التوزيعات الاحتمالية

probability Distributions

نعرف التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي بأنه الشكل الرياضي للعلاقة القائمة بين قيم المتغير العشوائي واحتمالات حدوثه . ونلاحظ وجود العديد من التوزيعات الاحتمالية ولكننا سنكتفي بدراسة أهم هذه التوزيعات.

التوزيعـات الاحتماليـة للمتغيـرات

إن أهم التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنقطعة والمستخدمة كثيراً في الأبحاث الإحصائية للمسائل الاقتصادية والاجتماعية هي :

1- التوزيع المنتظم (توزيع الحوادث المتكافئة).

2- التوزيع الثنائي (توزيع ثنائي حد نيوتن).

3- توزيع بواسون (توزيع الحوادث النادرة).

كما سندرس **التوزيع الطبيعي المعياري من التوزيعات المستمرة**

التوزيع المنتظم المنقطع (Systematic Distribution)

ترتبط فكرة هذا التوزيع بمبدأ الحوادث الاحتمالية المتكافئة وبفرض وجود متغير عشوائي منقطع (X) قيمه المحتملة موزعة كالآتي : $X : x_1 \ , x_2 \ , \ x_3 \ ....x_n$

حيث n تمثل عدد الحوادث الاجمالية المتكافئة للمتغير العشوائي واحتمالاتها متسأوية

إن قانون الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير يأخذ الشكل الآتي :

المتغير X_i	X_1	X_2	X_3	X_5	..............................X_n	$\sum P(X)$
الاحتمال P_i	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	..............................$\frac{1}{n}$	1

و من أمثلة الحوادث المتكافئة في حياتنا اليومية والتي تخضع للتوزيع المنتظم الآتي:

1- سحب ورقة من ورق اللعب واحتمالها $\frac{1}{52}$

2- الحصول على أحد أوجه قطعة النرد واحتمال الحادث $\frac{1}{6}$

3- الحصول على مولود ذكر أو أنثى واحتمالها $\frac{1}{2}$

4- الحصول على أحد أيام الأسبوع واحتمالها $\frac{1}{7}$

وبشكل عام إن اختيار عنصر من مجتمع متجانس عدد عناصره n يكون احتماله $\frac{1}{n}$

الخصـائص الرياضـية للمتغيـرات الخاضـعة للتوزيـع المنقطـع

تتمتع المتغيرات العشوائية المنقطعة الخاضعة للتوزيع المنقطع المنتظم بعدد من الخصائص الرياضية التي تساعدنا في معرفة مزايا المتغيرات المدروسة ، وأهم هذه الخصائص :

1- القيمة المتوقعة (التوقع الرياضي) $E[X]=\frac{n+1}{2}$

2- التباين $V(X)=\delta^2=\frac{n^2+1}{2}$

3- الانحراف المعياري $\delta=\sqrt{\frac{n^2+1}{2}}$

التوزيع الثنائي Binary Distribution

يستخدم التوزيع الثنائي في معالجة احتمالات التجارب التي تتحقق فيها الشروط الآتية :

1. أن تكون نتيجة التجربة أحد وجهين متنافيين (نجاح – رسوب)(موت – حياة) (ذكر – انثى)
2. أن يكون الحادثان متنافيين ومستقلين (مجموع احتماليهما مسأو الواحد الصحيح)
3. أن يكون تكرار التجربة عدداً محدوداً من المرات ($n<50$)
4. عدم تغيير احتمال وقوع الحادث من تجربة لأخرى .

الرموز المستخدمة :

P : احتمال وقوع الحادث A وهو أحد وجهي الظاهرة المدروسة $P(A)=p$

q : احتمال عدم وقوع الحادث A وهو أحد وجهي الظاهرة المدروسة $P(\bar{A})=q$

حيث إن : $(p+q=1)$

n : عدد مرات تكرار التجربة .

m : عدد مرات تحقق الحادث A حيث $m=\{0,1,2,3,4,\ldots\ldots\ldots n\}$

p_m : احتمال وقوع الحادث A عددا من المرات قدره m حيث $m \leq n$

وتحسب قيمة احتمال وقوع الحادث A عدداً من المرات m وفق صيغة التوزيع الثنائي الآتية :

$$\boxed{P_m = C_n^m \, p^m \, q^{n-m}}$$

حيث إن

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

الخصائص الرياضية للمتغيرات الخاضعة للتوزيع الثنائي

تتمتع المتغيرات العشوائية المنقطعة الخاضعة للتوزيع الثنائي بعدد من الخصائص الرياضية نذكر منها :

1- القيمة المتوقعة (التوقع الرياضي) $E[X]=np$

2- التباين $V(X)=\delta^2=npq$

3- الانحراف المعياري $\delta=\sqrt{npq}$

تطبيق :

إذا علمت أن احتمال أن يكون المولود ذكراً يساوي احتمال أن يكون المولود أنثى ، و بفرض أن لدى الأسرة أربعة أولاد .

إن هذه التجربة تخضع للتوزيع الاحتمالي الثنائي الحدين لأنها تحقق الشروط :

حيث يكون : $p = \frac{1}{2}$ احتمال أن يكون المولود ذكراً.

$q = \frac{1}{2}$ احتمال أن يكون المولود أنثى .

m عدد الأولاد الذكور حيث $m = \{1 , 2 , 3 , 4\}$

$n = 4$ عدد الأولاد

القانون: $$P_m = C_n^m \; p^m q^{n-m}$$

- احتمال أن يكون الأولاد الأربعة ذكورا : ذكر $m = 4$

$$P_4 = C_4^4 p^4 q^{4-4}$$

$$P_4 = 1\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 \left(\tfrac{1}{2}\right)^0$$

$$P_4 = \tfrac{1}{16} = 0.1$$

- احتمال أن يكون الأولاد الأربعة اناثا : ذكر $m = 0$

$$P_0 = C_4^0 \, p^0 q^4$$

$$P_4 = 1\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 \left(\tfrac{1}{2}\right)^4$$

$$P_4 = 1 \left(\tfrac{1}{16}\right) 1 =$$

- احتمال أن يكون لدى الأسرة بنتا واحدة: ذكر $m = 3$

$$P_3 = C_4^3 \, p^3 q^1$$

$$P_3 = 4 \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \left(\tfrac{1}{2}\right)^1$$

$$P_3 = 4 \left(\tfrac{1}{8}\right) \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$P_3 = 0.25$$

- احتمال أن يكون لدى الأسرة ثلاث بنات: ذكر $m = 1$

$$P_1 = C_4^1\, p^1 q^3$$

$$P_1 = 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^1\left(\tfrac{1}{2}\right)^3$$

$$P_1 = 4\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{8}\right)$$

$$P_1 = 0.25$$

تطبيق :

بفرض أن احتمال نجاح طالب بأحد المقررات الدراسية هو 0.7 و كان قد تقدم للامتحان بـ 5 مقررات ، و المطلوب :

1. حدد قانون التوزيع الاحتمالي الذي تخضع له هذه التجربة .
2. احسب الاحتمالات المقابلة لهذه التجربة .
3. احسب احتمال نجاح الطالب في جميع المواد .
4. احسب احتمال نجاح الطالب بثلاث مواد على الأقل .
5. احسب احتمال رسوب الطالب في جميع المواد .
6. احسب احتمال عدم نجاح الطالب في أي مادة ، وماذا تستنتج ؟
7. احسب احتمال نجاح الطالب بمادتين على الأكثر .

- بما أن نتيجة التجربة هي حادث له وجهان فقط (إما نجاح أو رسوب) متكرر 5 مرات ، و احتمال النجاح هو ذاته في كل تجربة فهي تخضع لقانون التوزيع الثنائي و صيغته الرياضية هي :

$$P_m = C_n^m\, p^m q^{n-m}$$

حيث

$n = 5$ عدد مرات تكرار التجربة (عدد المواد).

$m = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ عدد المواد التي نجح بها الطالب .

$p = 0.7$ احتمال نجاح الطالب .

$q = 1 - 0.7 = 0.3$ احتمال رسوب الطالب .

$P_m = ?$ قيمة الاحتمال المطلوب .

- حساب الاحتمالات لهذه التجربة .

$$p_0 = C_5^0 \; p^0 \; q^5$$
$$p_0 = 1\,(0.7)^0\,(0.3)^5$$
$$p_0 = 1(1)(0.00243) = 0.00243$$
$$p_1 = C_5^1 \; p^1 \; q^4$$
$$p_1 = 5\,(0.7)^1\,(0.3)^4$$
$$p_1 = 5(0.7)(0.0081)$$
$$p_1 = 0.02835$$
$$p_2 = C_5^2 \; p^2 \; q^3$$
$$p_2 = 10\,(0.7)^2\,(0.3)^3$$
$$p_2 = 10(0.49)(0.027)$$
$$p_2 = 0.1323$$
$$p_3 = C_5^3 \; p^3 \; q^2$$
$$p_3 = 10\,(0.7)^3\,(0.3)^2$$
$$p_3 = 10(0.343)(0.09)$$
$$p_3 = 0.3087$$
$$p_4 = C_5^4 \; p^4 \; q^1$$
$$p_4 = 5\,(0.7)^4\,(0.3)^1$$
$$p_4 = 5(0.2401)(0.3)$$
$$p_4 = 0.36015$$
$$p_5 = C_5^5 \; p^5 \; q^0$$
$$p_5 = 1\,(0.7)^5\,(0.3)^0$$
$$p_5 = 1(0.16807)(1)$$
$$p_5 = 0.16807$$

نلاحظ ان مجموع الاحتمالات يساوي الواحد :

$P_0 = 0.00243$

$P_1 = 0.2835$

$P_2 = 0.1323$

$P_3 = 0.3087$

$P_4 = 0.36015$

$P_5 = 0.16807$

$\sum P_i = 1$

- احتمال نجاح الطالب في جميع المواد هو : $m = 5$

$p_5 = 0.16807$

- احتمال نجاح الطالب بثلاث مواد على الأقل: $m \geq 3$

$p_{m \geq 3} = p_3 + p_4 + p_5$

$p_{m \geq 3} = 0.3087 + 0.36015 + 0.16807$

$p_{m \geq 3} = 0.83692$

- احتمال رسوب الطالب في جميع المواد $m = 0$

$p_0 = 0.00243$

- احتمال عدم نجاح الطالب في أية مادة $m = 0$

$p_0 = 0.00243$

نستنتج أن رسوب الطالب في جميع المواد = عدم نجاح الطالب في أية مادة .

- احتمال نجاح الطالب بمادتين على الأكثر $m \leq 2$

$p_{m \leq 2} = p_0 + p_1 + p_2$

$p_{m \leq 2} = 0.00243 + 0.2835 + 0.1323$

$p_{m \leq 2} = 0.41823$