Poisson Distribution توزيع بواسون

يعدّ توزيع بواسون حالة خاصة من التوزيع الثنائي ، ويطبق على التجارب التي تتحقق فيها الشروط الآتية :

1. أن تكون نتيجة التجربة هي حادث له وجهان فقط (التوزيع الثنائي).
2. أن يكون عدد التجارب كبيراً $n \geq 50$.
3. احتمالات تحقق الحادث قريبة من الصفر أو من الواحد ، و تدعى احتمالات حدية .

0و1 . 2.

صيغة توزيع بواسون :

إن الصيغة الرياضية لتوزيع بواسون تأخذ الشكل الآتي :

$$P_m = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$$

حيث : $m = 0.1,2,3,4,.........\infty$ عدد مرات تحقق الحادث (النجاح) .

λ مؤشر وسيط لتوزيع بواسون و يدل على القيمة المتوقعة لتوزيع بواسون .

$e = 2.718281$ عدد ثابت (العدد الطبيعي النيبري) .

و يدعى توزيع بواسون بتوزيع الحوادث النادرة ، ويستخدم في مجالات عديدة أهمها :

1. حساب احتمالات حوادث الطريق ووفياتها .
2. حساب الاحتمالات المتعلقة بالأمراض الخبيثة والأمراض النادرة .
3. حساب احتمالات وقوع حرائق المنازل والغابات والمصانع وغيرها .

<u>الخصائص الرياضية للمتغيرات الخاضعة لتوزيع بواسون :</u>

تتمتع المتغيرات العشوائية المنقطعة الخاضعة لتوزيع بواسون بعدد من الخصائص الرياضية تمكن من معرفة و دراسة بعض خصائص الظواهر الاقتصادية والاجتماعية المدروسة وأهم هذه الخصائص :

1. القيمة المتوقعة (التوقع الرياضي) $\mathbf{E_{[x]} = \lambda = np}$.
2. التباين $\mathbf{V_{(x)} = \lambda}$.
3. الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

تطبيق :

تبين لأحد الأطباء أن بعض السكان يعانون من أعراض مرض معدٍ ، وتبين له أن احتمال اصابة الشخص الواحد بالمرض يبلغ 0.003 فإذا علمت أن عدد المراجعين لعيادة الطبيب يبلغ 1000 مريض في الشهر الواحد .

المطلوب :

1. حدّد التوزيع الاحتمالي المناسب لهذه المسألة .
2. ما احتمال أن يكون أي مريض مصاباً بهذا المرض بين المراجعين .
3. ما احتمال أن يصادف الطبيب مريضاً واحداً بين المراجعين لعيادته .
4. ما احتمال ألا يزيد عدد المصابين بين المراجعين شهرياً عن اثنين .
5. ما احتمال أن يكون بين المراجعين شهرياً مريضان على الأقل مصابين بهذا المرض
6. ما احتمال أن تكون بين المراجعين شهرياً اكثر من مصابين اثنين بهذا المرض .
7. ما احتمال ألا يقل عدد المرضى المصابين عن مريض واحد ولا يزيد عن ثلاثة مرضى .

1) إن التوزيع الاحتمالي المناسب لهذه المسألة هو توزيع بواسون لأن:

A. نتيجة التجربة هي أحد الوجهين (اصابة بالمرض – عدم الإصابة بالمرض).

B. احتمال تحقق الحادث ضعيف 0.003 .

C. عدد التجارب كبير و هو عدد المراجعين شهرياً $n = 1000$.

و توزيع بواسون يأخذ الصيغة الرياضية الآتية :

$$P_m = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$$

حيث

$$m = 0,1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda = n\ p = 1000\ \ (0.003\ )\ \ = 3$$

2) احتمال ألا يكون أي مصاب بين المراجعين $m = 0$

$$P_0 = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} \Rightarrow P_0 = e^{-3}\frac{3^0}{0!}$$

$$P_0 = e^{-3}\frac{1}{1} = 0.049787 \approx 0.05$$

3) احتمال أن يصادف الطبيب مريضاً واحداً بين المراجعين $m = 1$

$$P_1 = e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} \Rightarrow P_1 = e^{-3}\frac{3^1}{1!}$$

$$P_0 = e^{-3}\frac{3}{1} = 0.149361 \approx 0.15$$

4) احتمال ألا يزيد عدد المصابين عن اثنين $m \le 2$

$$p_{(m\le 2)} = p_0 + p_1 + p_2$$

$$p_2 = e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} \Rightarrow P_2 = e^{-3}\frac{3^2}{2!}$$

$$P_2 = e^{-3}\frac{9}{2} = 0.224042$$

$$p_{(m\le 2)} = 0.049787 + 0.149361 + 0.224042$$

$$p_{(m\le 2)} = 0.42319 \approx 0.42$$

5) احتمال أن يكون بين المراجعين مريضان على الأقل $m \ge 2$

$$p_{(m\ge 2)} = 1 - \left[p_{(0)} + p_{(1)}\right]$$

$$p_{(m\ge 2)} = 1 - (0.049787 + 0.149361)$$

$$p_{(m\ge 2)} = 0.800852$$

6) احتمال أن يكون بين المراجعين أكثر من مصابين $m > 2$

$$P_{(m>2)} = 1 - \left[P_{(0)} + P_{(1)} + P_{(2)}\right]$$

$$= 1 - (\ 0.049787 \ + \ 0.149361 \ + 0.224042\ )$$

$$= 0.42319 \approx 0.42$$

7) احتمال ألا يقل عدد المصابين عن مريض ولا يزيد عن ثلاثة مرضى $1 \leq m \leq 3$

$$P_{(1 \leq m \leq 3)} = P_{(1)} + P_{(2)} + P_{(3)}$$

$$= 0.149361 + 0.224042 + 0.224042$$

$$P_{(1 \leq m \leq 2)} = 0.597445 \approx 0.6$$

التوزيع الطبيعي المعياري Standard normal distribution

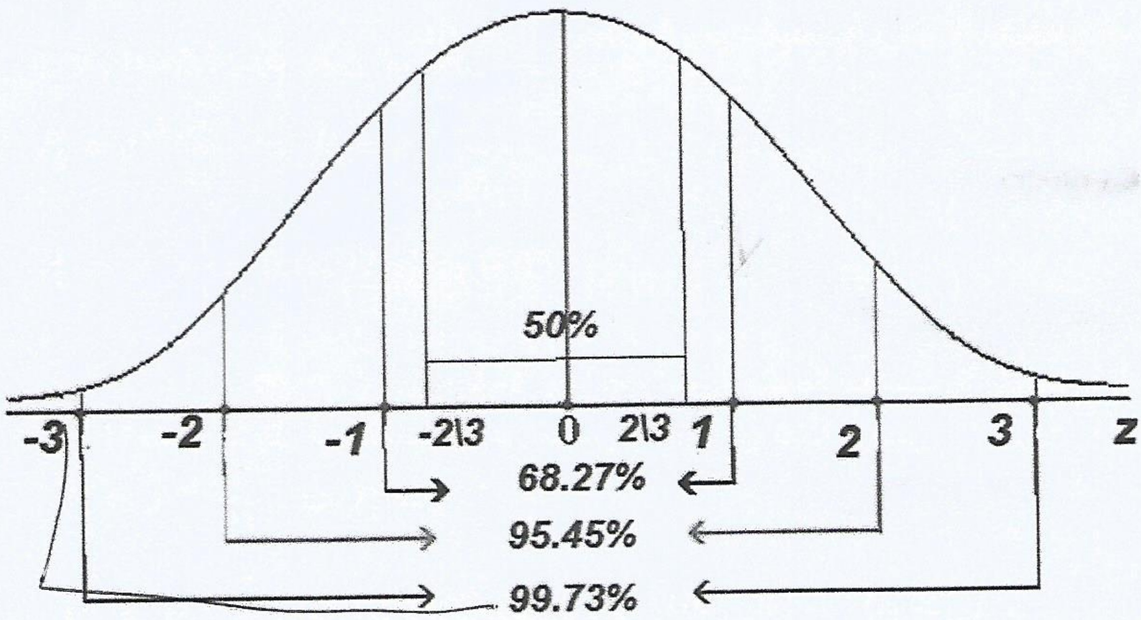
هو حالة خاصة من حالات التوزيع الطبيعي المعتدل ، حيث نحصل عليه بتحويل قيم المتغ العشوائي X إلى درجات معيارية Z بالعلاقة :

$$\boxed{Z = \frac{x - \mu}{\sigma}}$$

و نستخدم الرمز Φ ح الذي يدل على تابع الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي المعياري ، يحقق شروط تابع الكثافة الاحتمالية .

و تمثل القيمة Φ ح المساحة المحصورة تحت المنحنى الطبيعي و المحور الأفقي و من القيمة Z .

و الشكل الآتي يمثل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري :



يتبين من شكل المنحني الطبيعي المعياري الموضح أعلاه أن :

- المساحة الكلية تحت المنحني الطبيعي المعياري تبلغ الواحد الصحيح 100% .
- هذه المساحة تقع بالتساوي على جانبي العمود النازل من قمة المنحني.
- المساحة الواقعة بين المنحني $z = \pm \frac{2}{3}$ تبلغ 50% من إجمالي المساحة الكلية .
- المساحة الواقعة بين المنحني $z = \pm 1$ تبلغ 68.27% من إجمالي المساحة الكلية .
- المساحة الواقعة بين المنحني $z = \pm 2$ تبلغ 95.45% من إجمالي المساحة الكلية .
- المساحة الواقعة بين المنحني $z = \pm 3$ تبلغ 99.73% من إجمالي المساحة الكلية .

<u>بعض الخصائص الرياضية للمتغيرات الخاضعة للتوزيع الطبيعي المعياري :</u>

1. القيمة المتوقعة (التوقع الرياضي): $E_{(x)} = \mu = 0$
2. التباين : $V_{(x)} = \sigma = 1$
3. الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{V_{(x)}} = 1$

<u>بعض العلاقات الهامة في تطبيقات التوزيع الطبيعي المعياري:</u>

توجد بعض الحالات لا يمكن إيجاد قيمها مباشرة من الجداول المعدة مسبقاً لقيم التوزيع الطبيعي المعياري ، لأن هذه الجداول تقدم لنا مباشرة احتمال تحقق الحادث $p_{(x \le z)}$ فقط .

حيث يمكن الاعتماد على العلاقات الآتية لإيجاد قيم الحالات المخالفة لهذه الصيغة :

$$p_{(x \le z)} = 1 - p_{(x \le z)} = 1 - \Phi z$$

$$p_{(x \le -z)} = 1 - p_{(x \le z)} = 1 - \Phi z$$

$$p_{(x \ge -z)} = p_{(x \le z)} = \Phi z$$

تطبيق :

بفرض أن متوسط الإنتاج اليومي لأحد خطوط الإنتاج طناً $\mu = E_{[x]} = 60$ بانحراف معياري قدره طن $(\sigma = 4)$ وإذا علمنا أن الإنتاج اليومي هو متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي.

أوجد الآتي :

1. احتمال أن يكون الإنتاج $x > 60$.
2. احتمال أن يكون الإنتاج $x \le 60$.
3. احتمال أن يكون الإنتاج $52 \le x \le 72$.
4. احتمال أن يكون الإنتاج $x > 52$.
5. احتمال أن يكون الإنتاج $x \le 72$.
6. احتمال أن يكون الإنتاج $x > 72$
7. احتمال أن يكون الإنتاج $64 \le x \le 68$

لإيجاد الاحتمالات نعتمد التوزيع الطبيعي المعياري بالاعتماد على الصيغة $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ لحساب كل احتمال على حدة .

1. احتمال أن يكون الإنتاج $x > 60$:

$\mu : 60 \qquad \delta = 4$

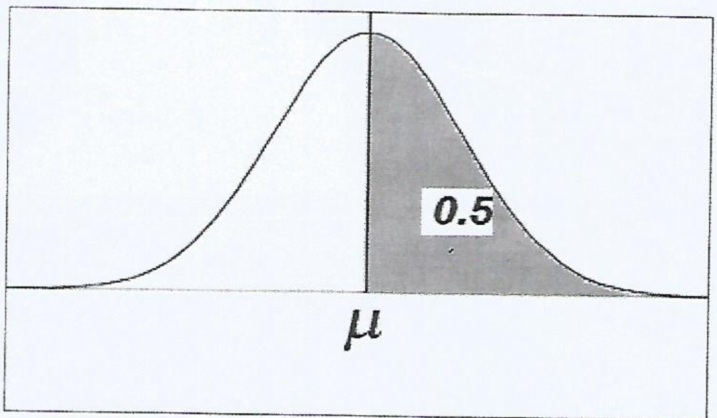
$$p(x \rangle 60) = p(z \rangle \frac{60-60}{4})$$

$$p(x \rangle 60) = p(z \rangle 0)$$

$$p(z \rangle 0) = 0.5$$

$\frac{x - \mu}{\sigma}$

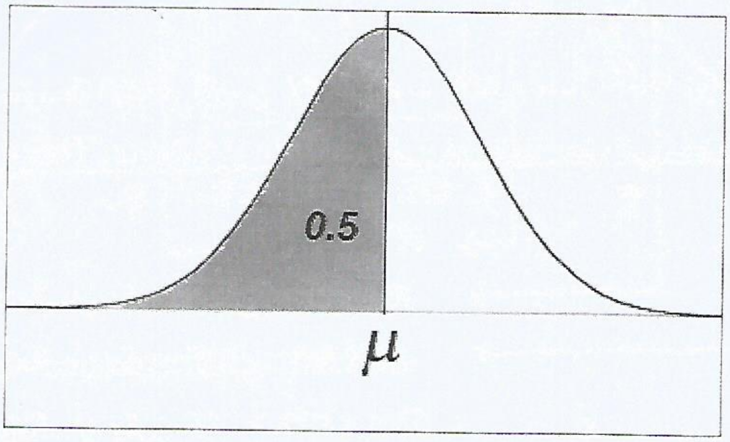
$p z \rangle 0$



2. احتمال أن يكون الإنتاج $x \le 60$.

$$p(x \le 60) = p(z \le \frac{60-60}{4})$$

$$p(x \le 60) = p(z \le 0) = 0.5$$



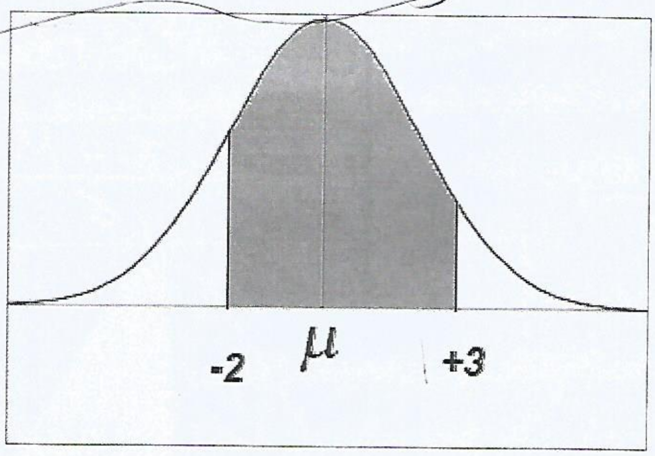
3. احتمال أن يكون الإنتاج $52 \le x \le 72$

$$p(52 \le x \le 72) = p(\frac{52-60}{4} \le z \le \frac{72-60}{4})$$

$$p(-2 \le z \le +3) = \frac{0.9545}{2} + \frac{0.9973}{2}$$

$$p(-2 \le z \le +3) = 0.47725 + 0.49865$$

$$p(-2 \le z \le +3) = 0.9759$$

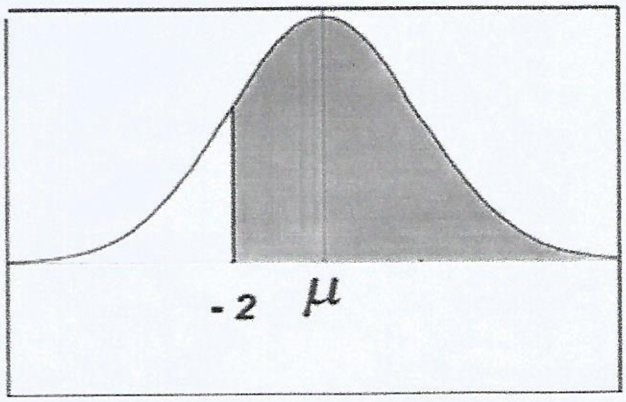


4. احتمال أن يكون الإنتاج $x > 52$

$$p(x \geq 52) = p\left(z \geq \frac{52-60}{4}\right)$$

$$p(x \geq 52) = p(z \geq -2) = 0.5 + \frac{0.9545}{2}$$

$$p(x \geq 52) = 0.97725$$

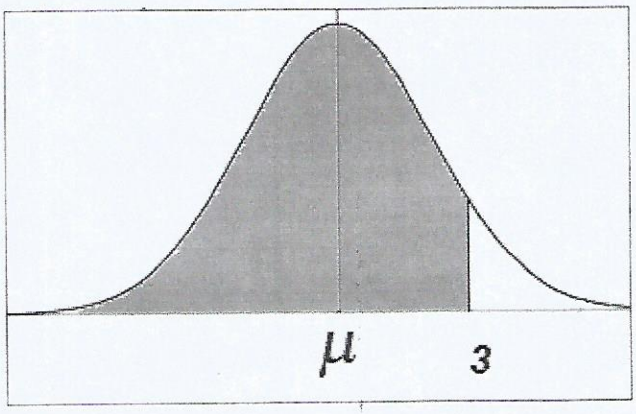


5. احتمال أن يكون الإنتاج $x \leq 72$

$$p(x \leq 72) = p\left(z \leq \frac{72-60}{4}\right)$$

$$p(x \leq 72) = p(z \leq 3) = \frac{0.9973}{2} + 0.5$$

$$p(x \leq 72) = 0.99865$$

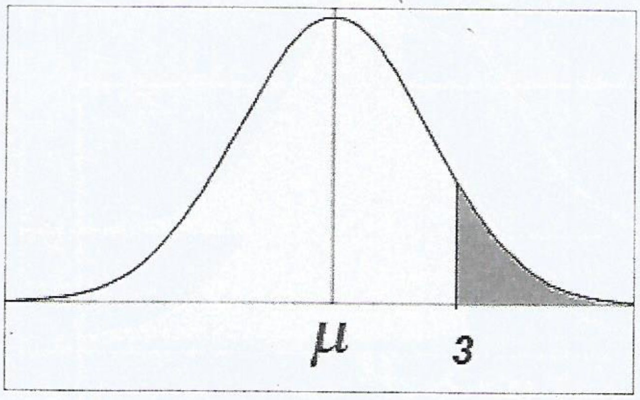


احتمال أن يكون الإنتاج $x > 72$.

$$p(x > 72) = 1 - p(x < 72)$$

$$p(x > 72) = 1 - 0.99865$$

$$p(x > 72) = 0.00135$$



7. احتمال أن يكون الإنتاج $64 \le x \le 68$.

$$P(64 \le X \le 68) = P\left(\frac{64-60}{4} \le Z \le \frac{68-60}{4}\right)$$

$$P(64 \le X \le 68) = P(1 \le Z \le 1)$$

$$P(64 \le X \le 68) = \frac{0.9545}{2} - \frac{0.682}{2}$$

$$P(64 \le X \le 68) = 0.47725 - 0.34135$$

$$P(64 \le X \le 68) = 0.1259$$