توابع الكثافة الاحتمالية Aftershocks probability density

تسمى المتغيرات العشوائية المترافقة مع احتمالات تحققها بتوابع الكثافة الاحتمالية و تستخدم بشكل مكثف في الأبحاث الإحصائية على اختلاف أنواعها وأهدافها لتقدير بعض الصفات الرياضية والإحصائية للحوادث العشوائية .

فهناك توابع الكثافة الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المستمرة و يرمز لها بالرمز $F(X_i)$ فسيتم التعرف عليه أكاديمياً في الدراسات الجامعية . وسندرس توابع الكثافة الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتقطعة و نرمز لها بالرمز $P(X_i)$ ويتم اختصارها بـ (P)

توابع الكثافة الاحتمالية للمتحولات المتقطعة :

نسمي الجدول الإحصائي الذي يحوي رموز المتغيرات العشوائية الدال على الحوادث المختلفة والمترافقة مع احتمالات وقوع كل من هذه الحوادث بجدول الكثافة الاحتمالية للمتغيرات المنتظمة والذي يأخذ الشكل الآتي:

المتغير X_i	X_1 X_2 X_3 X_5..................................X_n	$\sum P(X)$
الاحتمال P_i	P_1 P_2 P_3 P_5..................................P_n	1

لكي نسمي هذا الجدول بتابع الكثافة الاحتمالية يجب أن تتحقق الشروط الآتية :

1 - إن القيم المرتقبة للمتغير العشوائي هي مجموعة منتهية العدد (عددها محدد).

2 - إن مجموع الاحتمالات الكلية تساوي الواحد $(\sum P_i = 1)$.

3 - إن جميع قيم الاحتمالات P_i هي موجبة وتحقق المتراجحة $0 \le P_i \le 1$

تطبيق :

تمت دراسة الدرجات التي حصل عليها 100 طالب في امتحان مادة الإحصاء فكانت وفق الجدول آلأتي :

الدرجات	20	40	50	70	85	100
عدد الطلاب	10	15	40	20	10	5

وبفرض أن مجتمع الطلاب طبيعي المطلوب: $P_i = \frac{m}{n} = \frac{10}{100} = 0,1$

1 – تنظيم جدول التوزيع الطبيعي.

2 – أثبت أن التابع تابع كثافة احتمالي.

نلاحظ أن المتغير المدروس متغير عشوائي متقطع لأن درجات الطلاب متغيرة لذلك نحسب الاحتمالات اعتماداً على العلاقة : $\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$

ثم ننظم الجدول الأتي:

الدرجات X	20	40	50	70	85	100	
عدد الطلاب	10	15	40	20	10	5	$N = 100$
P_i	0.10	0.15	0.40	0.20	0.10	0.05	$\sum P_i = 1$

وللتأكد من أن التابع هو تابع كثافة احتمالي نلاحظ :

1 – إن القيم المرتقبة للمتغير العشوائي عدد محدد 6 حدود

2 – إن مجموع الاحتمالات الكلية تسأوي الواحد $(\sum P_i = 1)$.

3 – إن جميع قيم الاحتمالات P_i هي موجبة وتحقق المتراجحة $0 \le P_i \le 1$

وبما أن الشروط الثلاثة محققة، فالتابع تابع كثافة احتمالي.

توابع التوزيع الاحتمالية :Aftershocks probability distribution

هي التوابع والعلاقات التي تسمح بحساب قيمة الاحتمالات التراكمية بدءاً من أول نقطة محتملة لغاية النقطة المطلوبة والتي تقع ضمن مجال المتغير العشوائي المدروس .

وتتمتع توابع التوزيع الاحتمالية التراكمية بعدة خواص رياضية أهمها :

1 – ان تتحقق العلاقة الآتية في المتغيرات المتقطعة: $0 \le P \le 1$

2 – يبدأ الاحتمال التراكمي من القيمة (0) وينتهي بالقيمة (1) $F(+\infty)=1$

$$P(-\infty)=0 \qquad P(+\infty)=1$$

3 – إن جميع القيم التي يأخذها تابع التوزيع الاحتمالي التراكمي هي قيم متزايدة دوماً

توابع التوزيع الاحتمالية للمتحولات المتقطعة :

وفيه ينظم جدول يضم المتغير المتقطع والاحتمالات المقابلة لهذه القيم والاحتمالات التراكمية

X المتغير	X_1	X_2	X_3	..............................X_n	$\sum P(X)$
P الاحتمال	P_1	P_2	P_3	..............................P_n	1
$F(X_i)$ الاحتمال التراكمي	P_1	P_1+P_2	$P_1+P_2+P_3$	1	

التوقع الرياضي E(X)

Expectation Mathematical

يعرف التوقع الرياضي للمتحولات العشوائية المتقطعة بأنه مجموع جداءات قيم المتحول العشوائي في الاحتمالات المقابلة لها $\boxed{E(X) = \sum X_i P_i}$

حيث X_i قيم المتحول المتقطع.

P_i الاحتمالات المقابلة .

تطبيق :

[illegible] لصناعة الطأولات تمت مراقبة عدد الوحدات المنتجة من الطأولات يومياً [illegible] فكانت البيانات الآتية

كمية الإنتاج	20	30	25	27	32	26
عدد الأيام	6	6	9	3	3	3

ولمعرفة القيمة المتوقعة لعدد الوحدات المنتجة في يومٍ واحد باختيار عشوائي نتبع الآتي:

1- نحسب الاحتمالات الخاصة بقيم الإنتاج ، كل على حدة ($n = 30$ يوماً)

$$P_i = p(x) = \frac{m}{n}$$

$$p(26) = \frac{3}{30} = 0.1$$

$$p(32) = \frac{3}{30} = 0.1$$

$$p(27) = \frac{3}{30} = 0.1$$

$$p(25) = \frac{9}{30} = 0.3$$

$$p(30) = \frac{6}{30} = 0.2$$

$$p(20) = \frac{6}{30} = 0.2$$

[illegible] وفق الصيغة الآتية :

$$E(X)=\sum X_i P_i = X_1p_1 + X_2P_2 + X_3P_3 + X_4p_4 + X_5p_5 + X_6P_6$$

$$E(X)=\sum X_i P_i = 26(0.1)+32(0.1)+27(0.1)+25(0.3)+30(0.2)+20(0.2)$$

$$E(X)=\sum X_i P_i = 2.6 + 3.2 + 2.7 + 7.5 + 6 + 4$$

القيمة المتوقعة لعدد الوحدات المنتجة : $E(X)=\sum X_i P_i = 26$

وينظم الحساب في جدول كالآتي:

كمية الإنتاج (X_i)	26	32	27	25	30	20	$\sum$
[illegible]	3	3	3	9	6	6	30
الاحتمال (P_i)	0.1	0.1	0.1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1
$X_i p_i$	2.6	3.2	2.7	7.5	6	4	26

فيكون التوقع الرياضي (القيمة المتوقعة) = 26

تطبيق :

قامت إحدى الجمعيات بإصدار ألف بطاقة من بطاقات اليانصيب ، غير ساعية للربح ، وإنما لتوزيع العوائد المالية كافة على شكل جوائز كالأتي :

500 بطاقة جائزة كل منها 1000 ل.س

300 بطاقة جائزة كل منها 2000 ل.س

150 بطاقة جائزة كل منها 3000 ل.س

45 بطاقة جائزة كل منها 10000 ل.س

5 بطاقات جائزة كل منها 100000 ل.س

المطلوب :تحديد السعر العادل للبطاقة حيث يتم توزيع كافة العوائد .

إن السعر العادل للبطاقة يكافئ تماماً القيمة المتوقعة، والربح المتوقع هو متغير عشوائي (X_i) حيث :

X_i	1000	2000	3000	10000	100000
عدد البطاقات	500	300	150	45	5

ثم نحسب الاحتمالات المقابلة لكل حالة ربح على حدة $P_i = \frac{m}{n}$

حيث m عدد البطاقات الرابحة.

n عدد البطاقات الكلية .

ننظم جدولاً :

كمية الإنتاج (X_i)	1000	2000	3000	10000	100000	$\sum$
عدد البطاقات	500	300	150	45	5	1000
الاحتمالات (P_i)	0.5	0.3	0.15	0,045	0.005	1
$X_i p_i$	500	600	450	450	500	2050

وبالآتي تكون القيمة المتوقعة $E(X)=\sum X_iP_i=2050$

و نحسب القيمة المتوقعة (التوقع الرياضي) وفق الصيغة الآتية :

$$E(X)=\sum X_iP_i = X_1p_1 + X_2P_2 + X_3P_3 + X_4p_4 + X_5p_5$$

$$E(X)=\sum X_iP_i$$

$$E(X) = 1000(0.5)+2000(0.3)+3000(0.15)+10000(0.045)+100000(0.005)$$

$$E(X)=\sum X_iP_i = 500+600+450+450+500$$

القيمة المتوقعة لعدد الوحدات المنتجة: $E(X)=\sum X_iP_i=2050$