic Operations in Hexadecimal System

سنقتصر هنا على دراسة عمليتي الجمع والطرح بالطريقة المباشرة.

2- 11- 8- 1 الجمع في النظام السداسي عشري *Hexadecimal Addition*

حيث إن الرموز في النظام السداسي عشري تقع بين (0,F) فإن العدد التكراري الأول بعد (F) هو (10)، وكما سبق وبينا أن هذا العدد (10) هو العدد التكراري لأنظمة الأعداد العشرية والثنائية والثمانية أو بمعنى أشمل أن هذا العدد هو العدد التكراري الأول لأي نظام عددي. وبالتالي فإن قواعد الجمع للنظام السداسي عشري تخضع لنفس قواعد الجمع للنظام العشري مع ملاحظة أن حاصل الجمع الزائد عن $(9)_{16}$ بواحد صحيح بعبر عنه بحرف $(A)_{16}$ والزائد عن $(9)_{16}$ باثنين يعبر عنه بحرف $(B)_{16}$ وهكذا حتى $(F)_{16}$.

أما لو جمعنا واحداً صحيحاً على $(F)_{16}$ فإن الناتج يكون $(10)_{16}$ حيث الصفر هو المجموع ويرحل الواحد إلى الخانة التالية ولوجمعنا اثنين على $(F)_{16}$ فإن الناتج يكون $(11)_{16}$ أي أن المجموع هو الواحد ويرحل الواحد إلى الخانة التالية وهكذا.

والجدول(2- 4) يوضح نتائج عملية الجمع بين كل رموز النظام السداسي عشري، مع ملاحظة أن الصف الأول الأفقي والعمود الأول الرأسي يوضحان رموز هذا النظام الذي يجري فيه الجمع أما بقية الخانات فتوضح نتيجة الجمع للرمز الأفقي مع الرمز الرأسي.

F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	+

F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	**0**
10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	**1**
11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	**2**
12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	**3**
13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	**4**
14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	**5**
15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	**6**
16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	7	**7**
17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	8	**8**
18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	9	**9**
19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	A	**A**
1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	B	**B**
1B	1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	C	**C**
1C	1B	1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	D	**D**
1D	1C	1B	1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	E	**E**
1E	1D	1C	1B	1A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	F	**F**

الجدول(2- 4) عملية الجمع في النظام السداسي عشري.

مثال (2- 33): أوجد نتيجة الجمع للعددين التاليين :

$$(35AB2)_{16} + (1A675)_{16}$$

الحل: نرتب العددين رأسياً أولاً ثم نقوم بعملية الجمع تبعاً للقواعد المبينة في الجدول السابق.

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & 1 & & \\ & 3 & 5 & A & B & 2 \\ + & 1 & A & 6 & 7 & 5 \\ \hline & 5 & 0 & 1 & 2 & 7 \end{array}$$

$$\therefore (35AB2)_{16} + (1A675)_{16} = (50127)_{16}$$

2- 11- 8- 2 الطرح في النظام السداسي عشري *Hexadecimal Subtraction*

يتم الطرح في النظام السداسي عشري بالطريقة المباشرة كالآتي:

- إذا كان المطروح منه أكبر من المطروح فتتم كعملية الطرح في الأعداد العشريةمع تحويل الحروف إلى ما يقابلها من أرقام عند الطرح وتحويل باقي الطرح إلى حروف إذا لزم الأمر.
- إذا كان المطروح منه أصغر فيتم استلاف (1) من الخانة التالية وهذا الواحد يعبر عنه بستة عشر تجمع إلى الخانة التي يتم الطرح منها في العدد المطروح منه ثم يتم الطرح كما في الخطوة الأولى وكما يتضح من المثال التالي.

مثال (2- 34): اجرِ عملية الطرح الآتية:

$$(F2ABD)_{16} - (EF4CE)_{16}$$

الحل:

$$\begin{array}{cccccc} & E & {}^{1} & 9 & {}^{1}A & {}^{1} \\ & \cancel{F} & 2 & \cancel{A} & \cancel{B} & D \\ - & E & F & 4 & C & E \\ \hline & & 3 & 5 & E & D \end{array}$$

لاحظ أنه تم حذف الصفر من يمين العدد الصحيح لأنه لا قيمة له.

تدريبـــات

1) حول كلاً من الأعداد العشرية الآتية إلى مكافئاتها الثنائية:

a) 64 b) 112 c) 257 d) 27.26
e) 77.0625 f) 47.875 g) 33.125

2) حول كلاً من الأعداد الثنائية التالية إلى مكافئاتها العشرية:

a) 11011 b) 1110101 c) 111111 d) 1110.11
e) 10101.1101 f) 1100001.11011

3) أوجد حاصل جمع كل من الأعداد الثنائية الآتية:

a) 100 + 111 b) 1110.11 + 11.10
c) 1111 + 1101 d) 1001.101 + 1101.11

4) أوجد باقي الطرح للأعداد الثنائية الآتية بالطريقة المباشرة:

a) 1101 – 0100 b) 1001 – 0111
c) 11010 – 10111 d) 1100 – 1001

5) أوجد المتمم الأحادي لكل من الأعداد الثنائية الآتية:

a) 00110101 b) 11100100 c) 00010101

6) أوجد المتمم الثنائي لكل من الأعداد الثنائية الآتية:

a) 11110110 b) 01011101 c) 00110011

7) اكتب العدد الثنائي المكافئ لكل من الأعداد العشرية الآتية في شكل إشارة المقدار بحيث يتكون العدد الثنائي من ثماني خانات (8-bits):

a) +28 b) – 83 c) +99 d) – 120

8) اكتب العدد الثنائي المكافئ لكل من الأعداد العشرية الآتية في شكل المتمم الأحادي بحيث يتكون العدد الثنائي من ثماني خانات (8-bits):

a) +14 b) – 63 c) +107 d) – 122

9) أعد حل السؤال رقم (8) بحيث يكون العدد الثنائي في شكل المتمم الثنائي.

10) احسب القيمة العددية العشرية للأعداد الثنائية ذات الإشارة التالية وذلك بنظام إشارة المقدار:

a) 10111000　　b) 01100100　　c) 10110011

11) احسب القيمة العددية العشرية للأعداد الثنائية ذات الإشارة التالية وذلك بنظام المتمم الأحادي:

a) 10011101　　b) 01100110　　c) 10101101

12) احسب القيمة العددية العشرية للأعداد الثنائية ذات الإشارة التالية وذلك بنظام المتمم الثنائي:

a) 10101011　　b) 000111101　　c) 10111011

14) اجرِ عمليات الطرح الآتية باستخدام نظام المتمم الثنائي:

a) 00010110 – 00110011　　b) 01110000 – 10101111
c) 10001100 – 00111001　　d) 11011001 – 11100111

15) حول كلاً من الأعداد العشرية الآتية إلى ما يكافئها في النظام الثماني:

a) 50　　b) 100　　c) 6391　　d) 77.375
e) 120.515625　　f) 144.5625　　g) 915.141

16) حول الأعداد الثمانية الآتية إلى مكافئاتها في النظام العشري:

a) 42　　b) 254　　c) 1057　　d) 37.5
e) 96.11　　f) 115.3　　g) 14367.12

17) حول الأعداد الثمانية الآتية إلى ما يقابلها في النظام الثنائي:

a) 72　　b) 113　　c) 16.3　　d) 37.6
e) 122.775　　f) 417.632　　g) 276.621

18) حول الأعداد الثنائية الآتية إلى ما يقابلها في النظام الثماني:

a) 110101.1101　　b) 11110100.110101　　c) 110110111.10101
d) 10001001011.1001　　e) 1010111.11101

19) أوجد حاصل جمع الأعداد الثمانية الآتية:

a) $(15)_8 + (17)_8$　　b) $(44)_8 + (66)_8$

c) $(123)_8 + (321)_8$ d) $(272)_8 + (456)_8$

20) أوجد حاصل طرح الأعداد الثمانية الآتية:

a) $(32)_8 - (25)_8$ b) $(147)_8 - (74)_8$
c) $(315)_8 - (222)_8$ d) $(437)_8 - (340)_8$

21) حول الأعداد العشرية الآتية إلى ما يكافئها في النظام السداسي عشري:

a) 14 b) 80 c) 560 d) 3000
e) 62500 f) 204.125 g) 255.875 h) 631.25

22) حول الأعداد السادسة عشرية التالية إلى مكافئاتها في النظام العشري:

a) 9F b) D52 c) 67F d) ABCD
e) F.4 f) B3.E g) 1111.1 h) 888.8

23) حول الأعداد الآتية من النظام السداسي عشري إلى النظام الثنائي:

a) 8 b) 1C c) A64 d) 1F.C e) 239.4

24) حول الأعداد الثنائية التالية إلى ما يكافئها في النظام السداسي عشري:

a) 1001.1111 b) 10000.1 c) 110101.11001
d) 10100111.111011 e) 1000000.000111 f) 1111100.1000011

25) حول الأعداد الآتية من السادس عشري إلى الثماني:

a) 13A b) 25E6 c) 3016 d) B4.C
e) 78.D3 f) 2659.F41

26) حول الأعداد الآتية من الثماني إلى السادس عشري:

a) 37 b) 725 c) 2476.2 d) 1117.16
e) 1600.524 f) 3000.6125

27) أوجد حاصل الجمع للأعداد السادسة عشرية الآتية:

a) $(41)_{16} + (36)_{16}$ b) $(C8)_{16} + (3A)_{16}$
c) $(9B)_{16} + (65)_{16}$ d) $(11D)_{16} + (2E1)_{16}$
f) $(77CB5)_{16} + (A5F72)_{16}$ g) $(13EFD)_{16} + (21BB3)_{16}$

دوائر رقمية- 1

البوابات المنطقية

الأهداف العامة للوحدة

عندما تكمل هذه الوحدة يكون لديك القدرة بإذن الله على:

- معرفة البوابات المنطقية المختلفة وجدول الحقيقة لكل منها.
- كيفية عمل البوابات المنطقية مع مدخلات ذات نبضات متغيرة المستوى.

3- 1 مقدمة *Introduction*

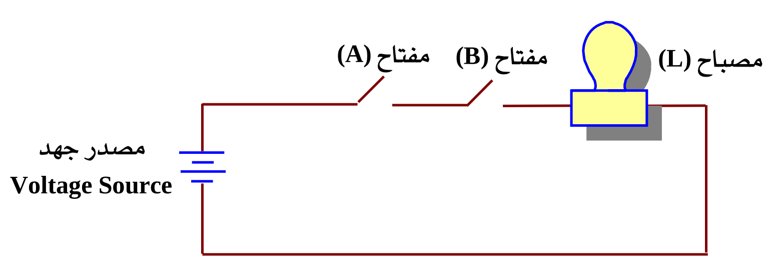
معظم الأنظمة الرقمية مثل الحاسبات و أجهزة معالجة البيانات و أجهزة التحكم و أجهزة القياس- وأنظمة الاتصالات الرقمية، تحتوي على مجموعة من الدوائر المنطقية التي تؤدي بعض العمليات الأساسية والتي يتكرر تنفيذها كثيراً وبسرعة كبيرة جداً، وهذه العمليات الأساسية هي في الواقع مجموعة من العمليات المنطقية، ولذلك تسمى الدوائر البسيطة التي تقوم بهذه العمليات بالدوائر المنطقية.

وتمثل البوابات المنطقية حجر الأساس لبناء أي دائرة منطقية ومن ثم أي نظام رقمي أو منطقي، وحيث إن كلمة منطق ترمز إلى "عملية صنع القرار" لذا فإن بوابة المنطق هي البوابة التي تعطي خرجاً فقط عندما تتحقق شروط معينة على مدخلات هذه البوابة.

وفي هذه الوحدة سوف نتناول بالدراسة الأنواع المختلفة للبوابات المنطقية وسنبدأ بالبوابات الأساسية وهي بوابة *AND* و بوابة *OR* وبوابة *NOT* أو العاكس(*INVERTER*). ومن خلال التركيبات البسيطة لهذه البوابات الثلاث يمكننا الحصول على باقي أنواع البوابات الأخرى، ثم نقوم بعد ذلك بدراسة كيفية تجميع هذه البوابات لتمثيل الدوائر المنطقية البسيطة.

3- 2 بوابة *AND* *AND gate*

تعتبر البوابة *AND* واحدة من البوابات الأساسية والتي تدخل في بناء معظم الدوال المنطقية (*Logic Functions*). والبوابة *AND* لها مدخلان أو أكثر ولها خرج واحد، وتؤدي هذه البوابة ما يسمى بالضرب المنطقي (*Logical Multiplication*)، ويمكن تمثيل هذه البوابة بعدد من المفاتيح الموصلة على التوالي في دائرة كهربائية كما هو موضح في الشكل(3- 1)، حيث المفتاحان A, B يمثلان اثنين من المتغيرات الثنائية (*Two Binary Variables*) وتكون قيمة أي متغير منهما تساوي (0) الثنائي عندما يكون المفتاح مفتوحاً (*Open*) وتساوي (1) الثنائي عندما يكون المفتاح مغلقاً (*Closed*).



الشكل(3- 1) تمثيل البوابة AND كمفتاحين على التوالي.

وبالمثل سوف نعتبر المصباح (L) يمثل المتغير الثنائي الثالث ويساوي (1) ثنائياً عندما يكون المصباح مضاء (ON) ويساوي (0) الثنائي عندما يكون غير مضاء (OFF). وحيث إن هذه الدائرة لها مفتاحان، فإنه يوجد هناك أربعة احتمالات لوضعها، وجدول(3- 1) يوضح هذه الاحتمالات الأربعة وكذلك حالة المصباح (L) عند كل احتمال. ويبين الجدول أن المصباح (L) لا يضاء إلا عندما يكون كل من المفتاحين مغلقاً، ويطلق على هذا الجدول اسم جدول الحقيقة ($Truth\ Table$).

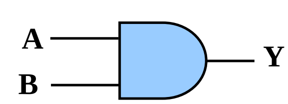
A	B	L
مفتوح	مفتوح	غير مضاء
مفتوح	مغلق	غير مضاء
مغلق	مفتوح	غير مضاء
مغلق	مغلق	مضاء

الجدول(3- 1) جدول الحقيقة للدائرة في شكل(3- 1).

يوضح الشكل(3- 2) الرمز المنطقي القياسي ($Standard$) للبوابة AND، حيث يظهر الدخلان A,B والخرج Y، ويسمى رمز البوابة AND بدخلين. ويبين الجدول(3- 2) جدول الحقيقة للبوابة AND بمدخلين.

المدخلات		الخرج
A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

الجدول(3- 2) جدول الحقيقة للبوابة AND بمدخلين.



الشكل(3- 2) رمز البوابة AND.

ويظهر الدخلان كأرقام ثنائية $(bits)$، ويلاحظ أن الخرج يساوي (1) الثنائي فقط عندما يكون الدخلان A,B تساوي (1) الثنائي، وبالتالي فإنه لأي بوابة AND وبصرف النظر عن عدد المدخلات، يكون الخرج يساوي (1) فقط عندما تكون جميع المدخلات تساوي (1).

ويمكن استنتاج عدد التشكيلات (الاحتمالات) للمدخلات الثنائية لأي بوابة عن طريق العلاقة:

$$N = 2^n$$

حيث: N عدد التشكيلات المحتملة.

n عدد المدخلات للبوابة.

وللتوضيح نقول:

لعدد اثنان مدخلان للبوابة يكون عدد التشكيلات $N = 2^2 = 4$

لعدد ثلاثة مدخلات للبوابة يكون عدد التشكيلات $N = 2^3 = 8$

لعدد أربعة مدخلات للبوابة يكون عدد التشكيلات $N = 2^4 = 16$

مثال (3- 1):

- استنتج جدول الحقيقة لبوابة AND لها ثلاث مدخلات.
- ما عدد التشكيلات لبوابة AND لها خمس مدخلات؟

الحل: يوجد ثماني تشكيلات لبوابة AND ذات المدخلات الثلاثة ، ويوضح جدول(3- 3) جدول الحقيقة لهذه البوابة.

المدخلات			الخرج
A	***B***	***C***	***Y***
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

الجدول(3- 3) جدول الحقيقة للبوابة AND بثلاثة مدخلات.

- عدد التشكيلات يمكن حسابه من العلاقة السابقة كالآتي:

$$N = 2^n = 2^5 = 32$$

يعتبر الجبر البوليني ($Boolean \;\; Algebra$) صيغة للمنطق الرمزي والذي يبين كيف تعمل البوابات المنطقية، والعبارة البولينية ($Boolean \;\; Expression$) هي طريقة مختصرة لإظهار ماذا يحدث في دائرة منطقية ما. والعبارة البولينية لبوابة AND ذات مدخلين هي:

$$Y = A \bullet B$$

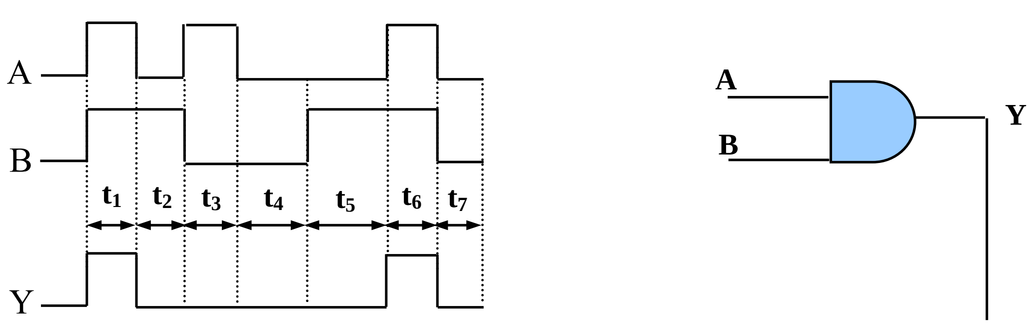
وتقرأ هذه العبارة كالتالي: الخرج Y يساوي $A \;\; AND \;\; B$ (●تعني AND)، وأحيانا تحذف النقطة من العبارة البولينية وتصبح:

$$Y = AB$$

وتقرأ الخرج Y يساوي $A \;\; AND \;\; B$.

في معظم التطبيقات لا يكون دخل البوابة ثابتاً عند مستوى ثنائي معين ولكنه يكون عبارة عن نبضات ($Pulses$) تتغير بين المستويين المرتفع ($HIGH$) والمنخفض (LOW). وسوف نرى الآن كيفية عمل بوابة AND مع مدخلات ذات نبضات متغيرة المستوى، وبالنظر إلى المدخلات بالنسبة لبعضها البعض يمكن أن نحدد مستوى الخرج عند أي لحظة.

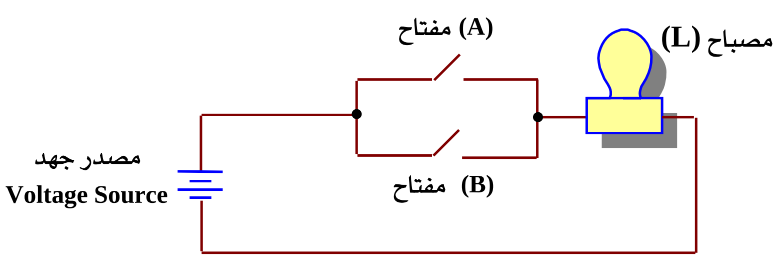
وكمثال على ذلك، في شكل(3- 3) كلا من الدخلين A,B مرتفع أي يساوي (1) خلال الفترة الزمنية t_1 والذي يجعل الخرج Y مرتفعاً في هذه الفترة أي يساوي (1)، خلال الفترة الزمنية t_2، الدخل A منخفض أي يساوي (0) والدخل B مرتفع وبالتالي يكون الخرج Y يساوي (0)، وهكذا خلال الفترات الزمنية الأخرى. يطلق على شكل نبضات الدخل والخرج كعلاقة مع الزمن اسم المخطط الزمني ($Timing \;\; Diagram$).



الشكل(3- 3) المخطط الزمني لبوابة AND بمدخلين.

3- 3 بوابة OR OR gate

تعتبر البوابة OR واحدة من البوابات الأساسية والتي تدخل في بناء معظم الدوال المنطقية. والبوابة OR لها مدخلان أو أكثر ولها خرج واحد، وتؤدي هذه البوابة ما يسمى بالجمع المنطقي ($Logical\ \ Addition$)، ويمكن تمثيل هذه البوابة بعدد من المفاتيح الموصلة على التوازي في دائرة كهربائية كما هو موضح بالشكل(3- 4). وكما في البوابة AND فإن المفتاحين A,B تكون قيمة أي متغير منهما تساوي (0) عندما يكون المفتاح مفتوحاً ($Open$) وتساوي (1) عندما يكون المفتاح مغلقاً ($Closed$).



الشكل(3- 4) تمثيل البوابة OR كمفتاحين على التوازي.

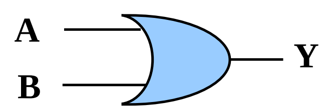
جدول(3- 4) يوضح العلاقة بين أوضاع المفتاحين وحالة المصباح، ونلاحظ من هذه الدائرة ومن الجدول أن المصباح (L) يضاء عندما يكون أي من المفتاحين أو كلاهما مغلقاً.

A	B	L
مفتوح	مفتوح	غير مضاء
مفتوح	مغلق	مضاء
مغلق	مفتوح	مضاء

مضاء	مغلق	مغلق

الجدول(3- 4) جدول الحقيقة للدائرة في شكل (3- 4).

يوضح الشكل(3- 5) الرمز المنطقي القياسي للبوابة OR، حيث يظهر الدخلان A,B والخرج Y. ويبين الجدول(3- 5) جدول الحقيقة للبوابة OR بمدخلين.



الشكل(3- 5) رمز البوابة OR.

المدخلات		الخرج
A	***B***	***Y***
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

الجدول(3- 5) جدول الحقيقة للبوابة OR بمدخلين.

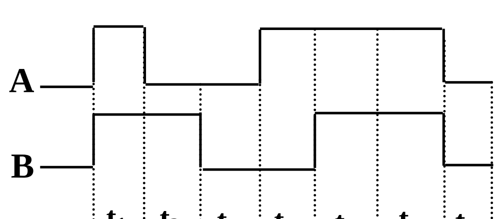
ويلاحظ من الجدول(3- 5) أن الخرج يساوي (1) أي حقيقياً عندما يكون أي من الدخلين أو كلاهما عند المستوى (1)، وأن الخرج يكون غير حقيقي أي (0) عندما تكون كل المدخلات عند مستوى (0) الثنائي. والعبارة البولينية لبوابة OR ذات مدخلين هي:

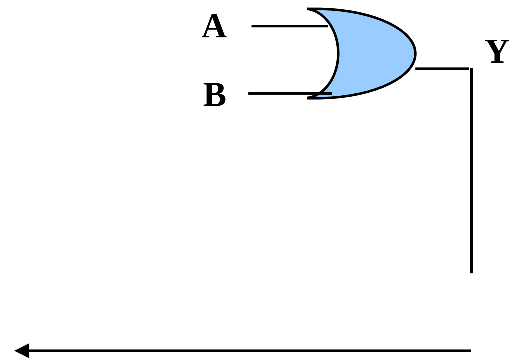
$$Y = A + B$$

وتقرأ هذه العبارة كالتالي: الخرج Y يساوي $A \;\; OR \;\; B$ (+ تعني OR).

والآن سوف نرى كيفية عمل بوابة OR مع مدخلات ذات نبضات متغيرة المستوى، وكما سبق شرحه في بوابة AND يجب النظر إلى المدخلات بالنسبة لبعضها البعض حتى نتمكن من تحديد مستوى الخرج عند أي فترة زمنية.

في شكل(3- 6) كل من الدخلين A,B مرتفع أي يساوي (1) خلال الفترة الزمنية t_1 والذي يجعل الخرج Y مرتفعاً في هذه الفترة أي يساوي (1)، خلال الفترة الزمنية t_2، الدخل A منخفض أي يساوي (0) والدخل B مرتفع وبالتالي يكون الخرج Y يساوي (1)، وهكذا خلال الفترات الزمنية الأخرى.





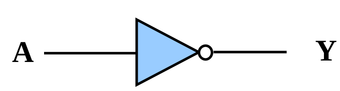
الشكل(3- 6) المخطط الزمني لبوابة OR بمدخلين.

3- 4 **بوابة** *NOT* (**العاكس**) *NOT gate (INVERTER)*

العاكس أو بوابة NOT تؤدي عملية يطلق عليها العكس (*Inversion*) أو الإتمام (*Complementation*). والعاكس يغير المستوى المنطقي للدخل إلى عكسه، فإذا كان دخله (1) يغيره فى الخرج إلى (0)، وإذا كان دخله (0) يغيره إلى (1).

وتعتبر البوابة *NOT* من البوابات التي لها دخل واحد. يوضح شكل(3- 7) الرمز المنطقي المستخدم لبوابة العاكس، أما الجدول(3- 6) فيوضح جدول الحقيقة لهذه البوابة.

الدخل	الخرج
A	***Y***
0	1
1	0



الشكل(3- 7) رمز البوابة *NOT*. الجدول(3- 6) جدول الحقيقة للبوابة *NOT* أوالعاكس.

من جدول الحقيقة نجد أن الخرج يكون نفي أو عكس الدخل، ويعبر عن هذه العملية بالتعبير البوليني الآتي:

$$Y = \overline{A}$$

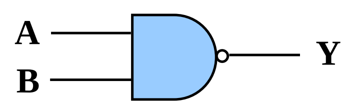
وتقرأ على النحو التالي: الخرج Y يساوي $NOT\ A$ وتسمى الإشارة فوق A باسم bar وبالتالي فإن التعبير البوليني يقرأ ، الخرج Y يساوي $A\ bar$ ($Y = \overline{A}$).

3- 5 بوابة $NAND$ $NAND\ gate$

كلمة ($NAND$) هي اختصار لكلمتي ($NOT\ AND$) وهي تعني عكس AND، وهذه البوابة يمكن الحصول عليها بتوصيل دخل بوابة العاكس مع خرج البوابة AND كما يبين ذلك شكل(3- 8)، كما يبين الشكل الرمز المنطقي لهذه البوابة حيث إنه رمز بوابة AND ولكن مع دائرة صغيرة عند الخرج والتي ترمز إلى بوابة العاكس. جدول(3- 7) يوضح جدول الحقيقة للبوابة $NAND$ بمدخلين.

المدخلات		الخرج
A	**B**	**Y**
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

الجدول(3- 7) جدول الحقيقة للبوابة $NAND$ بمدخلين.



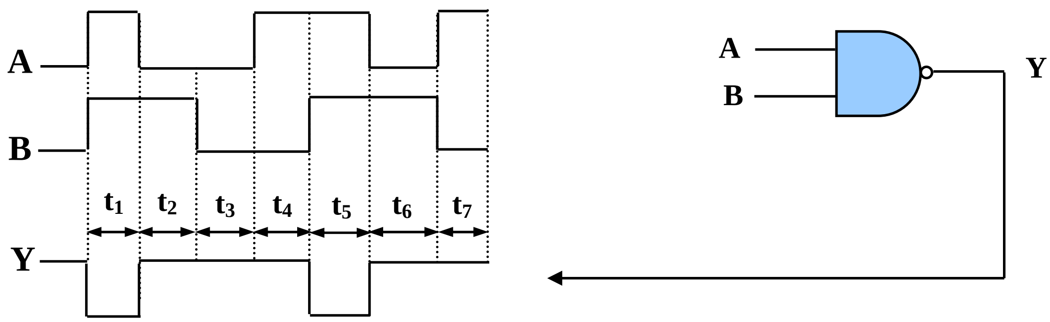
الشكل(3- 8) رمز البوابة $NAND$.

نلاحظ من الجدول أن الخرج يكون غير حقيقي (0) عندما تكون كل المدخلات عند الواحد (1) المنطقي، وأن الخرج يكون حقيقياً (1) عندما يكون أحد المدخلات على الأقل عند الصفر (0) المنطقي، وهذا عكس البوابة AND. وتعتبر البوابة $NAND$ إحدى البوابات الرئيسة الهامة في الدوائر الرقمية، فهي تستخدم على نطاق واسع في معظم النظم الرقمية حيث يمكن أن تؤدي عمل كل من بوابات NOT, OR, AND، أو أي تشكيلة من هذه البوابات، ويعبر عن عمل البوابة $NAND$ بالتعبير البوليني:

$$Y = \overline{AB}$$

وسوف نشرح الآن كيفية عمل بوابة $NAND$ مع مدخلات ذات نبضات متغيرة المستوى، مع ملاحظة أن البوابة $NAND$ تعطي خرجاً (0) فقط عندما تكون جميع المدخلات تساوي (1).

في شكل(2- 9) كل من الدخلين A,B مرتفع أي يساوي (1) خلال الفترة الزمنية t_1 والذي يجعل الخرج Y منخفضاً في هذه الفترة أي يساوي (0)، خلال الفترة الزمنية t_2، الدخل A منخفض أي يساوي (0) والدخل B مرتفع أي يساوي (1) وبالتالي يكون الخرج Y يساوي (1)، وهكذا خلال الفترات الزمنية الأخرى.

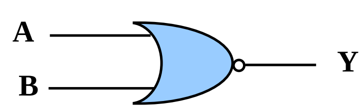


الشكل(3- 9) المخطط الزمني لبوابة *NAND* بمدخلين.

3- 6 **بوابة** *NOR* *NOR gate*

كلمة (*NOR*) هي أيضاً اختصار لكلمتي (*NOT OR*) وهي تعني عكس *OR*، وهذه البوابة يمكن الحصول عليها بتوصيل دخل بوابة العاكس (*NOT gate*) مع خرج البوابة *OR* كما هو موضح في شكل(2- 10)، ويبين الشكل أيضا الرمز المنطقي للبوابة *NOR*. وجدول الحقيقة للبوابة *NOR* بمدخلين موضح في جدول(2- 8).

المدخلات		الخرج
A	*B*	*Y*
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



الشكل(3- 10) رمز البوابة *NOR*.

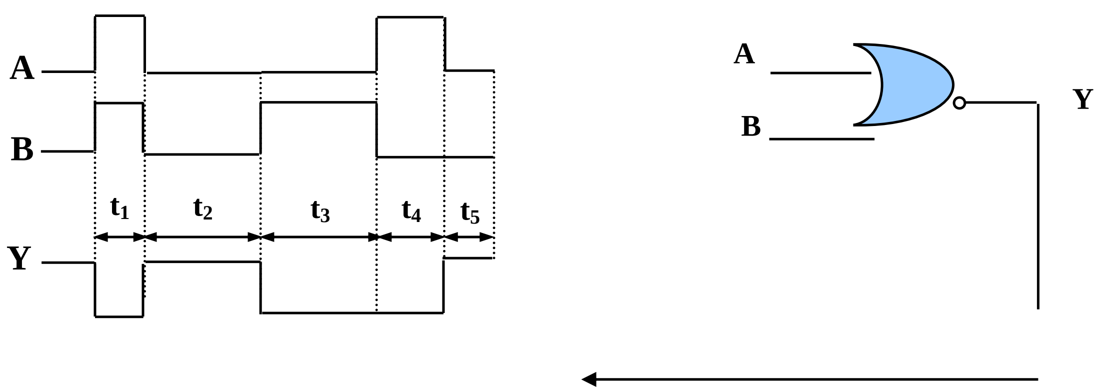
الجدول(3- 8) جدول الحقيقة للبوابة *NOR* بمدخلين.

نلاحظ من الجدول أن الخرج (Y) يكون غير حقيقي (0) عندما يكون أحد المدخلات على الأقل عند المستوى (1) المنطقي، وأن الخرج يكون حقيقياً (1) فقط عندما تكون جميع المدخلات عند الصفر (0) المنطقي.

وتعتبر البوابة NOR كما هو الحال في البوابة $NAND$ من البوابات الرئيسة الجامعة في الدوائر الرقمية، حيث يمكن أن تؤدي عمل كل من بوابات NOT, OR, AND، أو أي تشكيلة منها. والتعبير البوليني للبوابة NOR هو:

$$Y = \overline{A + B}$$

شكل(3- 11) يوضح بوابة NOR لها الدخلان A,B ذوا نبضات متغيرة المستوى، ويمكن من خلال جدول الحقيقة للبوابة NOR الحصول على الخرج (Y) الموضح بالشكل.

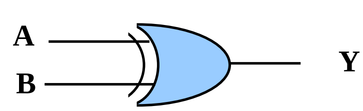


الشكل(3- 11) المخطط الزمني لبوابة NOR بمدخلين.

3- 7 بوابة OR المنفردة (المنحصرة) *Exclusive-OR gate*

تسمى البوابة OR المنفردة باسم بوابة "أيهما وليس كلاهما" وتختصر إلى XOR-*gate*، ويوضح شكل(3- 12) الرمز المنطقي للبوابة.

المدخلات		الخرج
A	B	Y
0	0	0



0	1	1
1	0	1
1	1	0

الشكل (3- 12) رمز البوابة XOR.

الجدول (3- 9) جدول الحقيقة للبوابة XOR.

جدول الحقيقة للبوابة XOR موضح في جدول (3- 9)، ونلاحظ من الجدول أن الخرج (Y) لا يساوي (1) إلا إذا كان الدخلان A,B مختلفين، بمعنى أن يكون أحدهما (1) والآخر (0) أو العكس، وتعطي خرجاً يساوي (0) عندما يكون الدخلان متساويين.

نلاحظ أن جدول الحقيقة للبوابة XOR مشابه لجدول الحقيقة للبوابة OR فيما عدا الحالة التي يكون فيها $A = B = 1$، كما نلاحظ أن البوابة XOR تعطي خرجاً يساوي (1) عندما يكون أحد الدخلين (1) أو بمعنى آخر تعطي خرجاً يساوي (1) عندما يكون عدد الآحاد عند الدخل عدداً فردياً، ولذا فإنه يطلق عليها بوابة اختبار الأرقام الثنائية الفردية.

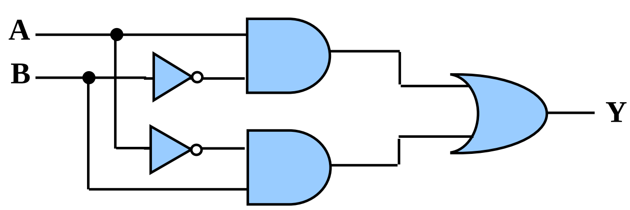
ومن جدول الحقيقة يمكن استنتاج التعبير البوليني لهذه البوابة وهو:

$$Y = \overline{A}B + A\overline{B}$$

والذي يرمز إليه اختصاراً بالتعبير المنطقي:

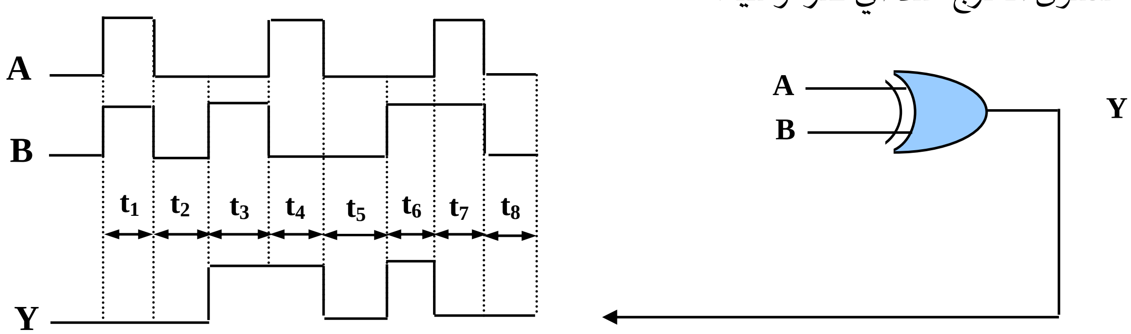
$$Y = A \oplus B$$

والعلامة $\oplus$ تعني أن A منفردة أو B منفردة. ومن التعبير البوليني السابق للبوابة XOR يمكننا بناء البوابة باستخدام بوابات AND,OR,NOT، وهذا ما يبينه الشكل(3- 13) حيث تقوم هذه الدائرة المنطقية بوظيفة البوابة XOR المنطقية.



الشكل(3- 13) البوابة XOR ممثلة بالبوابات AND,OR,NOT.

شكل(3- 14) يوضح كيفية عمل البوابة *XOR* عندما تكون المدخلات لها عبارة عن نبضات متغيرة المستوى، وكما قلنا سابقاً يجب النظر إلى المدخلات بالنسبة لبعضها البعض حتى نتمكن من تحديد مستوى الخرج عند أي فترة زمنية.



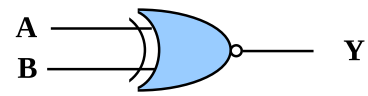
الشكل(3- 14) المخطط الزمني لبوابة *XOR*.

3- 8 بوابة *NOR* المنفردة (المنحصرة) *Exclusive-NOR gate*

البوابة *NOR* المنفردة وتختصر إلى *XNOR-gate*، ويوضح شكل(3- 15) الرمز المنطقي للبوابة.

جدول الحقيقة للبوابة *XNOR* موضح بالجدول(3- 10)، ويلاحظ من الجدول أن الخرج (Y) لا يساوي (1) إلا إذا كان الدخلان A,B متساويين أي $A = B = 0$ أو $A = B = 1$ ويعطي خرجاً يساوي (0) عندما يكون الدخلان مختلفين بمعنى أن يكون أحدهما (1) والآخر (0) أو العكس، بمعنى آخر أنها تعطي خرجاً يساوي (1) عندما يكون عدد الآحاد عند الدخل عدداً زوجياً، ولذا فإنه يطلق عليها بوابة اختبار الأرقام الثنائية الزوجية.

المدخلات		الخرج
A	*B*	*Y*
0	0	1



الشكل(3- 15) رمز البوابة $XNOR$.

0	1	0
1	0	0
1	1	1

الجدول(3- 10) جدول الحقيقة للبوابة $XNOR$.

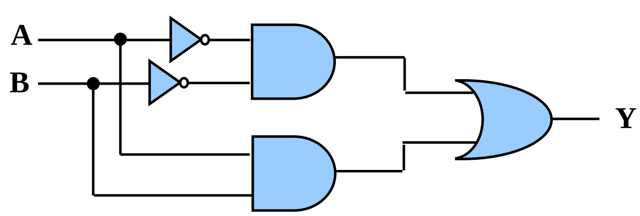
ومن جدول الحقيقة يمكن استنتاج التعبير البوليني لهذه البوابة وهو:

$$Y = AB + \overline{A}\ \overline{B}$$

والذي يرمز إليه اختصاراً بالتعبير المنطقي:

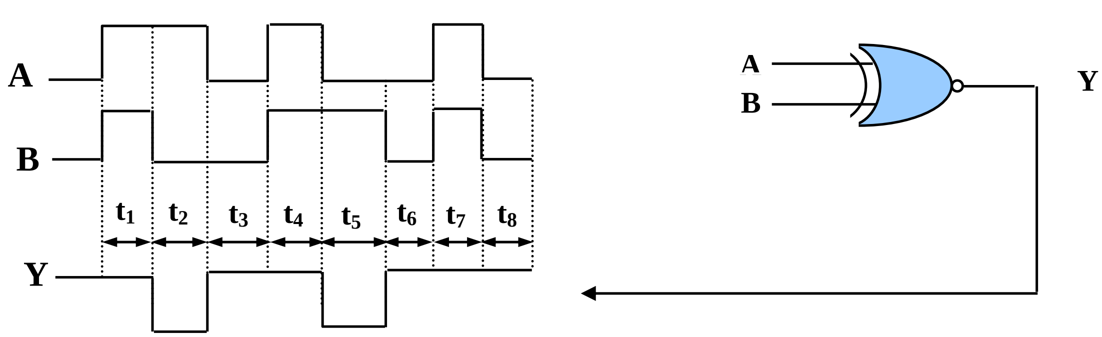
$$Y = A \odot B$$

والعلامة $\odot$ تعني علامة التكافؤ. ومن التعبير البوليني السابق للبوابة $XNOR$ يمكننا بناء البوابة باستخدام بوابات AND,OR,NOT، وهذا ما يبينه الشكل(3- 16) حيث تقوم هذه الدائرة المنطقية بوظيفة البوابة $XNOR$ المنطقية.



الشكل(3- 16) البوابة $XNOR$ ممثلة بالبوابات AND, OR, NOT.

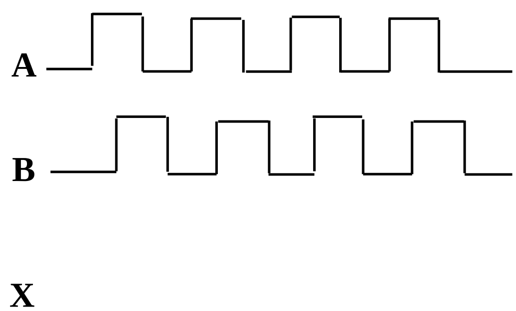
شكل(3- 17) يوضح بوابة $XNOR$ ذات دخلين A,B لهما نبضات متغيرة المستوى، وعن طريق جدول الحقيقة للبوابة $XNOR$ يمكننا الحصول على الخرج (Y) كما هو موضح بالشكل.



الشكل(3- 17) المخطط الزمني لبوابة $XNOR$.

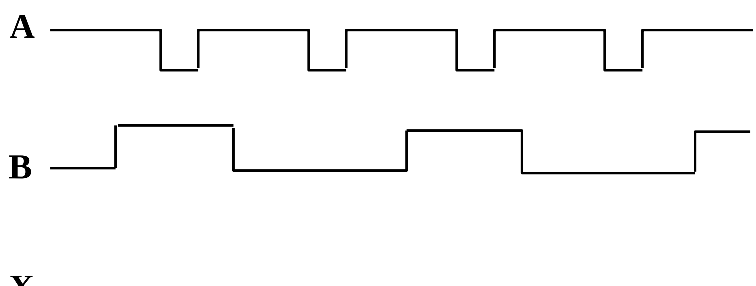
تدريبـــات

1) ارسم شكل المخطط الزمني للخرج X لبوابة AND ذات المدخلين A,B، إذا كان شكل نبضات الدخل على المدخلين موضحاً في الشكل التالي.

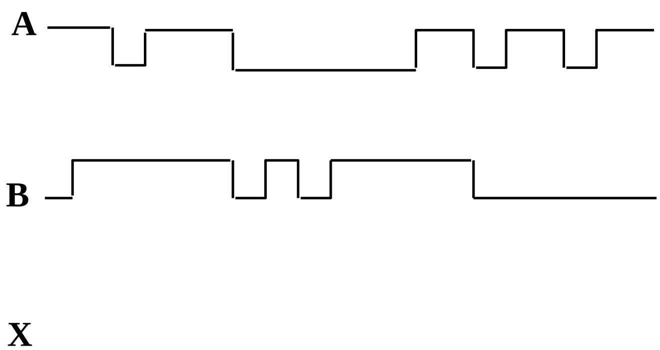


2) ارسم شكل المخطط الزمني للخرج X لبوابة OR ذات المدخلين A,B، إذا كان شكل نبضات الدخل على المدخلين موضحاً في الشكل السابق.

3) ارسم شكل المخطط الزمني للخرج X لبوابة $NAND$ ذات المدخلين A,B، إذا كان شكل نبضات الدخل على المدخلين موضحاً في الشكل التالي.



4) ارسم شكل المخطط الزمني للخرج X لبوابة NOR ذات المدخلين A,B، اذا كان شكل نبضات الدخل على المدخلين موضحاً في الشكل التالي.



5) ارسم شكل المخطط الزمني للخرج X لبوابة XOR ذات المدخلين A,B، إذا كان شكل نبضات الدخل على المدخلين موضحاً في الشكل السابق.

6) ارسم شكل المخطط الزمني للخرج X لبوابة $XNOR$ ذات المدخلين A,B، إذا كان شكل نبضات الدخل على المدخلين موضحاً في الشكل السابق.

دوائر رقمية- 1

بناء واختزال الدوائر المنطقية

بناء واختزال الدوائر المنطقية

4

الأهداف العامة للوحدة

عندما تكمل هذه الوحدة يكون لديك القدرة بإذن الله على:

- استنتاج المعادلات المنطقية من جدول الحقيقة.
- تمثيل المعادلات المنطقية بالبوابات الأساسية.
- معرفة القواعد الأساسية للجبر البوليني.
- معرفة نظريتي ديمورجان.
- تبسيط التعبيرات البولينية باستخدام قواعد الجبر البوليني.
- معرفة كتابة التعبيرات البولينية على شكل (SOP) وشكل (POS).
- كيفية تحويل التعبيرات البولينية من شكل (SOP) إلى شكل (POS) والعكس.
- تحويل التعبير البوليني من شكل (SOP) أو شكل (POS) إلى جدول الحقيقة.
- استنتاج التعبير البوليني من شكل (SOP) أو شكل (POS) من جدول الحقيقة.
- معرفة الخواص العامة لبوابات NAND, NOR .
- تبسيط التعبيرات البولينية باستخدام خريطة كارنوف.

4- 1 مقدمة *Introduction*

في الوحدة السابقة تمت دراسة البوابات المنطقية كأساسيات منفردة، واستعرضنا كيفية تصميم الدوائر المنطقية البسيطة باستخدام هذه البوابات. عند تصميم أي دائرة منطقية يجب مراعاة أن تكون عدد البوابات المستخدمة أقل ما يمكن، مع أقل عدد ممكن من المدخلات لكل بوابة. توفيراً للتكاليف المطلوبة لتصميم الدائرة.

- في هذه الوحدة سوف نتناول بالدراسة كيفية استنتاج المعادلات المنطقية من جدول الحقيقة، وكيفية تمثيل المعادلات المنطقية بالبوابات الأساسية، وكيفية تبسيط الدوال المنطقية (التعبيرات البولينية) باستخدام قواعد الجبر البوليني . وسوف نتناول بالتحليل أيضاً طريقة التبسيط للتعبيرات البولينية باستخدام خريطة كارنوف (*Karnaugh-Map*) والتي يطلق عليها أيضاً اسم خريطة *K* – (*K–map*).

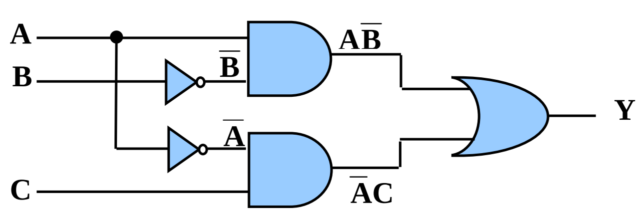
4- 2 التعبير البوليني للدائرة المنطقية *The Boolean Expression for a Logic Circuit*

لاستنتاج التعبير البوليني لأي دائرة منطقية، نبدأ من المدخلات في أقصى اليسار متجهين إلى الخرج النهائي للدائرة وذلك بكتابة الخرج لكل بوابة. وكمثال على ذلك، نفترض الدائرة المنطقية الموضحة في شكل(4- 1). ويمكن استنتاج التعبير البوليني لهذه الدائرة كما يلي:

1. التعبير البوليني لبوابة *AND* والتي لها الدخلان $\overline{B}$ A, هو $A\overline{B}$.
2. التعبير البوليني لبوابة *AND* والتي لها الدخلان C $\overline{A}$, هو $\overline{A}C$.
3. ويكون التعبير البوليني لبوابة *OR* والتي لها الدخلان $A\overline{B}$, $\overline{A}C$ هو $A\overline{B}+\overline{A}C$.

وعلى ذلك يكون الخرج النهائي للدائرة هو:

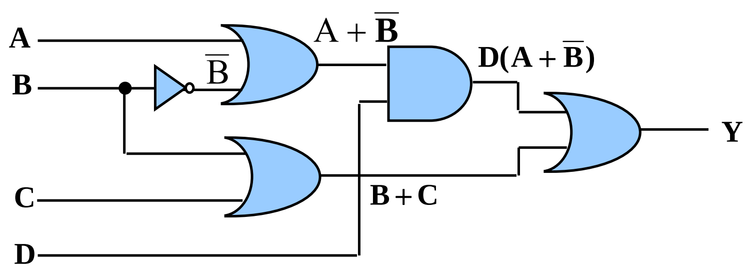
$$Y = A\overline{B} + \overline{A}C$$



الشكل(4- 1) دائرة منطقية تبين كيفية استنتاج التعبير البوليني للخرج.

مثال (4- 1): اكتب التعبير البوليني للدائرة المنطقية الموضحة في شكل (4- 2).

الحل:



الشكل(4- 2) الدائرة المنطقية لمثال(4- 1) وتبين كيفية الحصول على التعبير البوليني للخرج.

ويكون التعبير البوليني لخرج الدائرة النهائي هو:

$$Y = D(A + \overline{B}) + (B + C)$$

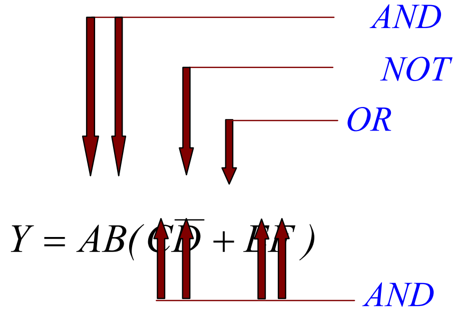
4- 3 تمثيل الدائرة المنطقية باستخدام التعبير البوليني

Implementation of a Logic Circuit Using a Boolean Expression

عن طريق بعض الأمثلة التوضيحية سوف نناقش الآن كيف يمكن تمثيل دائرة منطقية ما بمعلومية التعبير البوليني لها. لنفترض الآن أننا نريد تمثيل التعبير البوليني الآتي:

$$Y = AB(C\overline{D} + EF)$$

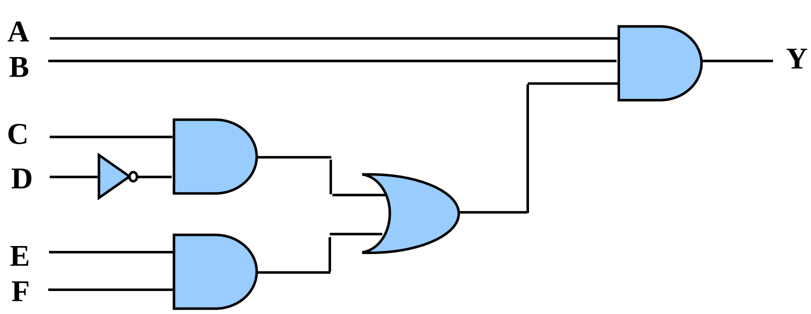
عند تقسيم هذا التعبير البوليني نجد أن المتغيرات A,B ثم $C\overline{D}+EF$ تمثل ثلاث مدخلات لبوابة AND، والمتغير $C\overline{D}+EF$ يمكن تشكيله بأخذ $C,\overline{D}$ على دخلي بوابة AND، وأخذ E,F على دخلي بوابة AND أخرى، ثم نأخذ كلاً من خرج البوابتين AND على دخلي بوابة OR. ويمكن توضيح عملية التقسيم السابقة كالآتي:



قبل أن نبدأ في تمثيل هذا التعبير البوليني يجب أولاً الحصول على الحد $C\overline{D}+EF$؛ ولكن قبل الحصول على هذا الحد علينا الحصول على الحدين $C\overline{D},EF$؛ ولكن قبل ذلك يجب الحصول على المتغير $\overline{D}$، وبذلك كما نرى هناك سلسلة من العمليات المنطقية يجب أن تتم على الترتيب. وعلى ذلك فإن البوابات المنطقية المطلوبة لتمثيل التعبير البوليني $Y=AB(C\overline{D}+EF)$ هي:

1. بوابتا NOT لتمثيل المتغير $\overline{D}$.
2. بوابتي AND لكل منهما مدخلان لتمثيل الحدين $C\overline{D},EF$.
3. بوابة OR ذات مدخلين لتمثيل الحد $C\overline{D}+EF$.
4. بوابة AND لها ثلاثة مدخلات لتمثيل الخرج النهائي Y.

والدائرة المنطقية التي تمثل التعبير البوليني السابق موضحة في شكل(4- 3).



الشكل(4- 3) الدائرة المنطقية للتعبير البوليني $Y = AB(C\overline{D} + EF)$.

4- 4 تمثيل الدائرة المنطقية من خلال جدول الحقيقة

Implementation of a Logic Circuit via a Truth Table

سوف نتعرف في هذا الجزء على كيفية تمثيل دائرة منطقية من خلال جدول الحقيقة الخاص بها بدلا من التعبير البوليني، حيث يمكن لنا كتابة التعبير البوليني من جدول الحقيقة ومن ثم تمثيل الدائرة المنطقية. جدول(4- 1) يبين جدول الحقيقة لدائرة منطقية ما، والمراد تمثيل هذه الدائرة والتي تحقق هذا الجدول. يمكن الحصول على التعبير البوليني من جدول الحقيقة كما يلي:

1. نحدد من جدول الحقيقة تشكيلة المدخلات التي تعطي الخرج $Y=1$، ففي الصف الثالث من الجدول نجد أن الخرج $Y=1$ حيث قيمة المدخلات هي $A=0,\ B=1,\ C=0$، وتكتب بالتعبير البوليني على الشكل $\overline{A}B\overline{C}$ حيث يكتب المتغير برمزه إذا كان يساوي (1)، ويكتب بعكس رمزه إذا كان يساوي (0)، وبالمثل فإن الخرج يساوي (1) في الصف السابع من الجدول والذي يكتب بالتعبير البوليني على الشكل $AB\overline{C}$.

المدخلات			الخرج
A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

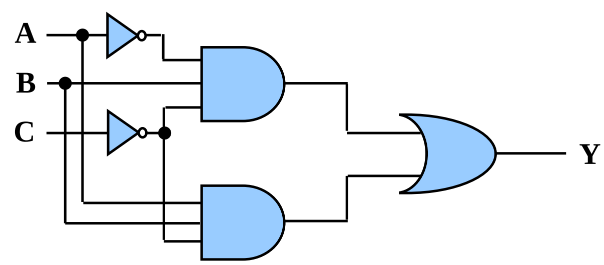
الجدول(4- 1) جدول الحقيقة لدائرة منطقية ما يراد تمثيلها.

2. بتجميع التعبيرات البولينية التي تعطي الخرج $Y=1$ عن طريق بوابة OR نحصل على:

$$Y = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$$

الحد الأول في التعبير البوليني السابق $\overline{A}B\overline{C}$ يمكن تمثيله عن طريق تجميع المتغيرات الثلاثة $\overline{A},B,\overline{C}$ على بوابة AND، والحد الثاني من التعبير البوليني $AB\overline{C}$ يمكن تمثيله عن طريق تجميع المتغيرات الثلاثة $A,B,\overline{C}$ على بوابة AND، وبتجميع الحدين الأول والثاني على بوابة OR يمكننا الحصول على التعبير البوليني للخرج Y.

والبوابات المنطقية المطلوبة لتمثيل التعبير البوليني السابق هي: بوابتان NOT لتمثيل كل من المتغيرين $\overline{A},\overline{C}$ ؛ بوابتان AND ذات ثلاثة مدخلات لتمثيل الحدين $\overline{A}B\overline{C}$ ، $AB\overline{C}$ ، وبوابة OR بدخلين لنحصل منها على دالة الخرج النهائي $Y = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$ ، والدائرة المنطقية التي تمثل هذا التعبير البوليني موضحة في شكل(4- 4).



الشكل(4- 4) الدائرة المنطقية للتعبير البوليني $Y = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$.

مثال (4- 2): استنتج الدائرة المنطقية المطلوبة لتمثيل جدول الحقيقة الموضح في جدول(4- 2).

المدخلات			الخرج
A	**B**	**C**	**Y**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

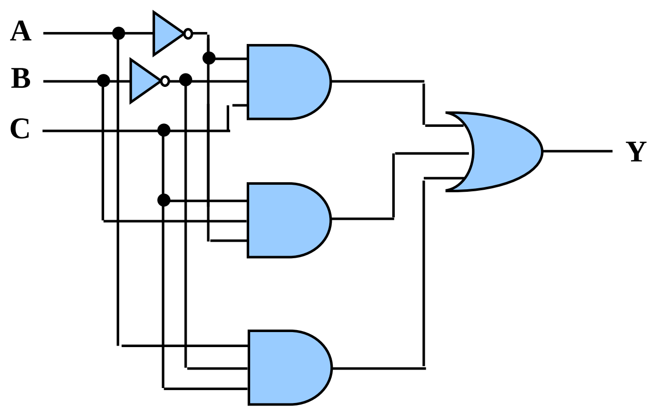
1	1	1	0

الجدول(4- 2) جدول الحقيقة للدائرة المنطقية المراد تمثيلها.

الحل: التعبير البوليني لجدول الحقيقة المبين يمكن كتابته عن طريق تجميع الحدود التي تعطي الخرج $Y = 1$ (الحدود المظللة بالجدول) على بوابة OR كما يلي:

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}C$$

ويكون التمثيل النهائي للدائرة كما هو موضح بشكل(4- 5).



الشكل(4- 5) الدائرة المنطقية للتعبير البوليني $Y = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}C$.

4- 5 قواعد الجبر البوليني *Rules of Boolean Algebra*

جدول(4- 3) يبين القواعد الأساسية للجبر البوليني والتي تستخدم في تناول وتبسيط التعبيرات البولينية.

1. $A + 0 = A$	2. $A + 1 = 1$
3. $A \bullet 0 = 0$	4. $A \bullet 1 = A$
5. $A + A = A$	6. $A + \overline{A} = 1$

7. $A \bullet A = A$	8. $A \bullet \overline{A} = 0$
9. $\overline{\overline{A}} = A$	10. $A + AB = A$

الجدول(4- 3) القواعد الأساسية للجبر البوليني.

والآن سوف نرى كيفية تحقيق هذه القواعد وذلك من خلال تطبيقها على البوابات المنطقية التي سبق دراستها.

القاعدة (1): $A + 0 = A$ هذه القاعدة يمكن فهمها بملاحظة ماذا يحدث عندما يكون أحد الدخلين لبوابة OR دائماً يساوي (0) والدخل الآخر، A، والذي يمكن أن يأخذ القيمة (1) أو (0). فإذا كان A=1 فإن الخرج يساوي (1) والذي يساوي A. وإذا كان A=0 فإن الخرج يساوي (0) وهو أيضا يساوي A. وبناء على ذلك فإن أي متغير يدخل على بوابة OR مع (0) فإن الخرج يساوي قيمة هذا المتغير.

القاعدة (2): $A + 1 = 1$ هذه القاعدة تقول إذا كان أحد الدخلين لبوابة OR دائماً يساوي (1) والدخل الآخر، A، والذي يأخذ القيمة (1) أو القيمة (0). وجود (1) على أحد الدخلين لبوابة OR يعطي دائماً خرجاً يساوي (1) بصرف النظر عن قيمة المتغير الذي على الدخل الآخر. وبناء على ذلك فإن أي متغير يدخل على بوابة OR مع (1) فإن الخرج دائماً يساوي (1).

القاعدة (3): $A \bullet 0 = 0$ هذه القاعدة تقول إذا كان أحد الدخلين لبوابة AND دائماً يساوي (0) والدخل الآخر، A، فإن الخرج دائما يساوي (0) بصرف النظر عن قيمة المتغير الذي على الدخل الآخر. وبناء على ذلك فإن أي متغير يدخل على بوابة AND مع (0) فإن الخرج دائماً يساوي (0).

القاعدة (4): $A \bullet 1 = A$ هذه القاعدة تقول إذا كان أحد الدخلين لبوابة AND دائماً يساوي (1) والدخل الآخر، A، فإن الخرج يساوي قيمة المتغير (A)، فإذا كان المتغير A=0 فإن خرج البوابة AND يساوي (0)، وإذا كان المتغير A=1 فإن خرج البوابة AND يساوي (1) لأن الدخلين الآن قيمتهما تساوي (1). وبناء على ذلك فإن أي متغير يدخل على بوابة AND مع (1) فإن الخرج يساوي قيمة هذا المتغير.

القاعدة (5): $A + A = A$ مفهوم هذه القاعدة أنه إذا كان كل من الدخلين للبوابة OR عليهما نفس المتغير A، فإن الخرج يكون قيمة هذا المتغير. فإذا كان المتغير $A = 0$ فذلك يعني $0 + 0 = 0$، وإذا كان المتغير $A = 1$ فهذا يعني $1 + 1 = 1$.

القاعدة (6): $A+\overline{A}=1$ يمكن شرح هذه القاعدة كالتالي: إذا دخل متغير A على أحد دخلي بوابة OR والمتغير $\overline{A}$ على المدخل الآخر لنفس البوابة فإن الخرج دائماً يساوي (1). إذا كانت $A=0$ يكون $0+\overline{0}=0+1=1$. وإذا كانت $A=1$ يكون $1+\overline{1}=1+0=1$.

القاعدة (7): $\mathbf{A \bullet A = A}$ إذا دخل المتغير A على دخلي البوابة AND فإن الخرج يكون قيمة هذا المتغير. فإذا كان المتغير $A=0$ فذلك يعني $0 \bullet 0 = 0$، وإذا كان المتغير $A=1$ فهذا يعني $1 \bullet 1 = 1$، وفي كلتا الحالتين يكون خرج البوابة AND يساوي قيمة المتغير A.

القاعدة (8): $A \bullet \overline{A} = 0$ إذا دخل متغير A على أحد دخلي بوابة AND والمتغير $\overline{A}$ على المدخل الآخر لنفس البوابة فإن الخرج دائماً يساوي (0)، وهذا من السهل فهمه لأن أحد الدخلين A أو $\overline{A}$ سوف يساوي (0) دائماً، وعندما يوجد (0) على أحد دخلي بوابة AND فمن المؤكد أن الخرج يساوي (0) أيضاً.

القاعدة (9): $\overline{\overline{A}} = A$ إذا تم عكس متغير مرتين تكون النتيجة هى قيمة هذا المتغير. إذا كان المتغير $A=0$ وتم عكسه نحصل على (1)، فإذا تم عكس (1) مرة أخرى نحصل على (0) وهو يساوي قيمة المتغير الأصلي.

القاعدة (10): يمكن تحقيق هذه القاعدة باستخدام القاعدة (2) والقاعدة (4) كالآتي:

$$\begin{aligned} A + AB &= A\,(1 + \boldsymbol{B}) \\ &= A\,(1) \\ &= A \end{aligned}$$

4- 6 نظريات ديمورجان *Demorgan's Theorems*

نظريات ديمورجان تعتبر جزءاً هاماً من الجبر البوليني، فهذه النظريات تستخدم لتحويل التعبيرات الجبرية من وضعية AND الأساسية إلى وضعية OR وبالعكس. كما تسمح لنا بحذف العلامات الفوقية (*bars*) من المتغيرات المتعددة، ويمكن كتابة نظريتي ديمورجان لمتغيرين على الشكل التالي:

نظرية ديمورجان الأولى: $\overline{A+B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$

نظرية ديمورجان الثانية: $\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$

النظريـــة الأولى تغـــير مـــن وضـــعية *OR* الأساســـية إلى وضـــعية *AND* كمـــا هـــو موضـــح في شكل(4- 6) حيث تكافئ البوابة *NOR* في الطرف الأيسر البوابة *AND* ولكن بمدخلين معكوسين في الطرف الأيمن حيث تقوم الدائرة الصغيرة في المدخل مقام بوابة العاكس.

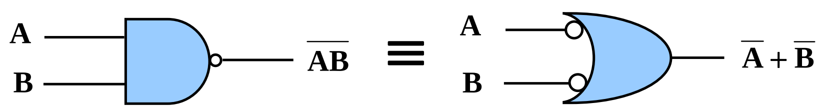
ويمكن إثبات هذه النظرية عن طريق جدول الحقيقة كما هو مبين في الجدول(4- 4). يطلق على البوابة التي في الطرف الأيمن اسم بوابة *AND* السالبة *(negative AND)*.

الشكل(4- 6) التغير من وضعية *OR* إلى وضعية *AND*.

المدخلات		الخرج	
A	B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}\bullet\overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

الجدول(3- 4) اثبات نظرية ديمورجان الأولى.

وتغـير النظريـــة الثانيـــة مـــن وضـــعية *AND* الأساســـية إلى وضـــعية *OR* كمـــا هـــو موضـــح في شكل(4- 7) حيث تكافئ البوابة *NAND* في الطرف الأيسر البوابة *OR* بمدخلين معكوسين في الطرف الأيمن (تقوم الدائرة الصغيرة في الدخل مقام بوابة العاكس)، ويمكن أيضاً إثبات هذه النظرية عن طريق جدول الحقيقة المبين في الجدول (4- 5). ويطلق أيضاً على البوابة التي على اليسار اسم بوابة *OR* السالبة *(negative OR)*.



الشكل(4- 7) التغير من وضعية AND إلى وضعية OR.

المدخلات		الخرج	
A	B	$\overline{A \bullet B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

الجدول(4- 5) إثبات نظرية ديمورجان الثانية.

نظريات ديمورجان يمكن تطبيقها أيضاً على التعبيرات البولينية والتي لها أكثر من متغيرين. والأمثلة الآتية توضح كيفية تطبيق نظريات ديمورجان على ثلاثة متغيرات وأربعة متغيرات.

مثال (4- 3): طبق نظريات ديمورجان على التعبير البوليني التالي:

$$Y=\overline{(A+\overline{B}+\overline{C})\bullet(\overline{A}+B+\overline{C})}$$

الحل:

$$Y=\overline{(A+\overline{B}+\overline{C})\bullet(\overline{A}+B+\overline{C})}$$
$$=(\overline{A+\overline{B}+\overline{C}})+(\overline{\overline{A}+B+\overline{C}})$$
$$=\overline{A}\,\overline{\overline{B}}\,\overline{\overline{C}}+\overline{\overline{A}}\,\overline{B}\,\overline{\overline{C}}=\overline{A}\,B\,C+A\,\overline{B}\,C$$

□

مثال (4- 4): طبق نظريات ديمورجان على التعبير البوليني التالي:

$$Y=\overline{(\overline{A}+B)+CD}$$

الحل:

$$
\begin{aligned}
Y &= \overline{(\overline{A}+B)+CD} \\
&= \overline{(\overline{A}+B)} \bullet \overline{(CD)} \\
&= \overline{\overline{A}}\ \overline{B}\ (\overline{C}+\overline{D}) \\
&= A\overline{B}(\overline{C}+\overline{D})
\end{aligned}
$$

مثال (4- 5): طبق نظريات ديمورجان على التعبير البوليني التالي:

$$Y = \overline{(\overline{A}+\overline{B}C)+B\overline{(A+\overline{C})}}$$

الحل:

$$
\begin{aligned}
Y &= \overline{(\overline{A}+\overline{B}C)+B\overline{(A+\overline{C})}} \\
&= \overline{(\overline{A}+\overline{B}C)} \bullet \left(\overline{B\overline{(A+\overline{C})}}\right) \\
&= A(\overline{\overline{B}C}) \bullet \left(\overline{B}+\overline{\overline{(A+\overline{C})}}\right) \\
&= A(B+\overline{C})(\overline{B}+A+\overline{C})
\end{aligned}
$$

4- 7 تبسيط التعبيرات البولينية باستخدام قواعد الجبر البوليني

Simplification of Boolean Expressions Using Boolean algebra Rules

تستخدم قواعد الجبر البوليني والتي سبق شرحها لتبسيط الدوال المنطقية (التعبيرات البولينية) وذلك لتمثيلها بأقل عدد من البوابات المنطقية، وكذلك بأقل عدد من المدخلات، ولذلك فإنه عند تمثيل هذه الدوال المنطقية عملياً، يجب أولاً أن نضعها في أبسط صورة ممكنة لاقتصاديات التصميم، والمثال التالي يوضح كيفية إجراء عملية التبسيط.

مثال (4- 6): باستخدام قواعد الجبر البوليني بسط الدالة المنطقية الآتية:

$$Y = AB + A(A+C) + B(A+C)$$

الحل: الخطوة الأولى في عملية التبسيط هي فك الأقواس الموجودة بالدالة فنحصل على:

$$Y = AB + AA + AC + AB + BC$$

نعوض عن قيمة الحد AA بالمتغير A (راجع القاعدة رقم 7 من قواعد الجبر البوليني) فتصبح الدالة:

$$Y = AB + A + AC + AB + BC$$

وبتطبيق القاعدة رقم 5 حيث $A + A = A$، فإن $AB + AB = AB$، وتصبح الدالة:

$$Y = AB + A + AC + BC$$

وبأخذ المتغير A عاملاً مشتركاً بين الحد الأول والثاني والثالث فنحصل على:

$$Y = A(B + 1 + C) + BC$$

وبتطبيق القاعدة رقم 2 حيث $A + 1 = 1$، نجد أن:

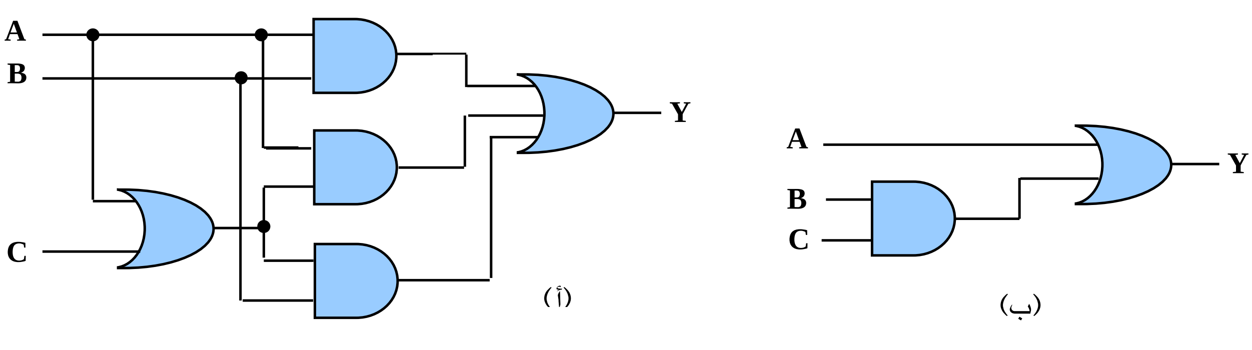
$$Y = A\ (1) + BC$$

وأخيرا بتطبيق القاعدة رقم 4 حيث $A(1) = A$، نحصل على:

$$Y = A + BC$$

عند هذه المرحلة فإن التعبير البوليني قد تم وضعه في أبسط صورة ممكنة. يجب أن نلاحظ هنا أنه عند اكتساب الخبرة في تطبيق قواعد الجبر البوليني فليس من الضروري تبسيط الدالة على شكل خطوات، ولكننا نبين هنا فقط كيفية الوصول إلى الصورة النهائية للدالة المبسطة وما هي القواعد التي تم استخدامها.

شكل (4- 8) يوضح كيف أمكن تمثيل الدالة بعد تبسيطها بأقل عدد ممكن من البوابات حيث أمكن تمثيلها باستخدام بوابتين فقط (الشكل(ب))، بينما احتاج تمثيل الدالة الأصلية قبل التبسيط إلى خمس بوابات (الشكل(أ)).



الشكل(4- 8) تمثيل الدالة المنطقية لمثال(4- 6) قبل وبعد تبسيطها.

ومن المهم التحقق من أن هاتين الدائرتين متكافئتان، بمعنى أنه لأي تشكيلة من المدخلات A, B, C، نحصل على نفس الخرج من الدائرتين.

مثال (4- 7): ضع التعبير البوليني الآتي في أبسط صورة ثم ارسم الدائرة المنطقية للتعبير قبل وبعد التبسيط.

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$$

الحل: بأخذ الحدين الأول والثاني مع بعضهما، وكذلك الحدين الثالث والرابع، نحصل على:

$$Y = (\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C) + (\overline{A}BC + ABC)$$
$$= \overline{A}\,\overline{B}(\overline{C} + C) + BC(\overline{A} + A)$$

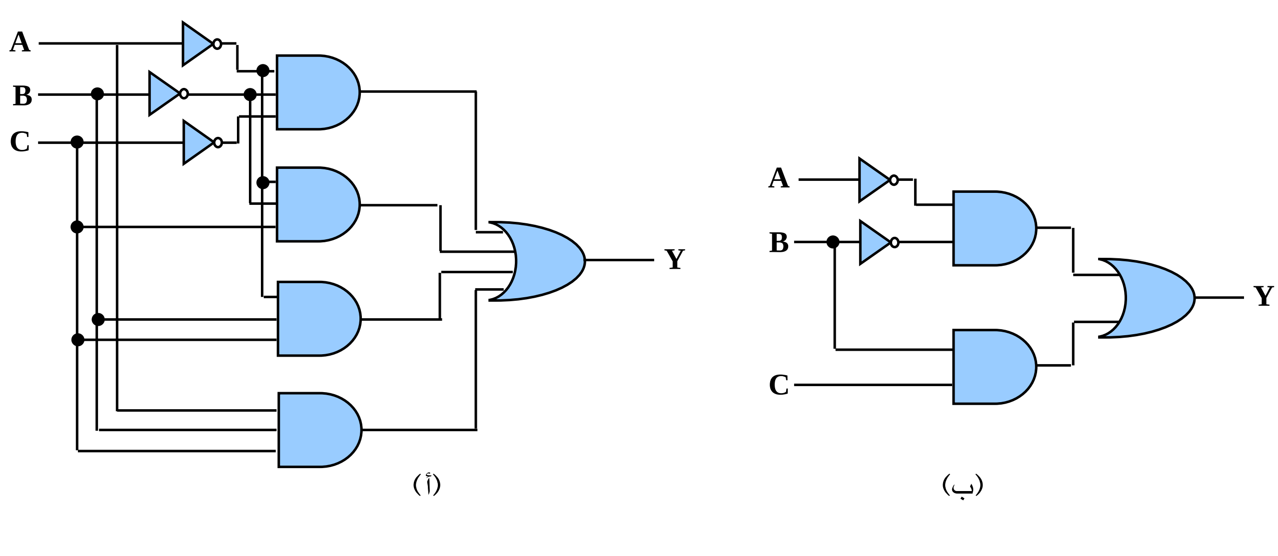
وبتطبيق القاعدة رقم 6 نحصل على:

$$Y = \overline{A}\,\overline{B} \bullet 1 + BC \bullet 1$$

ثم بتطبيق القاعدة رقم 4 نحصل على الصورة النهائية للتعبير البوليني وهي:

$$Y = \overline{A}\,\overline{B} + B\,C$$

شكل (4- 8) يوضح تمثيل التعبير البوليني بالبوابات قبل وبعد عملية التبسيط.



الشكل(4- 8) تمثيل الدالة المنطقية لمثال (4- 7) قبل وبعد تبسيطها.

4- 8 الأشكال القياسية للتعبيرات البولينية *Standard Forms of Boolean Expressions*

جميع التعبيرات البولينية، بصرف النظر عن شكلها، يمكن تحويلها إلى شكلين قياسيين، الشكل الأول يسمى بمجموع الحدود المضروبة (***S**um-**O**f-**P**roducts*) ويكتب اختصاراً (*SOP*)، ويسمى الشكل الثاني بمضروب الحدود المجموعة (***P**roduct-**O**f-**S**ums*) ويكتب اختصاراً (*POS*). الأشكال القياسية تجعل عمليات التقييم والتبسيط والتمثيل للتعبيرات البولينية أكثر سهولة.

4- 8- 1 الشكل (SOP) *The Sum-of-Products (SOP) form*

في البداية يجب أن نعرف ما المقصود بالحد المضروب (*product term*). الحد المضروب يتكون من مجموعة من المتغيرات مضروبة في بعضها البعض مثل AB, $A\overline{B}$, $A\overline{B}C\overline{D}$ وهكذا. عند جمع حد أو أكثر من الحدود المضروبة جمعاً منطقياً نحصل على ما يسمى بمجموع الحدود المضروبة (*Sum-of-Products*) مثل:

$$\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C} + A\ \overline{B}\ C + \overline{A}\ B\ \overline{C}$$

ويطلق على شكل مجموع الحدود المضروبة السابق اسم الشكل القياسي وذلك لإحتواء كل حد من الحدود المضروبة على نفس عدد المتغيرات، وسوف يكون التعامل في هذه الوحدة مع الأشكال القياسية للتعبيرات البولينية فقط. والحد المضروب يمثل خرج بوابة *AND*، وبالتالي له قيمة واحدة فقط عند (1) وعدة قيم عند (0) (ارجع إلى جدول الحقيقة للبوابة *AND*).

4- 8- 2 الشكل (POS) *The Product-of-Sums (POS) form*

في البداية كما في الفقرة السابقة، يجب أن نعرف ما هو المقصود بالحد المجموع (*sum term*). الحد المجموع يتكون من حاصل جمع مجموعة من المتغيرات مثل $A + \overline{B} + C$,

$A+\overline{B}$.وهكذا. عند ضرب حد أو أكثر من الحدود المجموعة ضرباً منطقياً نحصل على ما يسمى بمضروب الحدود المجموعة (*Product-of-Sums*) مثل:

$$(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})(A+B+C)$$

ويطلق على شكل مضروب الحدود المجموعة السابق اسم الشكل القياسي وذلك لاحتواء كل حد من الحدود المجموعة على نفس عدد المتغيرات، وسوف يكون التعامل في هذه الوحدة كما ذكرنا سابقاً مع الأشكال القياسية للتعبيرات البولينية فقط. والحد المجموع يمثل خرج بوابة OR، وبالتالي له قيمة واحدة فقط عند (0) وعدة قيم عند (1) (ارجع إلى جدول الحقيقة للبوابة OR).

4- 9 التحويل من الشكل القياسي (SOP) إلى الشكل القياسي (POS)

Converting Standard (SOP) to Standard (POS)

يجب معرفة أن القيم الثنائية (*binary values*) للحدود المضروبة في أي تعبير قياسي على شكل (SOP) لا تظهر في التعبير المكافئ القياسي على شكل (POS). وأيضاً، القيم الثنائية غير الممثلة في التعبير القياسي (SOP) تظهر في التعبير المكافئ القياسي على شكل (POS). وبناءً على ذلك، للتحويل من الشكل القياسي (SOP) إلى الشكل القياسي (POS)، نتبع الخطوات التالية:

<u>الخطوة الأولى</u>: نحدد قيمة كل حد مضروب في التعبير القياسي (SOP)، أي نحدد الأعداد الثنائية التي تمثل الحدود المضروبة.

<u>الخطوة الثانية</u>: نحدد جميع الأعداد الثنائية غير الموجودة في الخطوة الأولى.

<u>الخطوة الثالثة</u>: نكتب الحد المجموع المكافئ لكل عدد ثنائي من الخطوة الثانية ثم نكتب هذه الحدود على شكل التعبير (POS).

باستخدام خطوات مشابهه لنفس الخطوات السابقة، يمكننا التحويل من الشكل القياسي (POS) إلى الشكل القياسي (SOP).

مثال (4- 8): حول التعبير (SOP) القياسي التالي إلى التعبير (POS) القياسي.

$$Y=\overline{A}\,\overline{B}\,C+\overline{A}\,B\,C+A\,B\,\overline{C}+A\,B\,C$$

الحل: نحدد أولاً القيمة الثنائية لكل الحدود المضروبة مع ملاحظة وضع المتغير غير المعكوس بالقيمة الثنائية (1)، ووضع المتغير المعكوس بالقيمة الثنائية (0)،وبالتالي نحصل على:

$$Y=001+011+100+110+111$$

نلاحظ وجود ثلاث متغيرات في التعبير السابق، وبالتالي يكون لدينا ثمانٍ من التشكيلات الثنائية (2^3). التعبير على شكل (SOP) يحتوي على خمسة من هذه التشكيلات، وعلى ذلك فان التعبير على شكل (POS) يجب أن يحتوي على التشكيلات الثلاثة الأخرى وهى 000,010,101، ويكتب التعبير كالتالي:

$$Y = (A+B+C)(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

نلاحظ أننا وضعنا المتغير غير المعكوس بالقيمة الثنائية (0)، ووضعنا المتغير المعكوس بالقيمة الثنائية (1).

مثال (4- 9): حول التعبير (SOP) القياسي التالي إلى التعبير (POS) القياسي.

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + A\,\overline{B}\,C + A\,B\,\overline{C}$$

الحل: القيمة الثنائية للحدود المضروبة هى:

$$Y = 000 + 001 + 101 + 110$$

وعليه فان القيمة الثنائية للحدود المجموعة تكون كالتالي:

010, 011, 100, 111

ويكتب التعبير البوليني (POS) القياسي على الشكل:

$$Y = (A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

4- 10 **التحويل من الشكل القياسي** (POS) **إلى الشكل القياسي** (SOP)

Converting Standard (POS) to Standard (SOP)

كما ذكرنا في الجزء السابق ، وباستخدام خطوات مشابهه لنفس الخطوات السابقة، يمكننا التحويل من الشكل القياسي (POS) إلى الشكل القياسي (SOP). والأمثلة التالية توضح كيفية إجراء عملية التحويل.

مثال (4- 10): حول التعبير (POS) القياسي التالي إلى التعبير (SOP) القياسي.

$$Y = (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

الحل: نحدد أولاً القيمة الثنائية لكل الحدود المجموعة مع ملاحظة وضع المتغير غير المعكوس بالقيمة الثنائية (0)، ووضع المتغير المعكوس بالقيمة الثنائية (1)، وبالتالي نحصل على:

$$Y = (000)(001)(011)(101)(110)$$

نلاحظ أن التعبير (POS) يحتوي على خمسة تشكيلات من الثمانية، وبالتالي فان التعبير (SOP) يجب أن يحتوي على التشكيلات الثلاثة الأخرى وهى 010, 100, 111، ويكتب التعبير كالتالي:

$$Y = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC$$

مثال (4- 11): حول التعبير (POS) القياسي التالي إلى التعبير (SOP) القياسي.

$$Y = (A + \overline{B} + C)(A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

الحل: القيمة الثنائية للحدود المجموعةهى:

$$Y = (010)(011)(101)(111)$$

وعليه فان القيمة الثنائية للحدود المضروبة تكون كالتالي:

$$Y = 000,\ 001,\ 100,\ 110$$

ويكتب التعبير البوليني (SOP) القياسي على الشكل:

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C}$$

4- 11 تحويل التعبيرات (SOP) القياسية إلى جدول الحقيقة

Converting Standard (SOP) Expressions to Truth Table Format

لعمل جدول الحقيقة لأي تعبير بوليني على شكل (SOP) القياسي، نرسم الجدول أولاً ثم نكتب فيه عدد التشكيلات المختلفة طبقاً لعدد المتغيرات الموجودة بالتعبير البوليني. كمثال، لعدد ثلاث متغيرات فإن جدول الحقيقة يجب أن يحتوي على ثماني تشكيلات ($2^3 = 8$)، ولعدد أربعة متغيرات فإن جدول الحقيقة يجب أن يحتوي على ستة عشر من التشكيلات ($2^4 = 16$). في النهاية نضع (1) في عمود الخرج (Y) أمام القيمة الثنائية لكل حد مضروب في التعبير البوليني، ونضع (0) أمام القيم الثنائية المتبقية. والأمثلة التالية توضح ما سبق شرحه.

مثال (4- 12): استنتج جدول الحقيقة للتعبير القياسي (SOP) التالي :

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC$$

الحل: يحتوي التعبير البوليني على ثلاث متغيرات، وبالتالي يوجد ثماني تشكيلات ممكنة كما هو موضح في الأعمدة الثلاثة على اليسار بجدول الحقيقة(4- 6). القيم الثنائية لكل حد من الحدود المضروبة بالتعبير السابق هي:

$$\overline{A}\,\overline{B}C \Rightarrow 001 \quad A\overline{B}\,\overline{C} \Rightarrow 100 \quad ABC \Rightarrow 111$$

لكل قيمة من هذه القيم الثنائية، نضع (1) في عمود الخرج (Y) كما هو موضح في الجدول، ولكل القيم الثنائية المتبقية نضع (0) في عمود الخرج.

المدخلات			الخرج
A	**B**	**C**	**Y**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

الجدول(4- 6) جدول الحقيقة لمثال(4- 12).

مثال (4- 13): استنتج جدول الحقيقة للتعبير القياسي (SOP) التالي :

$$Y = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

الحل: القيم الثنائية لكل حد من الحدود المضروبة بالتعبير السابق هي:

$$\overline{A}B\overline{C} \Rightarrow 010 \quad \overline{A}BC \Rightarrow 011 \quad A\overline{B}C \Rightarrow 101 \quad AB\overline{C} \Rightarrow 110$$

لكل قيمة من هذه القيم الثنائية، نضع (1) في عمود الخرج (Y) كما هو موضح في جدول الحقيقة(4- 7)، ولكل القيم الثنائية المتبقية نضع (0) في عمود الخرج.

المدخلات			الخرج
A	*B*	*C*	*Y*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

الجدول(4- 7) جدول الحقيقة لمثال(4- 13).

4- 12 تحويل التعبيرات (POS) القياسية إلى جدول الحقيقة

Converting Standard (POS) Expressions to Truth Table Format

كما ذكرنا سابقاً، وباتباع نفس الخطوات، لعمل جدول الحقيقة للتعبير البوليني على شكل (POS) القياسي، نرسم الجدول أولاً ثم نكتب فيه عدد التشكيلات المختلفة طبقاً لعدد المتغيرات الموجودة بالتعبير البوليني.

مثال (4- 14): استنتج جدول الحقيقة للتعبير القياسي (POS) التالي:

$$Y = (A+B+C)(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)$$

الحل: يحتوي التعبير البوليني السابق على ثلاث متغيرات، وبالتالي يوجد ثماني تشكيلات ممكنة كما هو موضح في الأعمدة الثلاثة على اليسار بجدول الحقيقة(4- 8). القيم الثنائية لكل حد من الحدود المجموعة بالتعبير (POS) السابق هى:

$$A+B+C \Rightarrow 000 \qquad A+\overline{B}+C \Rightarrow 010 \qquad \overline{A}+B+C \Rightarrow 100$$

لكل قيمة من هذه القيم الثنائية، نضع (0) في عمود الخرج (Y) كما هو موضح في الجدول، ولكل القيم الثنائية المتبقية نضع (1) في عمود الخرج.

المدخلات			الخرج
A	***B***	***C***	***Y***
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

الجدول(4- 8) جدول الحقيقة لمثال(4- 14).

مثال (4- 15): استنتج جدول الحقيقة للتعبير القياسي (POS) التالي :

$$Y = (A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

الحل: القيم الثنائية لكل حد من الحدود المضروبة في التعبير السابق هى:

$$A + B + \overline{C} \Rightarrow 001, \quad A + \overline{B} + \overline{C} \Rightarrow 011,$$
$$\overline{A} + \overline{B} + C \Rightarrow 110, \quad \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} \Rightarrow 111$$

لكل قيمة من هذه القيم الثنائية، نضع (0) في عمود الخرج (Y) كما هو موضح في جدول الحقيقة(4- 9)، ولكل القيم الثنائية المتبقية نضع (1) في عمود الخرج.

المدخلات			الخرج
A	***B***	***C***	***Y***
0	0	0	0
0	0	1	1

0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

الجدول(4- 9) جدول الحقيقة لمثال(4- 15).

4- 13 استنتاج التعبيرات القياسية من جدول الحقيقة

Determining Standard Expressions from a Truth Table

لاستنتاج التعبير القياسي (SOP) الممثل بجدول الحقيقة، حدد القيم الثنائية للدخل لكل خرج يساوي (1). حول كل قيمة ثنائية إلى الحد المضروب المقابل لها، وذلك باستبدال كل (1) بالمتغير المقابل له، وكل (0) بعكس المتغير المقابل له. كمثال، القيمة الثنائية 0101 يمكن تحويلها إلى حد مضروب كما يلي:

$$0101 \Rightarrow \overline{A}B\overline{C}D$$

لاستنتاج التعبير القياسي (POS) الممثل بجدول الحقيقة، حدد القيم الثنائية للدخل لكل خرج يساوي (0). حول كل قيمة ثنائية إلى الحد المجموع المقابل لها، وذلك باستبدال كل (0) بالمتغير المقابل له، وكل (1) بعكس المتغير المقابل له. كمثال، القيمة الثنائية 1010 يمكن تحويلها إلى حد مجموع كما يلي:

$$1010 \Rightarrow \overline{A} + B + \overline{C} + D$$

مثال (4- 16): من جدول الحقيقة(4- 10)، استنتج التعبير القياسي (SOP)، (POS):

المدخلات			الخرج
A	**B**	**C**	**Y**
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1

1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

الجدول(4- 10) جدول الحقيقة لمثال(4- 16).

الحل: هناك أربعة 1's في عمود الخرج والقيم الثنائية المقابلة لها هى: 011, 100, 110, and 111. هذه القيم الثنائية يمكن تحويلها إلى حدود مضروبة كما يلي:

$$011 \Rightarrow \overline{A}BC \text{ و } 100 \Rightarrow A\overline{B}\,\overline{C} \text{ و } 110 \Rightarrow AB\overline{C} \text{ و } 111 \Rightarrow ABC$$

وبالتالي يكون التعبير القياسي بشكل (SOP) للخرج (Y) هو:

$$Y = \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

وللتعبير (POS)، الخرج يساوي (0) عند القيم الثنائية 000,001,010, and 101. هذه القيم الثنائية يمكن تحويلها إلى حدود مجموعة كما يلي:

$$\begin{aligned} &000 \Rightarrow A+B+C, \quad 001 \Rightarrow A+B+\overline{C}, \\ &010 \Rightarrow A+\overline{B}+C, \quad 101 \Rightarrow \overline{A}+B+\overline{C} \end{aligned}$$

وبالتالي يكون التعبير القياسي بشكل (POS) للخرج (Y) هو:

$$Y = (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

4- 14 الخواص العامة لبوابات *NAND, NOR*

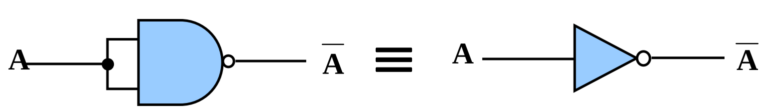
The Universal Property of NAND and NOR Gates

استعرضنا في بداية هذه الوحدة كيفية تمثيل الدوائر المنطقية باستخدام بوابات *AND*، وبوابات *OR*، والعواكس. وهنا سوف نناقش استخدام بوابات *NAND* وبوابات *NOR* كبوابات عامة (*Universal gates*) لتمثيل أي تعبير بوليني. ومعنى كلمة بوابة عامة يعني أنه يمكن استخدامها كعاكس، وتركيبة من بوابات *NAND* يمكننا استخدامها في تمثيل بوابة *AND*، وكذلك *NOR*.

وبالمثل فمعنى كلمة بوابة *NOR* عامة تعني أنه يمكن استخدامها كعاكس وتركيبة من بوابات *NOR* يمكننا استخدامها في تمثيل بوابة *OR, AND* وكذلك *NAND*.

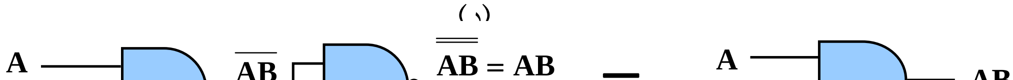
4- 14- 1 البوابة ***NAND*** كعنصر منطقي عام *NAND gate as a Universal Logic Element*

البوابة *NAND* هي بوابة عامة لأنه يمكن استخدامها في تنفيذ عملية العاكس، وعملية *AND*، وعملية *OR*، وكذلك عملية *NOR*. والعاكس يمكن بناؤه من البوابة *NAND* عن طريق توصيل جميع المدخلات في مدخل واحد كما هو موضح في الشكل(4- 17 (أ)) وذلك لبوابة *NAND* ذات مدخلين. ويمكن توليد عملية *AND* باستخدام بوابات *NAND* فقط كما هو موضح في شكل(4- 17(ب)). والبوابة *OR* يمكن بناؤها باستخدام بوابات *NAND* كما في شكل(4- 17(جـ)). وأخيراً البوابة *NOR* يمكن بناوها كما هو موضح في شكل(4- 17(د)).



(أ)

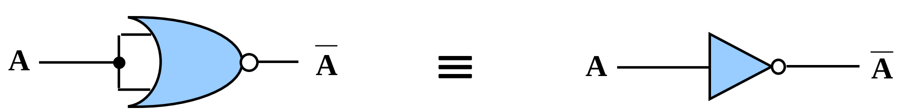
(١)



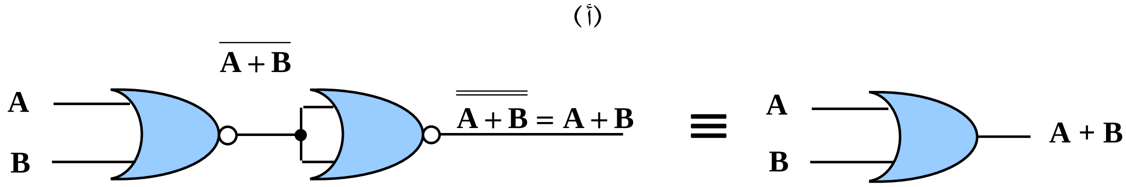
الشكل(4- 17) التطبيق العام لبوابات $NAND$.

4- 14- 2 البوابة **NOR** كعنصر منطقي عام *NOR gate as a Universal Logic Element*

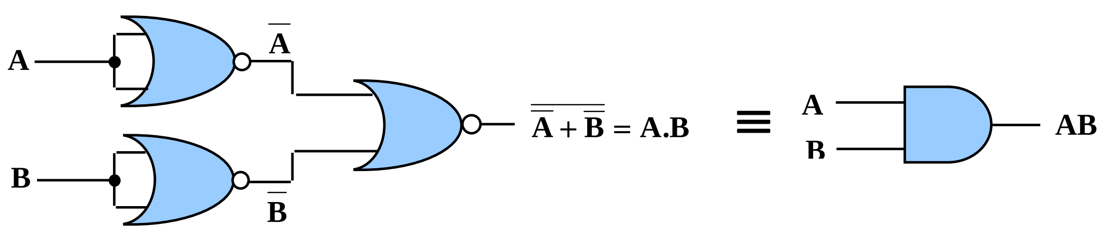
مثل بوابة *NAND*، فإن البوابة *NOR* يمكن استخدامها لبناء بوابات عاكس، *OR, AND*، وكذلك بوابة *NAND*. شكل(4- 18) يوضح كيفية توصيل البوابة *NOR* لتقوم بعمل بوابة *NOT* وبوابة *OR* وكذلك بوابة *NAND*.



(أ)



(ب)



(جـ)

الشكل(4- 18) التطبيق العام لبوابات *NOR*.

4- 15 تصميم الدوائر المنطقية التوافقية باستخدام بوابات *NAND* , *NOR*

Design of Combinational Logic Circuits using NAND and NOR gates

سوف نستعرض هنا كيفية استخدام بوابات *NAND*، وبوابات *NOR* وذلك لتمثيل الدوال المنطقية مع الأخذ بعين الاعتبار أن البوابة *NAND* تكافئ البوابة *OR* السالبة (*Negative - OR*) ، والبوابة *NOR* تكافئ البوابة *AND* السالبة (*Negative-AND*). كما سوف نري أنه باستخدام بوابتي *OR*، *AND* السالبتين أنه بالإمكان قراءة المخطط المنطقي (*Logic diagram*) للدائرة.

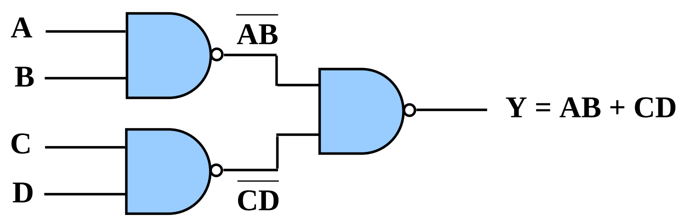
4- 15- 1 التصميم باستخدام بوابة *NAND*   *NAND Logic*

كما تعلمنا سابقاً، أن بوابة *NAND* تؤدي دالة *NAND* أو دالة *OR* السالبة، لأنه باستخدام نظرية ديمورجان الثانية:

$$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$$

NAND — Negative-OR

فلنأخذ على سبيل المثال الدائرة المنطقية الموضحة في شكل(4- 19).



الشكل (4- 19) الدائرة المنطقية ممثلة باستخدام بوابات $NAND$ فقط.

التعبير البوليني للخرج (Y) لهذه الدائرة يمكن استنتاجه كما في الخطوات الآتية:

$$Y = \overline{(\overline{AB})(\overline{CD})}$$

وبتطبيق نظرية ديمورجان الثانية نحصل على:

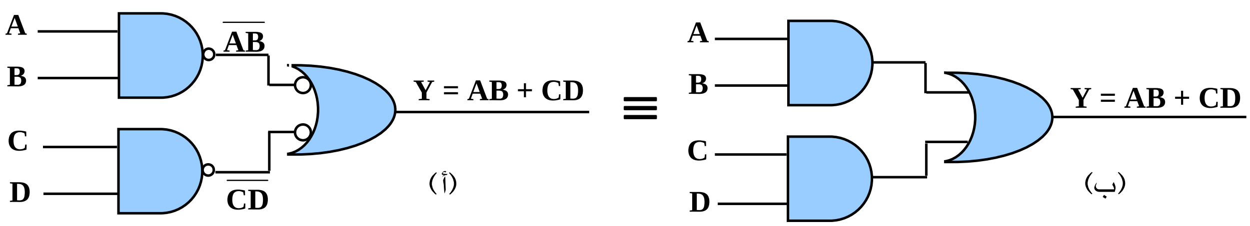
$$Y = \overline{\overline{AB}} + \overline{\overline{CD}}$$

وبحذف الإشارات الفوقية $(bars)$ نحصل على ما يلي:

$$Y = AB + CD$$

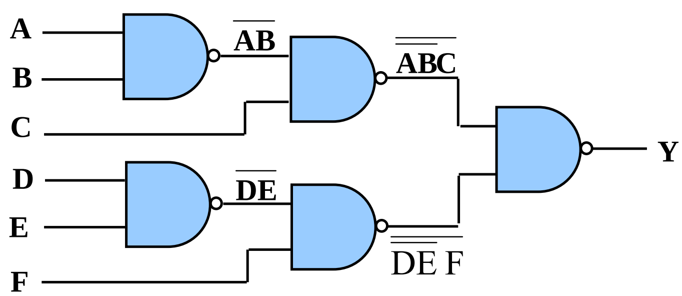
نلاحظ أنه في آخر خطوة تم الحصول على الخرج (Y)، $AB+CD$ ، على شكل بوابتي AND وبوابة OR. هذا الشكل للتعبير البوليني للخرج (Y) يبين لنا أن البوابتين $NAND$ على اليسار في شكل(4- 19) يقومان بعمل بوابتي AND وأن بوابة $NAND$ الثالثة تقوم بعمل بوابة OR. ويمكن تمثيل نفس التعبير البوليني للخرج (Y) كما في الشكل(4- 20(أ)) حيث تم استبدال البوابة $NAND$ على اليمين ببوابة OR السالبة. وحيث إن توصيل عاكسين على التوالي يلغي بعضهما بعضاً فإننا بذلك نحصل على الشكل(4- 20(ب))، وبالتالي فإن الدائرة في شكل(4- 19) تكافئ الدائرة في شكل(4- 20(ب))، ويقال ان:

$(AND\text{-}AND\text{-}OR)$ تكافئ $(NAND\text{-}NAND\text{-}NAND)$



الشكل(4-20) إثبات أن *AND-AND-OR* تكافئ الدائرة في شكل(4-19).

شكل(4- 21) يوضح الدائرة المنطقية ممثلة عن طريق بوابات *NAND* والمطلوب إعادة هذا المخطط المنطقي باستخدام بوابات *OR*- السالبة.

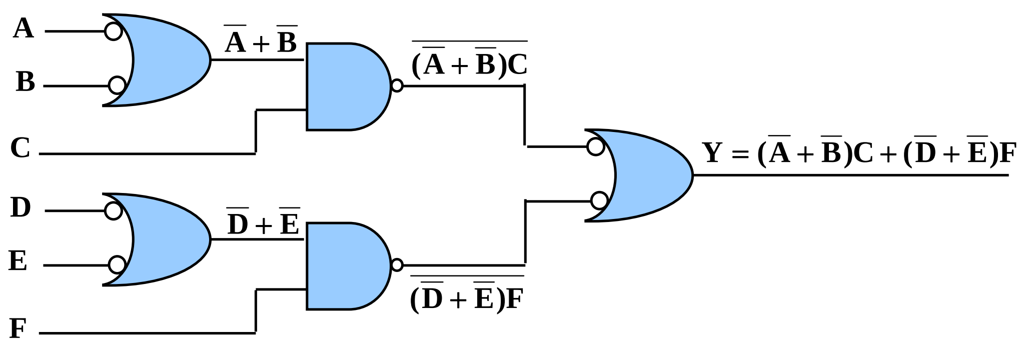


الشكل(4- 21) الدائرة المنطقية المطلوب تمثيلها باستخدام بوابات *OR*-

نحصل أولاً على معادلة الخرج (Y) للدائرة في شكل(4- 21):

$$Y=\overline{\overline{[(\overline{AB})C]}\bullet\overline{[(\overline{DE})F]}}$$
$$=\overline{\overline{[(\overline{A}+\overline{B})C]}\bullet\overline{[(\overline{D}+\overline{E})F]}}$$
$$=\overline{\overline{(\overline{A}+\overline{B})C}}+\overline{\overline{(\overline{D}+\overline{E})F}}$$
$$\therefore Y=(\overline{A}+\overline{B})C+(\overline{D}+\overline{E})F$$

وباستخدام بوابة OR -السالبة المكافئة لبوابة $NAND$ نحصل على الدائرة المكافئة كما في شكل(4- 22)، ويمكن كتابة معادلة الخرج (Y) مباشرة من خلال العمليات المنطقية لكل بوابة.



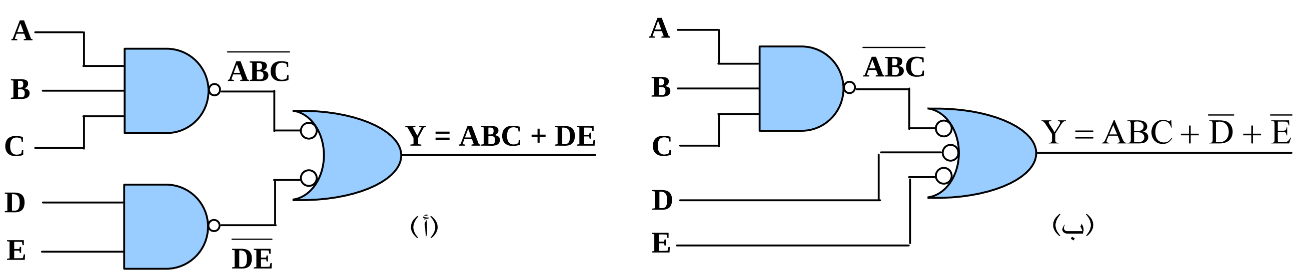
الشكل(4- 22) الدائرة المكافئة لشكل(4- 21) باستخدام بوابات OR-

مثال (4- 17): حقق كلا من التعبيرين المنطقيين الآتيين مستخدماً بوابات $NAND$ فقط:

$$(a)\ \ Y = ABC + DE$$

$$(b)\ \ Y = ABC + \overline{D} + \overline{E}$$

الحل: انظر إلى الشكل (4- 23).



الشكل(4- 23) الدائرتان المكافئتان للتعبيرين المنطقيين لمثال(4- 16).

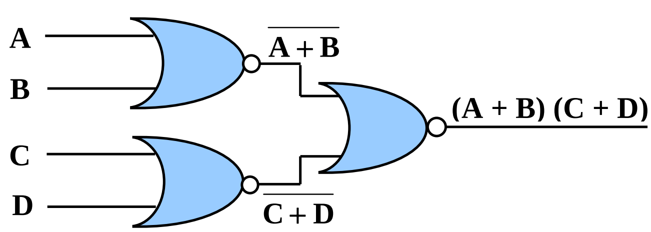
4- 15- 2 التصميم باستخدام بوابة *NOR* *NOR Logic*

كما ذكرنا سابقاً أن البوابة *NOR* تؤدي دالة *NOR* أو دالة *AND*- السالبة كما توضحه نظرية ديمورجان الثانية:

$$\overline{A+B}=\overline{A}\bullet\overline{B}$$

NOR Negative-AND

فلنأخذ كمثال الدائرة المنطقية الموضحة في شكل (4- 24).



الشكل (4- 24) الدائرة المنطقية ممثلة باستخدام بوابات *NOR*

ويمكن استنتاج التعبير البوليني لهذه الدائرة كما يلي:

$$Y=\overline{(\overline{A+B})+(\overline{C+D})}$$

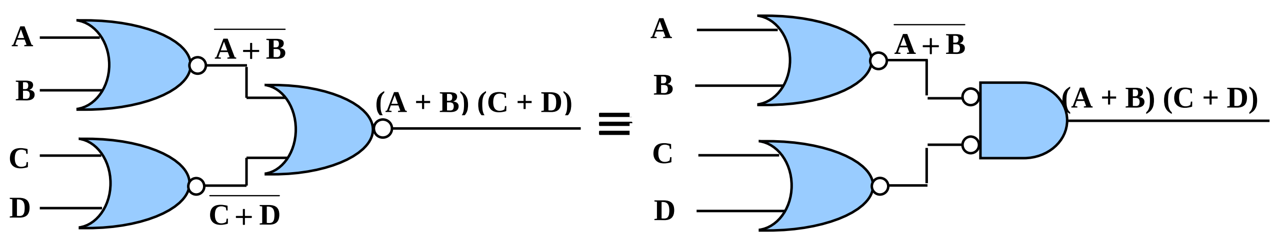
وبتطبيق نظرية ديمورجان الأولى نحصل على:

$$Y=\overline{\overline{(A+B)}}\bullet\overline{\overline{(C+D)}}$$

وبحذف الإشارات الفوقية نجد أن:

$$Y = (A+B)\bullet(C+D)$$

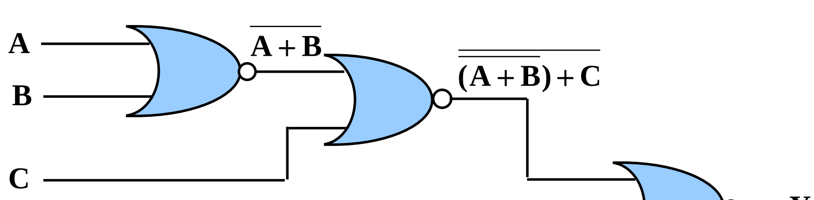
نلاحظ أن التعبير $(A + B)(C + D)$ يتكون من بوابتي OR وبوابة AND، وهذا يوضح أن البوابتين على اليسار تكافئان بوابتي OR والبوابة على اليمين تكافئ بوابة AND كما هو موضح في شكل(4- 25(أ)). وهذه الدائرة أعيد رسمها في الشكل(4- 25(ب)) باستخدام البوابة AND- السالبة.



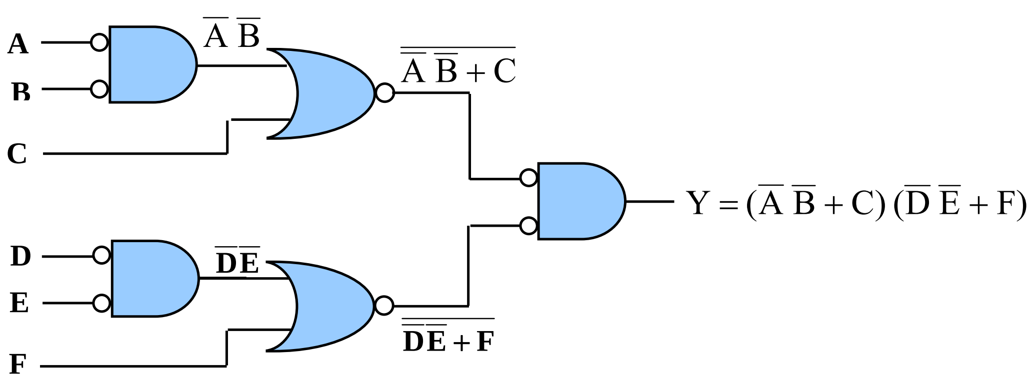
الشكل(4- 25) الدائرة المكافئة لشكل(4- 24) باستخدام بوابات AND- السالبة.

شكل (4- 26) يوضح الدائرة المنطقية ممثلة ببوابات NOR، والمطلوب إعادة تمثيل الدائرة باستخدام بوابة AND- السالبة. نحصل أولاً على الخرج (Y) للدائرة كما يلي:

$$\begin{aligned}
Y &= \overline{[\overline{(\overline{A+B})+C}]+[\overline{(\overline{D+E})+F}]} \\
&= \overline{[\overline{\bar{A}\bar{B}+C}]+[\overline{\bar{D}\bar{E}+F}]} \\
&= (\bar{A}\bar{B}+C)(\bar{D}\bar{E}+F)
\end{aligned}$$



وباستخدام بوابة AND- السالبة المكافئة لبوابة NOR نحصل على الدائرة في شكل (4- 27).

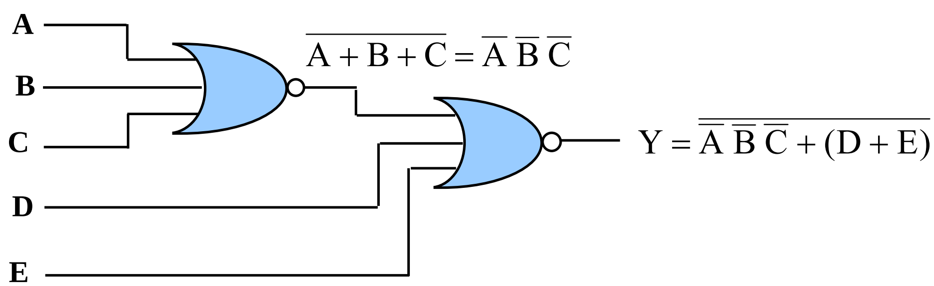


الشكل (4- 27) الدائرة المكافئة للدائرة في شكل (4- 26).

مثال (4- 18): حقق التعبير المنطقي التالي باستخدام بوابات NOR فقط:

$$Y=\overline{\overline{A}\;\overline{B}\;\overline{C}+(D+E)}$$

الحل: انظر إلى الشكل(4- 28).



الشكل (4- 28) الدائرة المنطقية ممثلة باستخدام بوابات *NOR* فقط.

4- 16 خريطة كارنوف *Karnaugh Map*

خريطة كارنوف أو خريطة -*K* هي طريقة مرئية لتبسيط التعبيرات الجبرية، وإذا ما استخدمت بطريقة جيدة فسوف تعطي لنا التعبير البوليني في أبسط صورة ممكنة. وكما رأينا في أول هذه الوحدة فإن استخدام قواعد الجبر البوليني لتبسيط أي تعبير جبري يعتمد إلى حد كبير على الإلمام بجميع قواعد الجبر البوليني وكذلك القابلية لتطبيقه، وعادة فإن المهارة غالباً تمثل عاملاً هاماً في التبسيط باستخدام قواعد الجبر المنطقي. من ناحية أخرى فإن خريطة كارنوف تقدم لنا طريقة سهلة للتبسيط.

وخريطة كارنوف تماثل جدول الحقيقة لأنها تعطي لنا كل القيم المحتملة للمدخلات ونتيجة الخرج لكل قيمة. وبدلاً من تنظيمها على شكل أعمدة وصفوف مثل جدول الحقيقة، فإن خريطة كارنوف عبارة عن مصفوفة (*array*) من الخلايا (*cells*) ، وتمثل كل خلية القيمة الثنائية لإحدى تشكيلات المدخلات. وترتب الخلايا بطريقة تجعل عملية التبسيط للتعبير المعطى وتجميع الخلايا في غاية السهولة.

خريطة كارنوف يمكن استخدامها مع تعبيرات بولينية لها متغيران أو ثلاثة أو أربعة، أو خمسة متغيرات، ولكننا سنكتفي هنا بالشرح حتى أربعة متغيرات فقط لتوضيح أساسيات التبسيط. ويلاحظ أنه عند ازدياد عدد المتغيرات عن خمسة فأكثر فإن استخدام خريطة كارنوف يزداد صعوبة لذا يتم اللجوء إلى استخدام طرق أخرى خارج نطاق الحقيبة مثل طريقة كواين ماكلوسكي (*Quine - McClusky*) حيث يمكن استخدامها لعدد كبير من المتغيرات ويمكن برمجة هذه الطريقة على الحاسب بشكل سهل. عدد الخلايا في خريطة كارنوف يساوي عدد التشكيلات المحتملة للمدخلات، ويماثل ذلك عدد الصفوف في جدول الحقيقة. ولعدد ثلاثة متغيرات يكون عدد الخلايا يساوي $8 = 2^3$ ولعدد أربعة متغيرات يكون عدد الخلايا يساوي $16 = 2^4$.

4- 16- 1 شكل خريطة كارنوف لاثنين وثلاثة وأربعة متغيرات

Karnaugh Map for Two, Three, and Four Variables

عرفنا سابقاً أن عدد الخلايا في خريطة كارنوف يعتمد على عدد المتغيرات (المدخلات). وكمثال في شكل(4- 29)، هناك متغيران فقط هما (A,B) والمتمم لهما $(\overline{A},\overline{B})$ وبناء على ذلك فإن خريطة كارنوف تحتوي (كما في جدول الحقيقة لمتغيرين) فقط على أربعة تشكيلات (00,01,10,11).

A	B	Y
0	0	$\overline{A}\,\overline{B}$
0	1	$\overline{A}\,B$
1	0	$A\,\overline{B}$
1	1	$A\,B$

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$
A	$A\overline{B}$	AB

الشكل(4- 29) إعادة ترتيب جدول الحقيقة في خريطة كارنوف.

وكل خلية في خريطة كارنوف ذات المتغيرين تمثل واحداً من التشكيلات الأربع للدخل. عملياً علامات الدخل (*Input Labels*) توضع خارج الخلايا كما هو موضح في شكل(4- 30) وتطبق على كل من الصف والعمود للخلايا. فمثلاً، الصف الذي أمامه المتغير $\overline{A}$ يطبق على الخلايا العليا، بينما الذي أمامه A يطبق على الخلايا السفلى. ونرى في أعلى الخريطة المتغير $\overline{B}$ يطبق على الخلايا التي على اليسار، بينما المتغير B يطبق الخلايا التي على اليمين. وكمثال، فإن الخلية العليا التي على اليمين تمثل تشكيلة الدخل $\overline{A}B$.

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$		
A		

الشكل(4- 30) خريطة كارنوف لمتغيرين ($2^2 = 4$ خلايا).

شكل(4- 31(أ))، (4- 31(ب)) يوضحان هيئة خريطة كارنوف لثلاثة متغيرات (ثماني خلايا)، وأربعة متغيرات (ستة عشر خلية).

	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\overline{B}$				
$\overline{A}B$				
AB				
$A\overline{B}$				

(ب)

	$\overline{B}\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
$\overline{A}$				
A				

(أ)

الشكل(4- 31) خريطة كارنوف لثلاثة وأربعة متغيرات.

4- 16- 2 تبسيط التعبيرات على شكل (*SOP*) *Karnaugh Map (SOP) Minimization*

والآن بعد معرفتنا لكيفية إنشاء خريطة كارنوف، فسوف نرى كيف يمكن أن تستخدم لتبسيط التعبيرات البولينية على شكل (*SOP*). وكمثال على ذلك، نفترض أننا نريد تصميم دائرة منطقية لها جدول الحقيقة الموضح في شكل(4- 32(أ)).

الخطوة الأولى هي الحصول على التعبير البوليني من خلال جدول الحقيقة، وذلك بكتابة التشكيلة التي أمامها (1) في الخرج وبعد ذلك نضع هذه التشكيلات على شكل التعبير البوليني (*SOP*) كما في شكل(4- 32(ب)).

الدائرة المنطقية المكافئة لهذا التعبير البوليني موضحة في شكل(4- 32(جـ)). الخطوة التالية هي تمثيل هذا التعبير البوليني على خريطة كارنوف لمتغيرين كما نرى في شكل (4- 32(د)).

عند تمثيل التعبير البوليني على خريطة كارنوف يجب أن نتذكر أن كل خلية تمثل تشكيلة من التشكيلات الأربع المحتملة للمدخلات في جدول الحقيقة. الخرج (1) في جدول الحقيقة يجب أن يظهر (1) في الخلية المكافئة له على خريطة كارنوف، والخرج (0) في جدول الحقيقة يجب أن يظهر(0) في الخلية المكافئة له على خريطة كارنوف. وبناء على ذلك فإن (1) سوف يظهر في الخلية السفلى على اليسار (يمثل $A\overline{B}$)، وفي الخلية السفلى على اليمين (يمثل AB) . والتشكيلات الأخرى للدخل ($\overline{A}B, \overline{A}\ \overline{B}$) وكلاهما يعطي (0) في الخرج، وبناءً عليه يجب وضع (0) في هاتين الخليتين العلويتين.

المدخلات		الخرج
A	***B***	***Y***
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

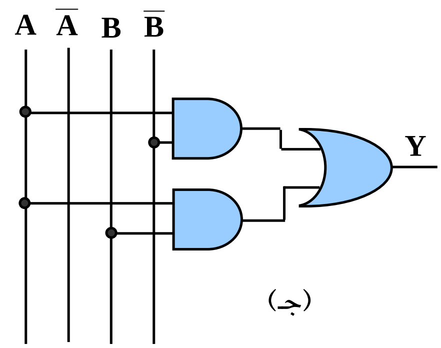
(أ)

$A\,\overline{B}$

$A\,B$

$$Y = A\,\overline{B} + A\,B$$

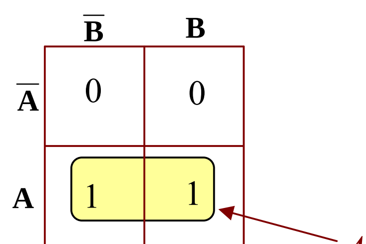
(ب)

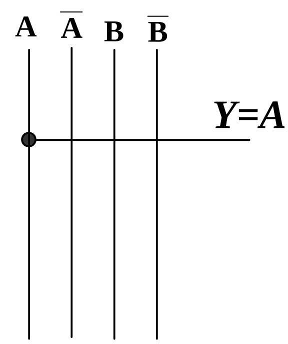


(جـ)

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	0	0
A	1	1

(د)





(و)

(هـ)

الشكل(4- 32) كيفية استخدام خريطة كارنوف في تبسيط التعبير المنطقي.

تبيسط المعادلات البولينية بصفة عامة يمكن الحصول عليه عن طريق تطبيق قاعدة المتممات (*Complements*)، والتي تقول أن $A+\overline{A}=1$. والآن وبعد تمثيل المعادلة البولينية على خريطة كارنوف كما في شكل(4- 32(د))، الخطوة التالية هي تجميع الحدود ثم نحدد العامل المشترك بينها.

فاذا نظرنا إلى خريطة كارنوف في شكل(4- 32(د)) فسوف نرى أن الخلايا المتجاورة (*adjacent cells*) تختلف في متغير واحد فقط. وهذا يعني أننا لو حركنا أياً منهما من مكانه إلى الخلية المجاورة له رأسياً أو أفقياً، فلن يحدث تغيير إلا في متغير واحد فقط. وبتجميع الخلايا المتجاورة المحتوية على (1) كما نرى من الشكل(4- 32(هـ)) فإنه يمكن تبسيط الخلايا باستخدام قاعدة المتممات وجعلها حداً واحداً. في هذا المثال الخلايا $AB, A\overline{B}$ تحتوي على B , $\overline{B}$ وبالتالي يتم حذف هذه المتممات، وتكون النتيجة، A كما يلي:

$$Y = A\overline{B} + AB \quad \text{(الأزواج المجمعة)}$$

$$Y = A(\overline{B}+B)$$
$$= A \bullet 1 = A$$

هذا التحليل يمكن استنتاجه بدراسة جدول الحقيقة للدائرة الموضحه في شكل(4- 32(أ)) والذي نرى فيه أن الخرج (Y) يتبع تماماً الدخل (A). وبناء على ذلك تكون الدائرة المكافئة كما هو موضح في شكل(4- 32(و)).

مثال (4- 19): صمم دائرة منطقية في أبسط صورة لجدول الحقيقة الموضح في شكل(4- 33(أ)) مبيناً كل خطوة في عملية التبسيط.

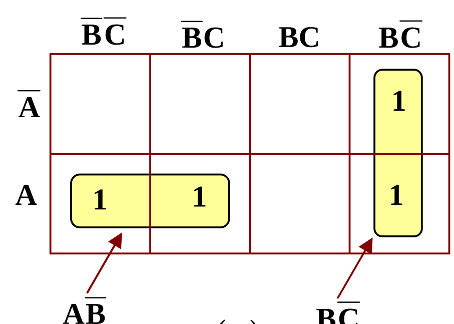
الحل: لدينا هنا ثلاثة متغيرات، والخطوة الأولى هي رسم خريطة كارنوف لثلاثة متغيرات، كما هو موضح في شكل(4- 33(ب)).

الخطوة الثانية أن ننظر إلى الخرج الذي يساوي (1) في جدول الحقيقة في شكل(4- 33(أ)) ثم نقوم بوضع هذه الآحاد في الخلايا المكافئة لها على خريطة كارنوف كما هو موضح في شكل(4- 33(ب)). وبعد وضع (0) في الخلايا الفارغة المتبقية، نجمع الآحاد في شكل أزواج كما في شكل(4- 33(ب)) ، ثم نحدد من خلال الصف والعمود المتغيرات المشتركة في هذه المجموعات (الأزواج) لنرى أي متغير سوف يتم حذفه تبعاً لقاعدة المتممات. في المجموعة التي على اليمين $A, \overline{A}$ يتم حذفها والنتيجة $\overline{B}C$ ، وفي المجموعة التي على اليسار يتم حذف $C, \overline{C}$ والنتيجة $A\overline{B}$.

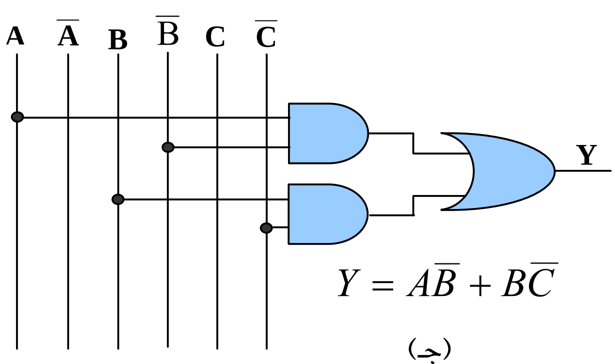
والحدود السابقة المبسطة سوف تشكل لنا المعادلة البولينية المكافئة بعد التبسيط والدائرة المنطقية، كما نرى في شكل(4- 33(جـ)). وفي هذا المثال نرى أن المعادلة الأصلية تتكون من أربعة حدود كل حد منها يمثل بوابة *AND* بثلاثة مداخل مجمعة على بوابة *OR* بأربعة مداخل أي أن عدد المداخل الكلية للبوابات يساوي 16 مدخلاً، وبعد التبسيط أصبحت الدائرة تتكون من حدين كل منهما ممثل ببوابة *AND* بمدخلين مجمعين على بوابة *OR* بمدخلين أيضاً، وبالتالي يصبح عدد المداخل الكلية للبوابات بعد التبسيط يساوي 6 مدخلات كما نرى في الشكل(4- 33(جـ)).

المدخلات			الخرج
A	*B*	*C*	*Y*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

(أ)



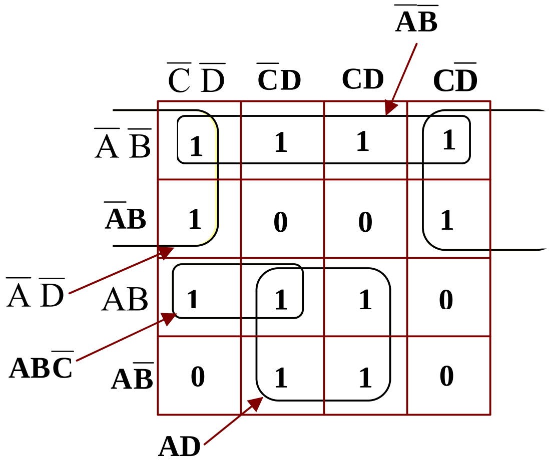
(ب)



(جـ)

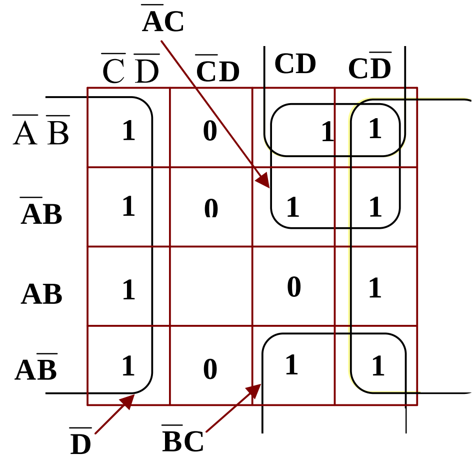
الشكل(4- 33) تصميم الدائرة المنطقية باستخدام خريطة كارنوف.

الآحاد (1's) في خريطة كارنوف يمكن أن تجمع كأزواج (مجموعات من اثنين) أو مجموعات من أربعة ، أو ثمانية، أو ستة عشر وهكذا لكل القوى 2. شكل(4- 34) يوضح بعض الأمثلة للتجميع، وكيف أن خريطة كارنوف تستخدم لتبسيط التعبيرات البولينية الكبيرة. لاحظ أن المجموعات الكبيرة أي التي تحتوي على عدد كبير من الآحاد (1's) تعطينا لنا حداً صغيراً وعليه تكون البوابات المستخدمة في التصميم لها مدخلات قليلة. ولهذا السبب يجب أن نبدأ بالبحث عن المجموعات التي تحتوي على أكبر عدد من الآحاد ، فإن لم نجد نبحث عن الأقل وهكذا (بمعنى أننا نبحث عن المجموعات التي تحتوي على ثماني آحاد ، فإن لم نجد نبحث عن المجموعات التي تحتوي على آربعة آحاد ، وأخيراً فإن لم نجد نبحث عن المجموعات التي تحتوي على زوج من الآحاد).



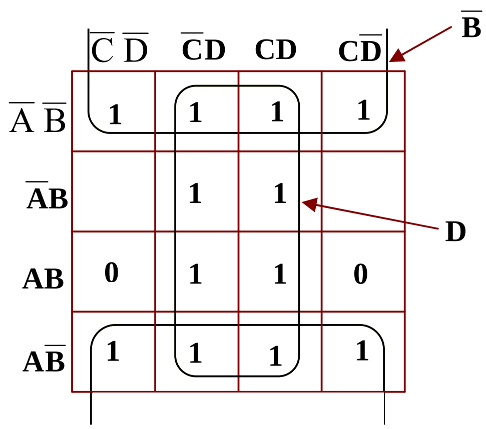
$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$$
$$+ \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}D$$
$$+ ABCD + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}CD \quad \text{(قبل التبسيط)}$$
$$Y = AB\overline{C} + AD + \overline{A}B\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B} \quad \text{(بعد التبسيط)}$$

(أ)



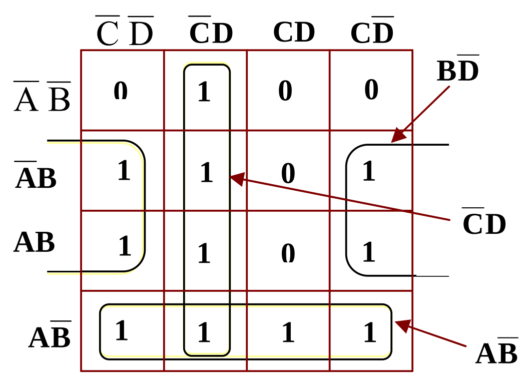
$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$$
$$+ \overline{A}BCD + \overline{A}BC\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} + ABC\overline{D}$$
$$+ A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D} \quad \text{(قبل التبسيط)}$$
$$Y = \overline{A}C + \overline{B}C + \overline{D} \quad \text{(بعد التبسيط)}$$

(ب)



$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$$
$$+ \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD + A\overline{B}CD + ABCD$$
$$+ A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + AB\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} \quad \text{(قبل التبسيط)}$$
$$Y = \overline{B} + D \quad \text{(بعد التبسيط)}$$

(حـ)



$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D}$$
$$+ AB\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}D + ABC\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$
$$+ A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D} \quad \text{(قبل التبسيط)}$$
$$Y = \overline{C}D + A\overline{B} + B\overline{D} \quad \text{(بعد التبسيط)}$$

(د)

الشكل(4- 34) أمثلة مختلفة عن التجميع في خرائط كارنوف.

مثال 4- 20: اكتب التعبير البوليني على الشكل القياسي (SOP) الذي يمثله جدول الحقيقة المبين في جدول (4- 11)، ثم قم بتبسيطه باستخدام خريطة كارنوف.

المدخلات				الخرج
A	***B***	***C***	***D***	***Y***
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

الجدول(4- 11) جدول الحقيقة المطلوب تبسيط التعبير البوليني له في مثال (4- 20).

الحل: الخطوة الأولى للحصول على التعبير البوليني هي كتابة الحدود التي تعطي الخرج (Y) في جدول الحقيقة والمساوية للقيمة (1)، وبتجميع هذه الحدود يمكننا استنتاج التعبير البوليني وهو كما يلي:

$$Y = \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD + A\overline{B}CD + ABCD$$

والخطوة التالية هي رسم خريطة كارنوف لأربعة متغيرات كما نرى في شكل(4- 35)، ونقوم بوضع الأحاد التي في عمود الخرج (Y) من جدول الحقيقة في الخلايا المكافئة لها في خريطة كارنوف.

$\overline{A}D$

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	1	1	0
$\overline{A}B$	0	1	1	0
AB	0	0	1	0
$A\overline{B}$	0	0	1	0

CD

الشكل(4- 35) خريطة كارنوف للتعبير البوليني في مثال (4- 20).

وبالنظر إلى خريطة كارنوف في شكل(4- 35) نجد أنه يمكن تجميع الآحاد في مجموعتين كل مجموعة تحتوي على أربعة من الآحاد (1's). وبالتالي فإن الحلقة المربعة العليا والتي تحتوي على أربعة آحاد المتغير B والمتغير $\overline{B}$ يمكن حذفهما وبالمثل المتغير C والمتغير $\overline{C}$ وتكون النتيجة هي $\overline{A}D$. وكذلك بالنسبة للحلقة المستطيلة على الخريطة والتي تحتوي على أربعة آحاد فإنه يمكن حذف كل من المتغيرات $A,\overline{A},B,\overline{B}$ والنتيجة هي CD. والتعبير الجبري المبسط على ذلك يكون :

$$Y = \overline{A}D + CD$$

4- 16- 3 تبسيط التعبيرات على شكل (POS) *Karnaugh Map (POS) Minimization*

والآن بعد معرفتنا لكيفية تبسيط التعبيرات البولينية على شكل (SOP)، سوف نشرح الآن وبنفس الطريقة كيف يمكننا تبسيط الدوال على شكل (POS).

مثال 4- 21: اكتب التعبير البوليني على الشكل القياسي (POS) الذي يمثله جدول الحقيقة المبين في جدول (4- 12)، ثم قم بتبسيطه باستخدام خريطة كارنوف.

الحل: الخطوة الأولى للحصول على التعبير البوليني على شكل (POS)، هي كتابة الحدود المجموعة التي تعطي الخرج (Y) في جدول الحقيقة القيمة (0)، وبوضع هذه الحدود على شكل (POS) نحصل على التعبير البوليني وهو كما يلي:

$$Y = (A+B+C+D)(A+B+C+\overline{D})(\overline{A}+B+C+D)(A+\overline{B}+C+\overline{D})$$
$$(A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})(\overline{A}+B+C+D)(\overline{A}+\overline{B}+C+D)$$

☐

☐

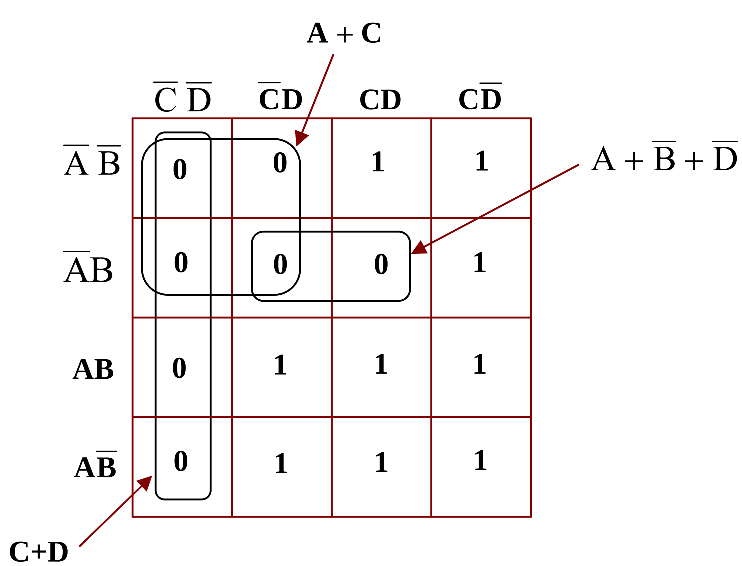
المدخلات				الخرج
A	***B***	***C***	***D***	***Y***
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1

1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

الجدول(4- 12) جدول الحقيقة المطلوب تبسيط التعبير البوليني له في مثال (4- 21).

والخطوة التالية هي رسم خريطة كارنوف لأربعة متغيرات كما نرى في شكل(4- 36)، ونقوم بوضع الأصفار التي في عمود الخرج (Y) من جدول الحقيقة في الخلايا المكافئة لها في خريطة كارنوف.

وبالنظر إلى خريطة كارنوف في شكل(4- 36) نجد أنه يمكن تجميع الأصفار في ثلاثة مجموعات، مجموعتين تحتوي على أربعة من الأصفار (0's)، والمجموعة الثالثة تحتوي على صفرين. وبالتالي فإن الحلقة المربعة العليا والتي تحتوي على أربعة أصفار المتغيرB والمتغير $\overline{B}$ يمكن حذفهما وبالمثل المتغير D والمتغير $\overline{D}$ وتكون النتيجة هي $A+C$. وكذلك بالنسبة للحلقة المستطيلة على الخريطة والتي تحتوي على أربعة أصفار فإنه يمكن حذف كل من المتغيرات $\overline{B},B$ والمتغيرات $\overline{A},A$ والنتيجة هي $C+D$. اما بالنسبة للحلقة التي تحتوي على صفرين فإنه يمكن حذف C والمتغير $\overline{C}$، والنتيجة هى $A+\overline{B}+\overline{D}$.



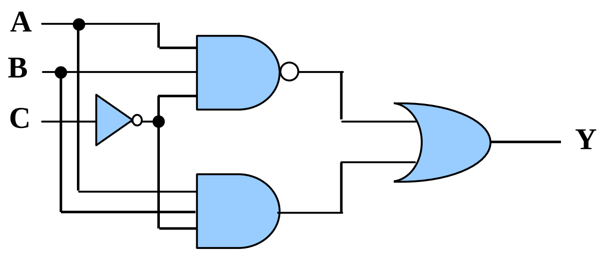
الشكل(4- 36) خريطة كارنوف للتعبير البوليني في مثال (4- 21).

ويكتب التعبير البوليني المبسط على شكل (POS) كما يلي:

$$Y = (C + D)(A + C)(A + \overline{B} + \overline{D})$$

تدريبـــات

1) اكتب التعبير البوليني للدائرة الموضحة في شكل- 1.



الشكل- 1

2) ارسم الدائرة المنطقية لكل من التعبيرات المنطقية الآتية:

a) $A\overline{B} + \overline{A}B$

b) $AB + \overline{AB} + \overline{A}BC$

c) $\overline{A}B(C + \overline{D})$

d) $A + B[C + D(B + \overline{C})]$

3) استنتج الدائرة المنطقية التي تمثل جدول الحقيقة الموضح.

المدخلات			الخرج
A	***B***	***C***	***Y***
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

4) استنتج جدول الحقيقة للتعبيرات البولينيه الآتية:

a) $(A+B)C$ b) $(A+B)(\overline{B}+C)$
c) $A(AC+\overline{A}B)$ d) $A(A+\overline{A}B)$

5) طبق نظريات ديمورجان على كل من التعبيرات البولينية الآتية:

a) $\overline{A\overline{B}(C+\overline{D})}$ b) $\overline{AB(CD+EF)}$

c) $\overline{(A+\overline{B}+C+\overline{D})}+\overline{ABC\overline{D}}$ d) $\overline{\overline{(\overline{A}+B+C+D)}\,\overline{(A\overline{B}\overline{C}D)}}$

6) باستخدام قواعد الجبر البوليني بسط التعبيرات البولينة التالية:

a) $F=A\overline{B}+A\overline{(B+C)}+B\overline{(B+C)}$

b) $F=[AB(C+\overline{BD})+\overline{AB}]CD$

c) $F=AB\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

d) $F=\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

7) حول التعبيرات القياسية (SOP) الآتية إلى التعبيرات (POS) القياسية:

a) $F=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}$

b) $F=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}C+ABC$

c) $F=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+AB\overline{C}+ABC$

8) حول التعبيرات القياسية (POS) الآتية إلى التعبيرات (SOP) القياسية:

a) $F=(A+B+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$

b) $F=(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(A+B+C)$

c) $F=(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$

9) استنتج جدول الحقيقة للتعبيرات القياسية (SOP) الآتية:

a) $F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C$

b) $F = A\,B\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,C + A\,\overline{B}\,C + A\,B\,C$

c) $F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C$

10) استنتج جدول الحقيقة للتعبيرات القياسية (POS) الآتية:

a) $F = (A + B + C)(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)$

b) $F = (A + B + \overline{C})(\overline{A} + B + C)(\overline{A} + B + \overline{C})(A + B + C)$

c) $F = (A + B + C)(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

11) استنتج التعبيران القياسيان $(SOP),(POS)$ من جدول الحقيقة الآتي:

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

12) باستخدام خريطة كارنوف صمم دائرة منطقية في أبسط صورة على شكل (SOP)، لجدول الحقيقة الموضح بأسفل:

المدخلات			الخرج
A	B	C	Y

0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

13) حقق كلاً من التعبيرات المنطقية الآتية مستخدماً بوابات $NAND$ فقط:

a) $ABCD+\overline{D}E$

b) $A\overline{B}C+AB+\overline{D}$

c) $A\overline{B}\,\overline{C}+D+E$

d) $A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC+AB\overline{C}$

14) حقق كل من التعبيرات المنطقية الآتية مستخدماً بوابات NOR فقط:

a) $(A+B+C)(A+\overline{B})$

b) $\overline{\overline{A}B\overline{C}+(D+\overline{E})}$

c) $(\overline{A}B+C)(D\overline{E}+\overline{F})$

d) $\overline{(\overline{A+\overline{B}})+(\overline{\overline{C}+D})}$

15) باستخدام خريطة كارنوف بسط كلاً من التعبيرات البولينية الآتية على شكل (SOP), (POS):

a) $F_1 = A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + ABC\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + AB\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D}$

b) $F_2 = ABC\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + A\overline{B}\,\overline{C}D + AB\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} + ABC\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D}$

c) $F_3 = \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}D + A\overline{B}\,\overline{C}D$

d) $F_4 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}CD$

تم بحمد الله

المحتويات