كلية الاقتصاد

الرياضيات العامة

السنة الأولى

مدرس المقرر

43

د. مازن ديب

العام الدراسي 2023/2022م

➔ الأعداد العقدية (المركبة):

- **تعريف:** في R أي عدد حقيقي $x \in R$ يمثل بنقطة على المحور $x\grave{}ox$ لا تتضمن R الجذور التربيعية للأعداد السالبة أو لوغاريتماتها وبالتالي لا يمكن حل الكثير من المسائل الرياضية في R وكان لابد من البحث عن مجموعة أكبر تسمح بحل هذه المشكلة نطلق على هذه المجموعة الأعداد المركبة "complex numbers" وذلك بافتراض وجود محور آخر متعامد مع المحور الحقيقي $x\grave{}ox$ يطلق عليه اسم المحور التخيلي.

وبذلك تكون مجموعة الأعداد المركبة هي مجموعة نقاط المستوي xoy الذي يطلق عليه المستوى العقدي وبالتالي فإن أي عدد مركب يمثل بثنائية (x,y) في المستوى العقدي، حيث تسمى فصل هذه النقطة x بالقسم الحقيقي بينما يسمى ترتيبها y بالقسم التخيلي، ويرمز لمجموعة الأعداد المركبة (C) .

- ✓ تسمى النقاط الواقعة على المحور الحقيقي $x\grave{}ox$ بالأعداد الحقيقية الصرفة وهي من الشكل (x,0)
- ✓ بينما تسمى النقاط الواقعة على المحور التخيلي $y\grave{}oy$ بالأعداد التخيلية الصرفة وهي من الشكل (0,y)

- المحور $x\grave{}ox$ يقسم المستوي العقدي إلى نصفين بحيث يكون لكل عد مركب (x,y) نظير بالنسبة لهذا المحور هو العدد المركب (x,−y) يطلق عليه مرافق العدد المركب (x,y)

$$Z = (x, y) \Rightarrow \bar{z} = (x, -y)$$

كما يرمز للعدد التخيلي الحرف (0,1) بالرمز (i) $\quad$ i=(0,1)

☒ العمليات الحسابية على الأعداد المركبة:

1- **الجمع والطرح:** جمع (طرح) عددين مركبين هو عدد مركب قسمه الحقيقي حاصل جمع (طرح) القسمين الحقيقين وقسمة التخيلي حاصل جمع (طرح) القسمين التخيلين

إذا كان $\quad (x_1,y_1) \in \ , \ (x_2,y_2) \in c$

فإن $\quad \mathbf{(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2 \ , \ y_1 + y_2)}$

- ✓ **مثال:** $(3,5) + (1,2) = (4,7)$

$(8,4) - (3,6) = (5,-2)$

نتيجة حاصل جمع عددين مركبين مترافقين هو عدد حقيقي حرف

$$z + \bar{z} = (x, y) + (x, -y) = (2x, 0)$$

2- **الجداء:** يعرف جداء عددين مركبين بأنه عدد مركب جديد قسمه الحقيقي فرق جدائي المركبتين المتماثلتين لهذين العددين على الترتيب وقسمه التخيلي مجموع جدائي المركبتين المختلفتين

$(x_1,y_1)\ .\ (x_2,y_2)\ = (x_1x_2 -\ y_1+ y_2\ ,x_1x_2 + y_1x_2\ )$

✓ مثال $(3.2)\ .\ (5.4) = (15-8\ ,\ 12+10)= (7,22)$

نتيجة /1/: جداء عددين مركبين مترافقين عدد حقيقي

$$z.\bar{z}= (x,y).(x,-y) = (x^2+y^2,0)= x^2+ y^2 \in R$$

✓ مثال: $z = (3,4) \Rightarrow \bar{z} = (3,-4)$

$$z.\bar{z}= (3,4).(3,-4) = (9+16,-12+12) = (25,0)= 25$$

نتيجة الجداء/2/: الجداء $i.i = i^2 = (0.1)(0.1) = (-1,0) = -1$

بجذر الطرفين نحصل على $i^2 = -1 \Leftarrow \sqrt{-1} = \pm i$ وبالتالي يمكن تحديد الجذور التربيعية للأعداد الحقيقية السالبة باستبدال (-1) ب i^2 : $\sqrt{-25} = \sqrt{-(25)} = \sqrt{25i^2}$

3-جداء عدد حقيقي بعدد مركب:

نضرب عدد حقيقي بعدد مركب يكفي ضرب مركبتي هذا العدد بالعدد الحقيقي:

$$4(3,2) = (12,8)$$

☒ **الشكل الجبري للعدد المركب:**

إذا كان $(x,y) \in c$ فإن $(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + y(0,1)$

وهو الشكل الجبري للعدد المركب $\Rightarrow (x,y) = x + yi$

☒ **العمليات الحسابية على الشكل الجبري:**

يتيح الشكل الجبري كتابة العدد المركب (x,y) كمجموع لعددين أحدهما حقيقي (x) والآخر تخيلي (yi)

وبالتالي لإتمام العمليات الحسابية على الشكل الجبري يكفي فك الأقواس ثم جمع الحدود المتشابهة كما يأتي:

1) **الجمع والطرح**: إذا كان $z_1 = x_1 + y_1 i \in c\ , z_2 = x_2 + y_2 i \in c$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = x_1 + y_1 i + x_2 + (x, -y\ y_2)i$$
$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

أي أن: $\boldsymbol{z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i}$ **(يقبل دون برهان)**

$$\boldsymbol{z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i}$$

2) **الجداء**: $z_1 = x_1 + y_1 i \in c\ , z_2 = x_2 + y_2 i \in c$

$\boldsymbol{z_1 . z_2 = (x_1x_2) - (y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i}$ **(يقبل دون برهان)**

3) **القسمة**: دون برهان $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)}{x_2^2+y_2^2} - \frac{(x_1y_2-y_1x_2)}{x_2^2+y_2^2} i$

✓ **مثال:** لدينا $z_1 = 3 + 4i \quad , z_2 = 1 + i$

- **أوجد:** $z_1 + z_2 \quad , \quad z_1 - z_2 \quad , \quad {z_1}/{z_2} \quad , \quad z_1 . z_2$

الحل:

$$z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (1 + i) = 4 + 5i$$

$$z_1 - z_2 = (3 + 4i) - (1 + i) = 2 + 3i$$

$$z_1 . z_2 = (3 + 4i).(1 + i) = 3 + 3i + 4i^2 = 3 + 7i - 4 = -1 + 7i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3+4i)}{1+i} = \frac{7+i}{2} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} i$$

4) الشكل المثلثي للعدد المركب:

كل عدد مركب z يقابل بشعاع وحيد بدايته مبدأ إحداثيات المستوى العقدي ونهايته النقطة (x,y)

نسمي هذا الشعاع طويلة العدد المركب r أو /z/

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} , \sin = \frac{y}{r}$$

⇐ **الشكل المثلثي للعدد المركب:** $z = r\,\{\cos\theta + i\ \sin\theta\}$

- إن إضافة $2\pi k$ إلى الزاوية θ لا يغير نسبها المثلثية ⇐

$$z = r\,\{\cos(\theta + 2\pi k) + i\ \sin(\theta + 2\pi k)\}$$

✓ **مثال:** أوجد الشكل المثلثي للعدد المركب z= −1+i

الحل: لدينا x= −1 ، y = +1

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{+1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \qquad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

وعليه يكون الشكل المثلثي للعدد المركب z

$$z = \sqrt{2}\{\cos\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) + i\ \sin(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k)\}$$

5) الشكل الأسي للعدد المركب:

- **نظرية أولر: يقبل دون برهان :** $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

الشكل الأسي العام $z = re^{i(\theta + 2\pi k)}$

6) لوغاريتمات الأعداد المركبة:

الأساسي $a = 10 \Leftarrow$ $\log_{10} z = \log_{10} r + i\,(\theta + 2\pi k)\log_{10} e$

$a = 1 \Leftarrow$ $\log z = \log r + i\,(\theta + 2\pi k)$

✓ **مثال:** أوجد اللوغاريتم الطبيعي للعدد $z = 1 + \sqrt{3i}$

الحل:

$$r = \sqrt{1+3} = 2 \qquad \left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z = 2e^{i(\frac{\pi}{3}+2\pi k)}$$

$$\log z = \log 2 + i\,(\frac{\pi}{3} + 2\pi k)$$

تمهيد: علم المصفوفات هو علم قائم بذاته حيث تلعب المصفوفات دوراً هاماً في حل المعادلات الخطية وغير الخطية في فروع الرياضيات المختلفة . فضلاً عن ذلك فإن المصفوفات لها تطبيقات فى مجالات عديدة، فى الاقتصاد، والإحصاء وبحوث العمليات والعمليات الإدارية وغيرها من المجالات. فمثلاً نجد أن المصفوفات هي الأساس في صياغة نماذج المنتج والمستخدم وكذلك صياغة متسلسلات ماركوف. ويعتبر الرياضي هاملتون والرياضي كابيلي أول من أدخل مفهوم المصفوفات.

2-1 تعريف المصفوفة من المرتبة $m\times n$: لتكن لدينا المجموعة X (مجموعة غير خالية) ولتكن المجموعتان : $F=\{1,2,3,...,n\}$ و $E=\{1,2,3,...,m\}$ حيث m,n أعداد طبيعية و $(m\geq 1, n\geq 1)$ فإن كل تطبيق من الشكل : $f:E\times F\to X$ يسمى $m\times n$ مصفوفة أو مصفوفة مرتبتها $m\times n$ أو مصفوفة من الشكل (m,n) وذلك من المجموعة X.

إذا رمزنا للصورة المباشرة للثنائية (i,j) وفق التطبيق f بالرمز a_{ij}، وذلك من أجل أي عنصر (i,j) من الجداء $E\times F$ فإن العناصر التالية:

$a_{11}, a_{12},..., a_{1n}, a_{21}, a_{22},..., a_{2n},..., a_{m1}, a_{m2},..., a_{mn}$ تعين تماماً التطبيق f .

لنرتب العناصر $f(E\times F)$ في m من الصفوف و n من الأعمدة بحيث يقع العنصر a_{ij}

في الصف الذي رقمه (i) والعمود الذي رقمه (j) كالتالي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{bmatrix}; (1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n) \qquad (1-2)$$

أو اختصاراً :

$$A=[a_{ij}]_{(m.n)} \qquad (2-2)$$

وتسمى بالمصفوفة $m\times n$ أو المصفوفة من المرتبة (m,n) ونرمز لها بأحرف كبيرة مثل $A,B,C,...$ وتسمى المصفوفة المكونة من صف واحد و n عمود بالمصفوفة الصفية (أو مصفوفة الصف) وهي من المرتبة $(1,n)$

وتسمى المصفوفة المكونة من m صف وعمود واحد **بمصفوفة العمود** وهي من المرتبة $(m,1)$

وفي حالة تساوي عدد الأعمدة مع عدد الصفوف $(m=n)$ فإنها تسمى **بالمصفوفة المربعة** أو نقول من المرتبة n مثلاً ، كما تسمى العناصر $(i=1,2,...,n)$ a_{ii} فيها **بالقطر الرئيسي** .

ملاحظة(1): في الحالة العامة ليس من الضروري أن تكون عناصر المصفوفة أعداداً فربما تكون دوال أو كثيرات حدود أو... ، وسنهتم في دراستنا بالمصفوفات التي عناصرها أعداد، وبهذا نقول لدينا مصفوفة A معرفة على حقل الأعداد الحقيقية أو العقدية.

ملاحظة(2): يمكن تعريف المصفوفة على أنها جدول مؤلف من مجموعة عناصر مرتبة بشكل صفوف عددها m وأعمدة عددها n.

أمثلة:

-1

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}2 & 4 & 0 & 1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -5\\ 3\end{bmatrix}$$

المصفوفة A مؤلفة من ثلاثة صفوف وعمودين فهي من الشكل $(3,2)$، والمصفوفة B مؤلفة من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة فهي من الشكل $(3,3)$، والمصفوفة C مؤلفة من صف واحد وأربعة أعمدة وتسمى بمصفوفة الصف فهي من الشكل $(1,4)$، والمصفوفة D مؤلفة من عمود واحد وأربعة صفوف وتسمى بمصفوفة العمود فهي من الشكل $(4,1)$.

-2

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

المصفوفة A في هذا المثال فيها $(m=n)$ أي مربعة من المرتبة $(3,3)$ أو اختصاراً من المرتبة 3، كما نلاحظ أن هذه المصفوفة والمصفوفة B من المثال السابق لهما نفس المرتبة $(3,3)$ (كل منهما تحوي عدداً من الصفوف يساوي 3 وعدداً من الأعمدة يساوي 3).

3-

$$A=\begin{bmatrix} 1+i \\ 4i \\ -5+2i \\ 3i \end{bmatrix}$$

المصفوفة A من المرتبة $(4,1)$ وعلى حقل الأعداد العقدية C وهي مصفوفة عمود.

ملاحظة(3): سنرمز لجملة المصفوفات من المرتبة (m,n) وعلى حقل الأعداد K بالرمز $M_{(m,n)}(K)$.

من خلال الأمثلة السابقة في المثال (1): $A\in M_{(3,2)}(R)$ ، $B\in M_{(3,3)}(R)$ ، $C\in M_{(1,4)}(R)$ $D\in M_{(4,1)}(R)$. في المثال (3): $A\in M_{(4,1)}(C)$.

2-2 تساوي مصفوفتين: نقول عن مصفوفتين $A=[a_{ij}]_{(m.n)}$ ، $B=[b_{ij}]_{(p.q)}$ إنهما متساويتان ونكتب $A=B$ إذا تساوت كل العناصر المتقابلة في المصفوفتين، وبكلام آخر إذا كان:

1- من مرتبة واحدة اي $m=p$ ، $n=q$.

2- العناصر المتقابلة في المصفوفتين متساوية أي: $a_{ij}=b_{ij};(1\le j\le n,1\le i\le m)$.

ونكتب اختصاراً : $A=B\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij};\forall i,j(1\le j\le n,1\le i\le m)$

أمثلة:

1- إذا كان:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

فإن: $a_{11}=-7$ ، $a_{12}=0$ ، $a_{21}=3$ ، $a_{22}=4$.

2- عين قيمة λ لتكون المصفوفتان:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} \lambda^2-\lambda & 2 \\ \lambda & 3 \\ 5 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

على حقل الأعداد الحقيقية R متساويتين.

بما أن المصفوفتين من مرتبة واحدة $(3,2)$ لذلك نكتفي بتحقق شرط تساوي العناصر المتقابلة:

$$\lambda^2-\lambda=2 \Rightarrow \lambda^2-\lambda-2=0$$

ومنه:

$\lambda=2$, $\lambda=-1$ ، وبالتالي فإن $\lambda=-1$.

3-2 منقول مصفوفة: إن منقول مصفوفة $A=[a_{ij}]_{(m.n)}$ هو مصفوفة جديدة ناتجة من جعل الصفوف أعمدة (أو الأعمدة صفوفاً) ونرمز لها بالرمز A^T ونعرفها بالشكل التالي:

$$A^T=[a_{ji}]_{(n.m)} \qquad (3-2)$$

(أي إذا كانت المصفوفة A من المرتبة (m,n) فإن منقولها من المرتبة (n,m)).

ملاحظة(4): لا يؤثر منقول مصفوفة في قيمة المحدد بمعنى أن: $|A|=|A^T|$ وذلك للمصفوفات المربعة(كما سيمر لاحقاً).

مثال:

أوجد منقول المصفوفة A على حقل الأعداد العقدية:

$$A=\begin{bmatrix} 1+i & -3i \\ 5-i & 5 \\ 6+i & i \\ 3i+1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix} 1+i & 5-i & 6+i & 3i+1 \\ -3i & 5 & i & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظة(5): من تعريف منقول مصفوفة نلاحظ أن:

1) $(A^T)^T=A$

2) $(A\pm B)^T=A^T\pm B^T ; A,B\in M_{(m,n)}(K)$

3) $(\alpha A)^T=\alpha A^T ; \alpha\in K$

4) $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T ; A\in M_{(m,n)}(K), B\in M_{(n,p)}(K)$

مثال:

إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} , \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

فأوجد $(A+B)^T, A+B, B^T, A^T$

الحل:

$$A+B=\begin{bmatrix}1&5&2\\4&1&2\\4&5&4\end{bmatrix},\ (A+B)^T=\begin{bmatrix}1&4&4\\5&1&5\\2&2&4\end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}2&2&1\\3&2&2\\1&1&1\end{bmatrix},\ B^T=\begin{bmatrix}-1&2&3\\2&-1&3\\1&1&3\end{bmatrix}$$

2-4 المصفوفات الخاصة:

2-4-1 تعريف الأعداد العقدية المترافقة وخواصها:

١) إذا كان a و b عددين حقيقين وكان $i=\sqrt{-1}$ فإن $z=a+bi$ يسمى عدداً عقدياً . ويسمى العددان العقديان $a+bi$ و$a-bi$ عددين مترافقين ، كل منهما مرافق للآخر.

٢) إذا كان $z_1=a+bi$ و $z_2=\overline{z_1}=a-bi$ فإنه يكون $\overline{z_2}=\overline{\overline{z_1}}=\overline{a-bi}=a+bi$

(مرافق المرافق لعدد z هو العدد z نفسه).

٣) إذا كان $z_1=a+bi$ و $z_2=c+di$ فإنه يكون:

$$\overline{z_1+z_2}=(a+c)-(b+d)i=(a-bi)+(c-di)=\overline{z_1}+\overline{z_2}\text{ ، }z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$$

(المرافق لمجموع عددين عقديين هو مجموع مرافقي هذين العددين)

$$z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i\Rightarrow$$

$$\overline{z_1\cdot z_2}=(ac-bd)-(ad+bc)i=(a-bi)+(c-di)=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$$

(المرافق لحاصل جداء عددين مركبين هو حاصل ضرب مرافقيهما)

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}2-i&i&1+i\\5&-i&1+6i\\0&1-i&3\end{bmatrix}\Rightarrow\overline{A}=\begin{bmatrix}2+i&-i&1-i\\5&i&1-6i\\0&1+i&3\end{bmatrix}$$

2-4-2 تعريف مرافق منقول مصفوفة: هو مصفوفة A^* المحققة لـ $A^* = \overline{(A^T)}$.

3-4-2 مصــــفوفات الصف والعمود: إن المصفوفة المؤلفة من m صفاً وعموداً واحداً $(m,1)$

تسمى مصفوفة عمود كالمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots\dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \qquad (4-2)$$

أما المصفوفة المؤلفة من n عموداً وصفاً واحداً $(1,n)$ تسمى بمصفوفة الصف كالمصفوفة:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots\dots & b_{1n} \end{bmatrix} \qquad (5-2)$$

ملاحظة(6): تسمى هذه المصفوفات بمتجهات العمود أو الصف.

4-4-2 المصــــفوفة الصفرية: تكون جميع عناصرها أصفاراً (صفر الحقل K) ونرمز لها بالرمز :

$a_{ij} = 0; (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ أو $O_{m,n} \qquad (6-2)$.

ومن أهم خصائصها:

$$A_{m,n} + O_{m,n} = A_{m,n} \Leftrightarrow A - A = 0 \text{ ، } O_{m,n} \times A_{n,1} = O_{m,1} \text{ ، } A_{m,1} \times O_{1,n} = O_{m,n}$$

مثال:

$$O_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \ O_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5-4-2 المصــفوفة المربعــة: إذا كـان $(m = n)$ في المصـفوفة $A = [a_{ij}]$ فتسـمى المصـفوفة بالمربعـة ونقـول إنهـا مـن

المرتبة n بدلاً من (n,n) .وتسمى $A = [a_{ij}]$ بالمصفوفة المستطيلة إذا كان $(m \ne n)$.

6-4-2 المصفوفة القطرية: تكون المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]_{(n.n)}$ قطرية إذا كان:

$(a_{ij} = 0; i \ne j)$.أي أن جميع عناصر المصفوفة أصفاراً ماعدا عناصر قطرها الرئيسي وهي: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$

أي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (7-2)$$

واختصاراً نكتب:

$$A= diag[a_{11}, a_{22}, a_{33},..., a_{nn}]$$

2-4-7 المصفوفة السلمية: هي مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي متساوية وتساوي $\lambda \in K$ وبقية العناصر معدومة ونكتبها على النحو التالي:

$$A=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (8-2)$$

واختصاراً نكتب:

$$A=[a_{ij}]; a_{ij}=\begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ \lambda & ; \quad i=j \end{cases} \quad (9-2)$$

2-4-8 المصفوفة المتناظرة: تكون المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(n.n)}$ متناظرة إذا كان:

$(a_{ij}=a_{ji}; \forall i, j)$ وذلك من أجل جميع قيم $(i, j=1,2,...,n)$ أي إذا كان $A= A^T$.

إن المصفوفة المتناظرة هي مصفوفة مربعة لأنها تحقق: $(a_{ij}=a_{ji}; \forall i, j=1,2,...,n)$

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & g \end{bmatrix} , \quad B=\begin{bmatrix} 1+i & 4i & 2-i \\ 4i & -3 & -6i \\ 2-i & -6i & 1+2i \end{bmatrix}$$

كل من A و B متناظرة.

2-4-9 المصفوفة المتخالفة (ذات التناظر العكسي): تكون المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(n.n)}$ متخالفة إذا كان: $(a_{ij}=-a_{ji}; \forall i, j=1,2,...,n)$ ، (أي إذا كان: $A= -A^T$).
عندما يكون $i=j$ فإن ($a_{ii}=0; \forall i$) وذلك لأن:

$$a_{ii}=-a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii}=0 \Rightarrow a_{ii}=0; \forall i$$

أي أن عناصر القطر الرئيسي فيها يجب أن تكون أصفاراً.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 4i & 2-i \\ -4i & 0 & -6i \\ -2+i & 6i & 0 \end{bmatrix}$$

كل من A و B متخالفة.

2-4-10 المصفوفة المثلثية العليا(السفلى): إذا كانت جميع العناصر $(a_{ij}=0; i>j)$ ،أي إذا كانت جميع العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي معدومة (إذا كانت جميع العناصر $(a_{ij}=0; i<j)$ أي إذا كانت جميع العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي معدومة).

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

A عليا و B سفلى.

ملاحظة(7): لمعرفة المصفوفة شاذة أو غير شاذة يجب أن يكون قيمة محددها غير معدوم (سوف نعرف محدد المصفوفة لاحقاً).

مثال:

بفرض لدينا المصفوفة المثلثية:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

بما أن A مصفوفة مثلثية فإن محددها عبارة عن جداء عناصر قطرها الرئيسي:

$$|A|=5\cdot 6\cdot 7=210\neq 0$$

وبالتالي المصفوفة A ليست شاذة لأن محددها مخالفاً للصفر أي $|A|\neq 0$.

2-4-11 المصفوفة الواحدية: هي مصفوفة سلمية عناصر قطرها الرئيسي تساوي الواحد والعناصر غير القطرية تكون أصفاراً ونرمز لها بالرمز I_n .

واختصاراً نكتب:

$$A = [a_{ij}]; a_{ij} = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases} \qquad (10-2)$$

مثال:

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_1 = [1] = 1$$

الخاصة الهامة للمصفوفة الواحدية هي: $I_{n,n} \times A_{n,m} = A_{n,m} \times I_{m,m} = A_{n,m}$

2-4-12 المصفوفة المرافقة لمصفوفة: هي مصفوفة عناصرها هي العناصر المرافقة لعناصر المصفوفة العقدية A ونرمز لها بالرمز $\overline{A}$.

2-4-13 المصفوفة الهرميتية: تكون المصفوفة العقدية هرميتية إذا كان:

$$A = A^* = \overline{(A^T)} \qquad (11-2)$$

أي المصفوفة الهرميتية هي مصفوفة مربعة بحيث: $(a_{ij} = \overline{a_{ji}}; i, j = 1,2,...,n)$.

ملاحظة(8): بما أن $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ عندما $i = j$ فإنه يجب أن تكون $a_{ii} \in R; \forall i$ (أي عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة الهرميتية يجب أن تكون أعداداً حقيقية دوماً).

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2-3i & 3+4i \\ 2+3i & 0 & 4-5i \\ 3-4i & 4+5i & 3 \end{bmatrix}$$

A هرميتية: $A = A^* = \overline{(A^T)}$.

2-4-14 المصفوفة الهرميتية المتخالفة: تكون المصفوفة العقدية هرميتية متخالفة إذا كان :

$$A = -A^* = -\overline{(A^T)} \qquad (12-2)$$

أي المصفوفة الهرميتية المتخالفة هي مصفوفة مربعة بحيث: $(a_{ij} = -\overline{a_{ji}}; i, j = 1,2,...,n)$.

ملاحظة(9): بما أن $a_{ij}=-\overline{a_{ji}}$ عندما $i=j$ فإنه يجب أن تكون عناصر القطر الرئيسي

في المصفوفة الهرميتية المتخالفة أعداداً تخيلية بحتة أو أصفاراً.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 3i & 3+4i & 4-5i \\ -3+4i & -4i & 5+6i \\ -4-5i & -5+6i & 0 \end{bmatrix} \ , \ B=\begin{bmatrix} \frac{3}{2}i & \frac{3}{2}+2i & 2-\frac{5}{2}i \\ -\frac{3}{2}+2i & -2i & \frac{5}{2}+3i \\ -2-\frac{5}{2}i & -\frac{5}{2}+3i & 0 \end{bmatrix}$$

كل من A و B هرميتية متخالفة: $A=-A^*=-\overline{(A^T)} \ , \ B=-B^*=-\overline{(B^T)}$.

ملاحظة(10): المصفوفة الهرميتية الحقيقية هي مصفوفة متناظرة والمصفوفة الهرميتية المتخالفة الحقيقية هي متناظرة متخالفة.

ملاحظة(11): المصفوفة الهرميتية الحقيقية هي مصفوفة متناظرة والمصفوفة الهرميتية المتخالفة الحقيقية هي متناظرة متخالفة.

ملاحظة(12): كل عدد حقيقي أو عقدي يمكن النظر إليه كمصفوفة من الشكل $(1,1)$ ونكتب $A=[a_{11}]$ نسميها المصفوفة وحيدة العنصر.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & -7 \end{bmatrix} \ , \ B=\begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ , \ C=\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \ , \ D=\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 7 & 0 & 8 \\ 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A مربعة ومثلثية سفلى- المصفوفة B مثلثية عليا- المصفوفة C سلمية - المصفوفة D متناظرة.

$$E=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -8 \\ -5 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \ F=\begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & -5 \end{bmatrix}, \ G=\begin{bmatrix} i & 1-i \\ -1-i & 0 \end{bmatrix}, \ I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة E متناظرة متخالفة – المصفوفة F هرميتية – المصفوفة G هرميتية متخالفة – المصفوفة I أو (I_3) واحدية.

2-4-15 المصفوفة شبه القطرية: نسمي المصفوفة المربعة المجزأة A والتي ينطبق قطرها الرئيسي على الأقطار الرئيسية لعدد من المصفوفات المربعة الجزئية $A_1 A_2,...,A_k$ المصفوفة شبه القطرية حيث $A_1 A_2,...,A_k$ مصفوفات جزئية مربعة متساوية الدرجة وباقي عناصر المصفوفة A عبارة عن أصفار.

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & A_k \end{bmatrix}$$

مثال:

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة A شبه قطرية حيث عناصر قطرها الرئيسي ينطبق على الأقطار الرئيسية للمصفوفات المربعة الجزئية :

$$A_1=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \ , \ A_2=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \ , \ A_3=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

2-5 مقلوب مصفوفة: وهي مصفوفة تنتج من المصفوفة A ونرمز لها بالرمز A^{-1} ، والمصفوفة المستطيلة يكون لها مقلوبان من اليمين وتحقق العلاقة:

$$A_{m,n} \times A_{n,m}^{-1} = I_{m,m} \qquad (13-2)$$

ومن اليسار وتحقق العلاقة:

$$A_{n,m}^{-1} \times A_{m,n} = I_{n,n} \qquad (14-2)$$

وبالتالي إذا كانت المصفوفة مربعة $(m=n)$ فإن للمصفوفة مقلوباً واحداً هو: $A_{n,n}^{-1}$ يحقق العلاقة:

$$A_{n,n} \times A_{n,n}^{-1} = A_{n,n}^{-1} \times A_{n,n} = I_{n,n} \qquad (15-2)$$

الذي يجب ذكره هو أن وجود المقلوب يرتبط بشروط سنذكرها لاحقا ، أما بالنسبة للمصفوفة المربعة فإن الشرط هو $|A| \neq 0$ (محدد A لا يساوي الصفر) أي إن **المصفوفة** A **نظامية** (غير شاذة). وإذا كان $|A| = 0$ فإن A ليس لها مقلوب وتكون A **مصفوفة شاذة** (أو فريدة).

2-5-1 مبرهنة: إذا كان للمصفوفة المربعة A مقلوب فهذا المقلوب وحيد ويرمز له بالرمز A^{-1} بحيث يكون:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \qquad (16-2)$$

الإثبات:

لنفرض أن B و C مقلوبا المصفوفة المربعة A هذا يعني :

$$A.B = B.A = I$$
$$A.C = C.A = I$$

لكن:

$$C.AB = C.(AB) = C.I = C$$
$$C.AB = (C.A).B = I.B = B$$

بالمقارنة نجد: $B = C$ ، مما يعني أن للمصفوفة المربعة مقلوب وحيد إن وجد (في حال كان $|A| \neq 0$).

2-6 خصائص المصفوفات القطرية والمثلثية:

1- إذا كانت A و B مصفوفتين قطريتين لهما نفس المرتبة فإن:

$AB, BA, A-B, A+B$ هي مصفوفات قطرية ، كذلك فإن A^{-1} تكون موجودة إذا كانت عناصر القطر خالية من الأصفار تماماً ، وتكون A^{-1} قطرية وعناصر قطرها مقلوبات العناصر المتناظرة للمصفوفة A .

مثال:

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

إن:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

2- إذا كانت A و B مصفوفتين مثلثيتين عليا(سفلى) لهما نفس المرتبة عندئذٍ تكون المصفوفات:

$AB, BA, A-B, A+B$ مصفوفات مثلثية ، كذلك فإن A^{-1} تكون موجودة إذا كانت عناصر القطر خالية من الأصفار تماماً وتكون A^{-1} قطرية وعناصر قطرها هي مقلوبات العناصر المتناظرة للمصفوفة A .

مثال:

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

إن:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 4 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

3- إذا كانت A مصفوفة قطرية أو مثلثية (عليا أو سفلى) فإن محدد المصفوفة A هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي أي أن : $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

2-7 المجموع المباشر:

إذا كان $A_1, A_2, ..., A_s$ مصفوفات مربعة مرتبة كل منها على الترتيب $m_1, m_2, ..., m_s$ فإن المصفوفة القطرية:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & A_s \end{bmatrix} = diag(A_1, A_2, ..., A_s) \qquad (17-2)$$

تسمى المجموع المباشر للمصفوفة A_i

مثال:

إذا كانت:

$$A_1=[2]\ ,\ A_2=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\ ,\ A_3=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&0&3\\4&1&-2\end{bmatrix}$$

مصفوفات ، فأوجد المجموع المباشر للمصفوفات A_1,A_2,A_3

الحل:

$$diag(A_1,A_2,A_3)=\begin{bmatrix}2&0&0&0&0&0\\0&1&2&0&0&0\\0&3&4&0&0&0\\0&0&0&1&2&-1\\0&0&0&2&0&3\\0&0&0&4&1&-2\end{bmatrix}$$

ملاحظة(١٣): إذا كانت $A=diag(A_1,A_2,...,A_n),B=diag(B_1,B_2,...,B_n)$ حيث A_i و B_i من مرتبة واحدة لقيم $(i=1,2,...,s)$ فإن:

$$AB=diag(A_1B_1,A_2B_2,...,A_sB_s)\qquad(18-2)$$

2-8 العمليات على المصفوفات:

1- جمع وطرح المصفوفات:

إذا كانت المصفوفتان: $A=[a_{ij}]$ ، $B=[b_{ij}]$ على حقل واحد K ومن مرتبة واحدة (m,n) فإن:

$$\left.\begin{aligned}C=[c_{ij}]=A_{m,n}+B_{m,n};c_{ij}=a_{ij}+b_{ij};\forall i,j\\D=[d_{ij}]=A_{m,n}-B_{m,n};d_{ij}=a_{ij}-b_{ij};\forall i,j\end{aligned}\right\}\qquad(19-2)$$

مثال:

إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}2&3&5\\4&0&7\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}5&7&2\\6&1&1\end{bmatrix}$$

فأوجد $A+B\ ,\ A-B$

الحل:

$$C=A+B=\begin{bmatrix}7&10&7\\10&1&8\end{bmatrix}\ ,\ D=A-B=\begin{bmatrix}-3&-4&3\\-2&-1&6\end{bmatrix}$$

ملاحظة(14): إن عملية جمع المصفوفات على الجملة $M_{(m,n)}(K)$ هي عملية داخلية تتصف بما يلي:

1) المصفوفة الصفرية $0_{m,n}$ عنصر حيادي بالنسبة للجمع: $0+A=A+0=A$.

2) عملية الجمع تجميعية: $(A+B)+C=A+(B+C)$.

3) لكل مصفوفة نظير بالنسبة للجمع هو $(-A)$ حيث: $A+(-A)=(-A)+A=0$.

4) عملية الجمع تبديلية: $A+B=B+A$.

ومنه فإن الجملة $M_{(m,n)}(K)$ تشكل زمرة تبديلية بالنسبة لعملية جمع المصفوفات.

كذلك إذا كانت $\forall \lambda,\mu \in K \ \& \ A,B \in M_{(m,n)}(K)$ فإن:

5) $(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda A+\mu A$

6) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

لنثبت صحة (6) :

$$\lambda(A+B)=[\lambda(a_{ij}+b_{ij})]=[\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij})]=[\lambda a_{ij}]+[\lambda b_{ij}]=\lambda[a_{ij}]+\lambda[b_{ij}]=\lambda A+\lambda B$$

2- ضرب المصفوفات:

لتكن $A=[a_{ij}]\in M_{n,m}(K)$ ، $B=[b_{ij}]\in M_{m,l}(K)$ مصفوفتين ، نعرف جداء المصفوفتين A,B بأنه مصفوفة جديدة C معرفة بالشكل التالي:

$$C=A\cdot B=[c_{ij}]\in M_{n,l}(K) \qquad (20-2)$$

وعناصر المصفوفة C معرفة كما يلي:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\cdot b_{kj};\forall i,j \qquad (21-2)$$

أي أن كل عنصر c_{ij} من عناصر مصفوفة الجداء يساوي مجموع جداءات العناصر الواقعة في الصف i من المصفوفة A بعناصر العمود j من المصفوفة B.

أي أنه لإجراء عملية الضرب ، يجب أن يكون عدد أعمدة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B ونقول إن B قابلة للضرب في A من اليسار(أي لحاصل ضرب مصفوفتين يجب أن تكون المصفوفتان متوافقتين بالنسبة لعملية الضرب).

مثال:

لتكن لدينا:

$$A=\begin{bmatrix}-2&1&4\\1&2&3\\0&1&-1\end{bmatrix}\;,\quad B=\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}$$

والمطلوب: إيجاد $C=A\cdot B$

الحل:

$$C=C_{31}=A_{33}\cdot B_{31}=\begin{bmatrix}(-2)(1)+1(-1)+4(-2)\\1(1)+2(-1)+3(-2)\\0(1)+1(-1)+(-1)(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}\\c_{21}\\c_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11\\-7\\1\end{bmatrix}$$

حيث:

$$c_{11}=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}b_{k1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=(-2)(1)+1(-1)+4(-2)=-11$$

وبشكل مشابه بالنسبة لـ c_{21} ، c_{31} .

ملاحظة(15): عملية الضرب في المصفوفات غير تبديلية.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}2&1&3\end{bmatrix}\;,\quad B=\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix}$$

إن:

$$A\cdot B=2(1)+1(4)+3(3)=15$$

لكن:

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}2&1&3\\8&4&12\\6&3&9\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن: $A\cdot B\neq B\cdot A$

2-9 قوانين هامة:

1) $A(B+C)=AB+AC$

2) $(A+B)C=AC+BC$

3) $A(BC)=(AB)C=ABC$

4) $AB\neq BA$ (بشكل عام)

5) $kA=[ka_{ij}]$ (k ثابت)

6) $k(A\pm B)=kA\pm kB$

7) $(k_1\pm k_2)A=k_1A\pm k_2A$

8) $(k_1k_2)A=k_1(k_2A)$

9) $I\cdot A=A\cdot I=A$

10) $0\cdot A=A\cdot 0=0$

لنثبت صحة (1):

بفرض: $A=[a_{ij}]_{n,m} \quad , \quad B=[b_{ij}]_{m,l} \quad , \quad C=[c_{ij}]_{m,l}$

فإن: $(B+C)_{m,l}=[b_{ij}+c_{ij}]_{m,l}$

$$A(B+C)=\left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}(b_{kl}+c_{kl})\right]=\left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}+\sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kl}\right]=$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}\right]+\left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kl}\right]=AB+AC$$

وبشكل مشابه يمكن إثبات بقية القوانين.

ملاحظة(16): إذا كان $AB=0$ فهذا لا يعني أن أي من المصفوفتين A أو B يجب أن تكون مصفوفة صفرية (جداء مصفوفتين يمكن أن يساوي المصفوفة الصفرية دون أن يكون أي منهما مصفوفة صفرية).

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix} \ , \ B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 4\\ -4 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

الحل:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2+6-8 & 4-2-2 & -2+8-6\\ 1+3-4 & 2-1-1 & -1+4-3\\ 3+9-12 & 6-3-3 & -3+12-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=0$$

ملاحظة(17): يمكن التحقق من صحة عملية الضرب إذا أخذنا الترتيب التالي لمجموع الصفوف ومجموع الأعمدة.

مثال:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\ 4 & 2 & 5\end{bmatrix}_{(2,3)}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ 3 & 3\end{bmatrix}_{(3,2)}=\begin{bmatrix}13 & 14\\ 25 & 23\end{bmatrix}_{(2,2)}$$

					B	+
				2	1	3
				1	2	3
				3	3	6
A	2	3	2	13	14	27
	4	2	5	25	23	48

التحقق من صحة حاصل الضرب بواسطة جمع الصفوف:

$$3(2)+3(3)+6(2)=27$$
$$3(4)+3(2)+6(5)=48$$

				B	
				2	1
				1	2
				3	3
	2	3	2	13	14
A	4	2	5	25	23
	6	5	7	38	37

التحقق من صحة حاصل الضرب بواسطة جمع الأعمدة:

$$6(2)+5(1)+7(3)=38$$
$$6(1)+5(2)+7(3)=37$$

3- **قسمة المصفوفات:** إن العملية $\frac{A}{B}$ غير موجودة ولكن إذا كانت B^{-1} موجودة فإن العملية AB^{-1} أو $B^{-1}A$ هي المعرفة في المصفوفات وعليه فإن كان المطلوب حل المعادلة $AX=B$ في المتغير x فإنه إذا كانت A^{-1} موجودة فإن $X=A^{-1}\cdot B$.

4- **تجزئة المصفوفات للعمليات المختلفة:** يمكن تقسيم أو تجزئة المصفوفة إذا كانت مرتبتها كبيرة وذلك إلى مصفوفات جزئية ، ويمكن استخدام هذه التجزئة في العمليات المختلفة على المصفوفات.

أمثلة:

-1

$$A=[a_{ij}]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c:c} A_1 & A_2 \\ \hdashline A_{21} & A_{22}\end{array}\right]$$

وأيضاً:

$$B=[b_{ij}]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22}\end{array}\right]$$

مثلاً عملية الجمع تتم بالشكل:

$$\left[\begin{array}{c:c} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ \hdashline A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22}\end{array}\right]$$

وعملية الضرب كالتالي:

$$A\cdot B=\left[\begin{array}{c:c} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ \hdashline A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{array}\right]$$

2- لنأخذ المصفوفة التالية:

$$A=\left[\begin{array}{ccc:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{array}\right]$$

من خلال التقسيم حصلنا على المصفوفات الجزئية التالية:

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

حيث:

$$A_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, A_{12}=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}, A_{13}=\begin{bmatrix} a_{16} \\ a_{26} \end{bmatrix}$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}, A_{22}=\begin{bmatrix} a_{34} & a_{35} \\ a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}, A_{23}=\begin{bmatrix} a_{36} \\ a_{46} \end{bmatrix}$$

3- احسب الجداء $A\cdot B$ وذلك بتجزئة كل منهما حيث:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \ , \ B=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ \hdashline 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{cc} 4 & 1 \\ 1 & 5 \\ \hdashline -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1B_{11}+A_2B_{21} \\ A_{21}B_{21}+A_{22}B_{21} \end{bmatrix}$$

$$A_1B_{11}+A_2B_{21}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 35 \\ 1 & 19 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{21}+A_{22}B_{21}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}8 & 35\\ 1 & 19\\ 13 & 14\end{bmatrix}$$

4- احسب الجداء $A\cdot B$ وذلك بتجزئة كل منهما حيث:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

الحل:

$$B=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 2\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3 & 3\\ 7 & 5 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3 & 3\\ 7 & 5 & 5\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}3 & 4 & 2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3 & 3 & 0\\ 7 & 5 & 5 & 0\\ 3 & 4 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

2-10 تعريف المحدد من المرتبة الثانية:

بفرض لدينا المصفوفة من المرتبة الثانية:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \qquad (22-2)$$

يعرف محدد هذه المصفوفة من المرتبة 2×2 على أنه القيمة العددية التالية:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21} \qquad (23-2)$$

أي أن محدد مصفوفة من المرتبة الثانية يساوي حاصل جداء عنصرا قطرها الرئيسي مطروحاً منه حاصل جداء عنصري قطرها الثانوي.

2-11 فك المحدد عن طريق العوامل:

2-11-1 المتمم الجبري (عامل عنصر): بفرض A مصفوفة مربعة من المرتبة n ، نسمي صغير العنصر a_{ij}

مضروباً بالإشارة $(-1)^{i+j}$ بالمتمم الجبري للعنصر a_{ij} ونرمز له بالرمز A_{ij} ويكون :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij} \qquad (24-2)$$

مثال:

بفرض لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

إن صغير العنصر 4 هو $0 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = \Delta_{12}$ وعدد هذه الصغائر تسعة ذات المرتبة 2×2

والمتمم الجبري (عامل العنصر) هو $A_{12} = (-1)^{1+2}\Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$.

ملاحظة(18): بفرض أن A و B مصفوفتان مربعتان من المرتبة n وأن هاتين المصفوفتين تختلفان فقط في عناصر الصف الذي رقمه i وفيما عدا ذلك فهما متماثلتان عندئذٍ : تكون المتممات الجبرية لعناصر هذا الصف واحدة في هاتين المصفوفتين.

2-12 المحدد من المرتبة الثالثة:

بفرض لدينا المصفوفة المربعة من الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (25-2)$$

إن محدد المصفوفة يكتب بالشكل التالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (26-2)$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$$

وتسمى طريقة لابلاس أي نشر المحدد من المرتبة الثالثة بدلالة ثلاثة محددات من المرتبة الثانية.

أو حسب طريقة ساروس لحساب قيمة محدد من المرتبة الثالثة بالشكل التالي:

نضيف العمودين الأول والثاني من المصفوفة إلى يمين المحدد ثم نقوم بجمع جداءات عناصر أقطارها الرئيسية مطروحاً منه مجموع جداءات عناصر أقطارها الثانوية.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (27-2)$$

$$|A|=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-(a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}+a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}+a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31})$$

كما نلاحظ فإن هذه الطريقة تطبق على المحددات من المرتبة 3 .

2-13 تعريف محدد أي مصفوفة من أي مرتبة n .

محدد المصفوفة المربعة $A=[a_{ij}]$ **من المرتبة** $n\times n$ يتم حسابه وفق أي صف أو **أي** عمود نختاره وذلك بضرب كل عنصر من عناصر هذا الصف (أو العمود) في متممه الجبري (عامله) ثم جمع حواصل الضرب.

1- من الصف i $\quad |A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}$

2- من العمود j $\quad |A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}$

مثال:

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

لنحسب قيمة محدد هذه المصفوفة وذلك بحسب عناصر الصف الأول:

$$|A|=(1)A_1+3A_2+(-1)A_3=1(-4)+3(8)+(-1)(2)=18$$

ملاحظة(19): عند فك المحدد تؤخذ قاعدة الإشارات في الاعتبار عند أخذ قيمة العنصر وهي القاعدة التي تحل محل $(-1)^{i+j}$ الموجودة في تعريف المتمم الجبري (العامل).

مثال:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 6 + 6 + 4 = 16$$

يمكن اختيار الصف (أو العمود) الذي يحوي أكبر عدد من الأصفار وذلك لسهولة الحساب

2-14 خواص المحددات:

1- إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n وكان عناصر أحد صفوف (أو أعمدة) المصفوفة أصفاراً ، فإن قيمة محددها تكون صفراً .

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

2- إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n و B مصفوفة مربعة ناتجة عن المصفوفة A بتبديل وضعي صفين (أو عمودين) مع المحافظة على باقي الصفوف (الأعمدة) فإن:

$$|A| = -|B| \quad \text{أو} \quad \det A = -\det B \qquad (28-2)$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 17, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = -17$$

3- إذا حوت المصفوفة المربعة A من المرتبة n صفين (عمودين) متساويين أو متناسبين فإن محدد هذه المصفوفة يساوي الصفر.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

4- إذا ضربنا جميع عناصر أحد الصفوف (أحد الأعمدة) في مصفوفة مربعة من المرتبة n بعدد ثابت λ فإن محدد المصفوفة الناتجة يساوي إلى محدد المصفوفة الأصلية A مضروباً بالعدد الثابت λ .

الإثبات:

$$A=\begin{bmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda a_{11})(a_{22})-(\lambda a_{12})(a_{21})=\lambda(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=\lambda|A| \qquad (29-2)$$

حيث: $A=[a_{ij}]_{(2,2)}$.ويمكن البرهان على ذلك من أجل أي مرتبة n .

مثال:

$$\begin{vmatrix}6 & 0 & 2\\ 4 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3 & 0 & 1\\ 4 & 2 & -1\\ -1 & \underbrace{3}_{=35} & 2\end{vmatrix}=70=\begin{vmatrix}6 & 0 & 1\\ 8 & 2 & -1\\ -2 & 3 & 2\end{vmatrix}$$

5- إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n فإن مجموع جداءات عناصر أحد الصفوف (الأعمدة) بالمتممات الجبرية لعناصر صف آخر (عمود آخر) يساوي الصفر.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=-5$$

إذا أخذنا جداءات عناصر الصف الأول بالمتممات الجبرية لعناصر الصف الثاني نجد:

$$2(-1)(3)+1(7)+1(-1)=0$$

6- إن :

$$|\lambda A|=\lambda^{n}|A| \qquad (30-2)$$

حيث n مرتبة المصفوفة A .

مثال:

$$\begin{vmatrix}6 & 0 & 2\\ 8 & 4 & -2\\ -2 & 6 & 2\end{vmatrix}=(2)^{3}\begin{vmatrix}3 & 0 & 1\\ 4 & 2 & -1\\ -1 & \underbrace{3}_{=35} & 2\end{vmatrix}=280$$

7- لا تتغير قيمة محدد مصفوفة مربعة A من المرتبة n إذا أضفنا إلى عناصر أحد صفوفها العناصر المقابلة لها من صف آخر بعد ضربه بعدد ثابت.

مثال:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ (2)(1)+2 & (2)(0)+3 & (2)(1)+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

ملاحظة(20): يمكن حساب محدد من خلال طريقة تحويل جميع عناصر أحد الصفوف (أو الأعمدة) إلى أصفار ما عدا عنصراً واحداً منها(وذلك باستخدام الخاصة 7).

8- إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n فإن محدد منقول مصفوفة يساوي محدد هذه المصفوفة.

$$\det A^T = \det A \quad \text{أو} \quad |A^T| = |A| \qquad (31-2)$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

إن:

$$|A| = 76 \;,\; |A^T| = 76 = |A|$$

9- محدد جداءات المصفوفات: لتكن A, B مصفوفتين مربعتين من المرتبة n فإن:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \qquad (32-2)$$

وتعمم هذه الخاصة على عدد منتهٍ من المصفوفات:

$$|A_1 \cdot A_2, .., A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k| \qquad (33-2)$$

10- إذا كانت جميع عناصر الصف الذي رقمه k في مصفوفة A مربعة من المرتبة n عبارة عن مجموع حدين أي: $a_{kj} = a'_{kj} + a''_{kj};\ j = 1,2,...,n$ فإن محدد هذه المصفوفة يكتب على شكل مجموع محددي مصفوفتين مربعتين A_1 و A_2 حيث عناصر الصف الذي رقمه k في A_1 هي الحدود a'_{kj} من العلاقة السابقة و عناصر الصف الذي رقمه k في A_2 هي الحدود الثانية من العلاقة السابقة a''_{kj} والصفوف الأخرى هي نفسها في المصفوفة A أي:

$$|A| = |A_1| + |A_2| \quad \text{أو} \quad \det A = \det A_1 + \det A_2 \qquad (34-2)$$

مثال:

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 6 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0+6 & 1+3\end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}}_{=|A|}+\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 6 & 3\end{vmatrix}}_{=|A_2|}=-8$$

11- إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة فإن $\frac{d}{dt}|A|$ هو عبارة عن المجموع لـ n من المحددات التي يستبدل فيها كل صف على التوالي بتفاضل هذا الصف.

مثال:

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix}x & 2x\\ e^x & \ln x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ e^x & \ln x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & 2x\\ e^x & \frac{1}{x}\end{vmatrix}=\ln x-2e^x+x\frac{1}{x}-2xe^x$$

ملاحظة(21): إذا كانت كل عناصر المحدد الواقعة على أحد جانبي قطره الرئيسي تساوي الصفر، فإن هذا المحدد يساوي حاصل ضرب العناصر الواقعة على القطر الرئيسي.

أو يمكن القول بأن محدد مصفوفة قطرية من المرتبة n يساوي جداء عناصر قطرها الرئيسي(وهي حالة خاصة من المصفوفة المثلثية) .

الإثبات: لتكن A مصفوفة مثلثية على الشكل:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ . & . & . & \dots & .\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ . & . & . & \dots & .\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{nn}\times\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ . & . & \dots & .\\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)}\end{vmatrix}$$

وذلك بالفك من الصف الأخير.

أيضاً بالفك من الصف الأخير نجد:

$$|A|=a_{nn}a_{(n-1)(n-1)}\times\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ . & . & \dots & .\\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-2)(n-2)}\end{vmatrix}$$

وبتوالي الفك من الصف الأخير نحصل على:

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad (35-2)$$

ملاحظة(22): بنفس الطريقة بالنسبة للمصفوفة المثلثية السفلى فإن العملية تتم مع توالي الفك من الصف الأول دائماً.

2-15 محدد فاندرموند:

هو محدد من الشكل:

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad (36-2)$$

يمكن إثبات أنه $\forall n$ فإن :

$$.d_n = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j) \qquad (37-2)$$

الإثبات: يمكن البرهان بطريقة الاستنتاج الرياضي ، عندما $n = 2$ فإن:

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 \qquad (38-2)$$

وهو محقق. لنفرض أن محدد فاندرموند محقق من أجل $(n-1)$ ولنبرهن من أجل n. من أجل ذلك نقوم بإجراء تحويلات على محدد فاندرموند:

نطرح الصف رقم $(n-1)$ بعد ضربه بـ a_1 من الصف الأخير رقم n ، ثم نطرح من الصف رقم $(n-1)$ الصف رقم $(n-2)$ مضروباً بـ a_1، وهكذا وبشكل مشابه ، وأخيراً طرح الصف الأول من الصف الثاني مضروباً بـ a_1 وبالتالي نحصل على المحدد:

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ . & . & . & . & . \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} \qquad (39-2)$$

وبفك المحدد الأخير بواسطة العمود الأول نحصل على محدد من المرتبة $(n-1)$ مع إخراج العوامل المشتركة من جميع الأعمدة:

$$d_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)..(a_n-a_1).\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2\\ . & . & . & . & .\\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2}\end{vmatrix} \quad (40-2)$$

إن المحدد الاخير من المرتبة $(n-1)$ وبالتالي من الفرض فإن هذا المحدد يساوي:

$$\prod_{2\le j<i\le n}(a_i-a_j) \quad (41-2)$$

ومنه :

$$d_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)..(a_n-a_1)\prod_{2\le j<i\le n}(a_i-a_j)=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j) \quad (42-2)$$

ملاحظة(23): بشكل مشابه فإن المحدد :

$$d'=\begin{vmatrix}a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1}\\ . & . & . & . & .\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2\\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1\end{vmatrix} \quad (43-2)$$

يساوي إلى:

$$d'=\prod_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j) \quad (44-2)$$

2-16 مشتق محدد: بفرض أن عناصر المصفوفة المربعة $A=\left[a_{ij}\right]$ دوال في المتغير x قابلة للاشتقاق أو التفاضل فيكون المشتق $\frac{d}{dx}|A|$ للمحدد $|A|$ بالنسبة للمتغير x يساوي مجموع n محدد تنتج من المحدد $|A|$ بأن نستعيض على التوالي عن عناصر صف (عمود) منه بمشتقات هذه العناصر بالنسبة للمتغير x .

مثال:

أوجد مشتق المحدد:

$$A=\begin{vmatrix}x^2 & x+1 & 3\\ 1 & 2x-1 & x^3\\ 0 & x & -2\end{vmatrix}$$

الحل:

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix}x^2 & x+1 & 3\\ 1 & 2x-1 & x^3\\ 0 & x & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & 1 & 0\\ 1 & 2x-1 & x^3\\ 0 & x & -2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x^2 & x+1 & 3\\ 0 & 2 & 3x^2\\ 0 & x & -2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x^2 & x+1 & 3\\ 1 & 2x-1 & x^3\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

2-17 طرق إيجاد مقلوب مصفوفة مربعة:

2-17-1 تعريف المصفوفة القابلة للقلب: نقول عن المصفوفة المربعة A من المرتبة n أنها قابلة للقلب (أي لها مقلوب) إذا وجدت مصفوفة مثل B تحقق الخاصة:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n \qquad (45-2)$$

نسمي المصفوفة B مقلوب المصفوفة A ونرمز لهل بالرمز A^{-1} .

2-17-2 المقلوب عن طريق المصفوفة الملحقة (المرافقة): نوجد المصفوفة الملحقة "المرافقة" للمصفوفة A ونرمز لها بالرمز $adjA$ وهي عبارة عن منقول المصفوفة التي عناصرها العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة A وهي عبارة عن:

$$adjA = [D_{ij}]^T = [D_{ji}] \qquad (46-2)$$

حيث D_{ij} العامل المرافق للعنصر a_{ij} ، ثم نحسب $\det A$ والذي هو $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{ij}$

بشرط A مصفوفة نظامية (غير شاذة) أي $|A| \neq 0$.

وأخيراً يكون:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA \qquad (47-2)$$

مثال:

احسب $adjA$ حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل:

نحسب أولاً العوامل المرافقة $D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ ثم $[D_{ij}]^T$

$$adjA = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -7 & 4 & -3 \\ 1 & -6 & -5 \\ -1 & -32 & 5 \end{bmatrix}$$

2-17-3 مبرهنة: إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة فإن:

$$A\cdot adjA = adjA\cdot A = \det A\cdot I_n \qquad (48-2)$$

ملاحظة(24): من المبرهنة السابقة نضرب طرفي العلاقة بـ $(\det A)^{-1}$ فنجد:

$$A\cdot[(\det A)^{-1}adjA]=[(\det A)^{-1}adjA]\cdot A = I_n \qquad (49-2)$$

ومنه نستنتج أن $(\det A)^{-1}adjA$ هو نظير المصفوفة A بالنسبة للضرب .

إذن:

$$A^{-1}=(\det A)^{-1}adjA \qquad (50-2)$$.

مثال:

أوجد A^{-1} للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}5 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 6 & -1\end{bmatrix}$$

الحل:

المصفوفة A نظامية (غير شاذة) لأن:

$$\det A=\det\begin{bmatrix}5 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 6 & -1\end{bmatrix}=-38\neq 0$$

وللمصفوفة مقلوب ويساوي $\dfrac{adjA}{|A|}$ (في المثال السابق أوجدنا $adjA$) وبالتالي:

$$A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}=-\frac{1}{38}\begin{bmatrix}-7 & 4 & -3\\ 1 & -6 & -5\\ -1 & -32 & 5\end{bmatrix}$$

ملاحظة(25): إذا كان $\det A=0$ فالمصفوفة تسمى شاذة (فريدة) وليس لها مقلوب.

2-17-4 المقلوب بطريقة الارتكاز: في هذه الطريقة تمد المصفوفة $A=[a_{ij}]$ بالمصفوفة الواحدية I على الشكل $[A\vdots I]$ ثم يتم الحصول على المصفوفة المكافئة للمصفوفة $[A\vdots I]$ على الشكل $[I\vdots B]$ فتكون المصفوفة B هي مقلوب المصفوفة A .

مثال:

أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

الحل:

$$[A\vdots I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

1- نأخذ الصف الأول من المصفوفة $[A\vdots I]$ كصف ارتكاز والعنصر الأول من هذا الصف كعنصر ارتكاز ثم نقسم صف الارتكاز على عنصر الارتكاز نجد:

$$[A\vdots I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

2- نأخذ الصف الثاني من المصفوفة الناتجة كصف ارتكاز والعنصر الثاني منه كعنصر ارتكاز ثم نقسم صف الارتكاز على عنصر الارتكاز نجد:

$$[A\vdots I]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

3- نضرب صف الارتكاز الثاني بـ (-1) ونضيفه إلى الصف الثالث، كذلك نضرب صف الارتكاز الثاني بـ $(-\frac{4}{5})$ ونضيفه للصف الأول فنجد:

$$[A\vdots I]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & \frac{-8}{15} & \frac{1}{5} & \frac{-4}{15} & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{-2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} & 1\end{array}\right]$$

4- بأخذ الصف الثالث كصف ارتكاز والعنصر الثالث منه كعنصر ارتكاز وقسمة الصف على عنصر الارتكاز نجد:

$$[A \vdots I] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-8}{15} & | & \frac{1}{5} & \frac{-4}{15} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & | & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{3} & | & 0 & \frac{-1}{3} & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-8}{15} & | & \frac{1}{5} & \frac{-4}{15} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & | & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$$

5- نضرب صف الارتكاز الثالث بـ $(\frac{8}{15})$ ونضيفه إلى الصف الأول وأيضاً نضرب صف الارتكاز الثالث بـ $(-\frac{2}{3})$ ونضيفه للصف الثاني نجد:

$$[A \vdots I] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-8}{15} & | & \frac{1}{5} & \frac{-4}{15} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & | & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{5} & 0 & \frac{-4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} = [I \vdots A^{-1}]$$

ومنه يكون:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

5-17-2 مبرهنة "كيلي-هاملتون" :

كل مصفوفة مربعة نظامية مثل $A=[a_{ij}]_n$ تحقق معادلتها المميزة: $|A-\lambda I|=0$.

حيث إن المعادلة المميزة ممثلة بكثيرة حدود بالنسبة لـ λ بالشكل التالي:

$$f(\lambda)=|A-\lambda I|=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0 \qquad (51-2)$$

تحقق معادلتها المميزة الممثلة بكثير حدود مصفوفة:

$$f(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots+a_1A+a_0I \qquad (52-2)$$

6-17-2 إيجاد مقلوب مصفوفة باستخدام مبرهنة "كيلي هاملتون":

بفرض A مصفوفة مربعة من المرتبة n والتي معادلتها المميزة :

$$f(\lambda)=|A-\lambda I|=0 \qquad (53-2)$$

وحسب مبرهنة كيلي هاملتون فإن المصفوفة A تحقق معادلتها المميزة:

$$f(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots+a_1A+a_0I=0 \qquad (54-2)$$

نضرب طرفي المعادلة (31) بـ A^{-1} نجد:

$$a_nA^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\ldots+a_1I+a_0A^{-1}=0 \qquad (55-2)$$

وبالتالي:

$$A^{-1}=-\frac{1}{a_0}\left(a_nA^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\ldots+a_1I\right) \qquad (56-2)$$

من خلال هذه العلاقة يمكن إيجاد المقلوب A^{-1} بدلالة قوى المصفوفة A علماً أن أكبر قوة لـ

A هي $(n-1)$ ويتم حساب الأمثال $a_0,a_1,\ldots,a_n$ من المعادلة المميزة.

مثال:

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 5 & 5\\ -5 & 6 & 5\\ -5 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1- أثبت أن A تحقق المعادلة : $A^3-8A^2+13A-6I=0$.

2- أوجد A^{-1}

الحل:

1- نوجد المعادلة المميزة:

$$|A-\lambda I|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}-4-\lambda & 5 & 5\\ -5 & 6-\lambda & 5\\ -5 & 5 & 6-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow-\lambda^3+8\lambda^2-13\lambda+6=0$$

وحسب مبرهنة كيلي هاملتون يكون لدينا:

$$-A^3+8A^2-13A+6.I=0$$

2- لإيجاد A^{-1} نضرب طرفي المعادلة $-A^3+8A^2-13A+6.I=0$ بـ (A^{-1}) نجد:

$$A^2-8A+13.I-6.A^{-1}=0$$

ومنه:

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\left(A^2-8A+13I\right)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\left\{\begin{bmatrix}-4&5&5\\-5&6&5\\-5&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&5&5\\-5&6&5\\-5&5&6\end{bmatrix}-8\begin{bmatrix}-4&5&5\\-5&6&5\\-5&5&6\end{bmatrix}+13\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}-4&5&5\\-5&6&5\\-5&5&6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-4&5&5\\-5&6&5\\-5&5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-34&35&35\\-35&36&35\\-35&35&36\end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}11&-5&-5\\5&1&-5\\5&-5&1\end{bmatrix}$$

2-17-7 تعريف المصفوفة العمودية (المتعامدة): إذا كان $A^T=A^{-1}$ أي منقولها يساوي مقلوبها

وبالتالي:

$$.\,A^T\cdot A=A\cdot A^T=I_n \qquad (57-2)$$

ملاحظة(26): منقول مصفوفة عمودية هو أيضاً مصفوفة عمودية.

مثال: المصفوفة المعرفة بالشكل:

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{-\sqrt{3}}{2}&0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

هي مصفوفة عمودية (متعامدة).

ملاحظة(27):

1) إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة قطرية فإن: $A^{-1}=\left[\frac{1}{a_{ii}}\right]$ قطرية أيضاً بشرط $a_{ii}\neq 0;\forall i$.

2) إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مثلثية عليا (سفلى) فإن: A^{-1} أيضاً تكون أيضاً مثلثية عليا (سفلى).

3) إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة متناظرة فإن A^{-1} تكون أيضاً متناظرة.

لنثبت صحة (3) :

إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة متناظرة فإنها تحقق $A=A^T$ وبأخذ مقلوب الطرفين نجد:

$A^{-1}=(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ وهذا يعني أن A^{-1} مصفوفة متناظرة.

2-18 خواص المقلوب:

1) المقلوب إن وجد فهو وحيد ويحقق العلاقة: $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_n$ (تم إثبات ذلك)

2) $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$ (مقلوب جداء مصفوفتين مربعتين نظاميتين يساوي جداء مقلوبي هاتين المصفوفتين بترتيب معاكس). ويمكن تعميم هذه الخاصة على مقلوب جداء عدة مصفوفات مربعة نظامية من المرتبة نفسها يساوي جداء مقلوباتها بترتيب معاكس.

3) إذا أخذنا منقول الطرفين في الخاصة (1) مع الاستفادة من الخاصة (2) نجد:

$$(A^{-1})^T\cdot A^T = A^T\cdot (A^{-1})^T = I_n \Rightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \qquad (58-2)$$

أي إن مقلوب منقول المصفوفة المربعة النظامية A يساوي منقول مقلوبها.

4) من الخاصة (1) نجد أن:

$$\det A\cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = [\det A]^{-1} \qquad (59-2)$$

محدود مقلوب المصفوفة يساوي مقلوب محدد المصفوفة الأصلية.

5) من الخاصة (1) نجد:

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad (60-2)$$

ملاحظة(28): لإيجاد مقلوب مصفوفة من المرتبة الثانية أي من الشكل (2×2) ونظامية (أي محددها لا يساوي الصفر)، فإننا نبدل العنصرين الموجودين على القطر الرئيسي فيما بينهما ، ونبدل إشارة العنصرين الموجودين على القطر الثانوي ونضرب المصفوفة الناتجة بمقلوب محدد المصفوفة $A = [a_{ij}]$ بحيث $|A| \neq 0$.

2-19 حل جملة معادلات خطية فيها $(m = n)$ باستخدام مقلوب مصفوفة:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \qquad (61-2)$$

تكتب هذه الجملة بالشكل التالي :

$$A\cdot X = B \qquad (62-2)$$

أو:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (63-2)$$

فإذا كانت المصفوفة A نظامية (أي لها مقلوب) نجد:

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (64-2)$$

مثال:

حل جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

الحل:

لدينا:

مصفوفة المعاملات: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

مصفوفة المتحولات: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

مصفوفة الثوابت: $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

إن محدد المصفوفة A هو $|A| = -3$

ويكون لدينا :

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

أي أن:

$$x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = -5$$

هو حل للجملة المعطاة.

ملاحظة(29): لإيجاد حل الجملة $(2-63)$ يجب حساب A^{-1} ومن ثم إجراء الجداء $A^{-1}\cdot B$.

2-20 حل جملة معادلات خطية فيها $(m=n)$ باستخدام قاعدة كرامر:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية $(2-63)$والتي حلها كما رأينا سابقاً هو: $X=A^{-1}\cdot B$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = (\det A)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \dots & D_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{1n} & D_{2n} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

بإجراء الضرب نجد:

$$x_i = (\det A)^{-1} \cdot \left[b_1 D_{1i} + b_2 D_{2i} + \dots + b_n D_{ni} \right] \qquad (65-2)$$

إن المقدار $\left[b_1 D_{1i} + b_2 D_{2i} + \dots + b_n D_{ni} \right]$ هو المنشور للمحدد الناتج عن محدد المصفوفة A بعد استبدال عموده i بالعمود B ولنرمز له بـ $\det A_i$ وبذلك يكون لدينا:

$$x_i = (\det A)^{-1} \cdot \det A_i ; i = 1,2,..,n \qquad (66-2)$$

مثال:

استخدم قاعدة كرامر في حل جملة المعادلات (الواردة في المثال السابق).

الحل:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \Rightarrow x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{9}{-3} = -3$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 15 \Rightarrow x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{15}{-3} = -5$$

2-21 قوى مصفوفة:

2-21-1 تعاريف:

1) إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن:

$$A^n = A \cdot A \cdot A ... A(\text{ مرة } n\ ); n \in N \qquad (67-2)$$

هي مصفوفة A مرفوعة للأس n . (المصفوفة $A^0 = 1$ هي المصفوفة الواحدية).

2) تسمى المصفوفة المربعة A خاملة أو متساوية القوى: إذا كان $A^2 = A$ وتكون معدومة القوى إذا كان $A^n = 0; (n > 0)$ وتسمى n مرتبة الانعدام و 0 هي المصفوفة الصفرية.

3) المصفوفة المربعة A من المرتبة n تسمى دورية: إذا وجد عدد طبيعي $(0 < a)$ ، بحيث $A^a = I_n$ وإن أصغر عدد طبيعي موجب يحقق هذا الشرط يسمى دور المصفوفة A .

2-21-2 خواص قوى مصفوفة: إذا كانت A مصفوفة مربعة و α, β عددين صحيحين غير سالبين فإن الخواص التالية صحيحة:

1) $A^\alpha \cdot A^\beta = A^{\alpha+\beta}$

2) $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha \cdot \beta}$

2-21-3 تعريف القوى الصحيحة السالبة لمصفوفة مربعة: كما يلي: $(A^{-1})^2 = A^{-1}.A^{-1}$

$$A^{-3} = A^{-1}.A^{-2}$$
$$A^{-n} = A^{-1}.A^{-(n-1)}$$

وبالتالي نستنتج:

$$A^{-m}.A^{-n} = A^{-(m+n)}$$
$$(A^{-m})^n = A^{-mn}$$

أمثلة:

1-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

خاملة لأن:

$$A^2 = A\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=A$$

-2

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

معدومة ومرتبة انعدامها الثالثة وذلك لأن:

$$A^3 = A^2\cdot A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

-3

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

دورية ودورها $a=4$ لأن:

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\ A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ A^4=A^3\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I_3$$

2-22 كثيرة حدود مصفوفة:

بفرض A مصفوفة مربعة من المرتبة n ولتكن $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n;(a_0,a_1,\ldots,a_n \text{ معاملات})$$

إن التركيب :

$$f(A)=a_0I+a_1A+a_2A^2+\ldots+a_nA^n \qquad (68-2)$$

يسمى كثيرة حدود بـ A ويرمز له بالرمز $f(A)$ و I مصفوفة واحدية من مرتبة المصفوفة A

و $f(A)$ من المرتبة n نفسها ، وإذا كان $f(A)=0$ نقول عن A إنها جذر $f(x)$.

مثال:

لتكن كثيرة الحدود:

$$f(x)=x^2+2x-3$$

والمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب: إيجاد $f(A)$.

الحل:

$$f(A)=A^2+2A-3I_2$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$f(A)=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$$

2-23 أثر مصفوفة مربعة:

بفرض A مصفوفة مربعة من الدرجة n . إن مجموع عناصر القطر الرئيسي في $A=[a_{ij}]_n$

يسمى أثر المصفوفة A ونرمز له بالرمز $tr(A)$ أي أن:

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii} \qquad (69-2)$$

مثال:

إذا كان:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

أوجد $tr(A)$.

الحل:

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=a_{11}+a_{22}=3+3=6$$

2-24 التكافؤ والتحويلات الأولية:

كما ذكرنا سابقاً إن الحصول على مصفوفة مكافئة لمصفوفة A على حقل K يتم بإجراء عدة عمليات (تحويلات) أولية

متتابعة على المصفوفة A تسمى عمليات الصفوف البسيطة (الأعمدة البسيطة) ويمكن تلخيصها كما يلي:

1- ضرب أحد الصفوف (الأعمدة) بعدد $0\neq\lambda\in K$

2- جمع أحد الصفوف (الأعمدة) إلى صف (عمود) آخر بعد ضربه بعدد $0\neq\lambda\in K$

3- المبادلة بين صفين (عمودين) في المصفوفة

هذه العمليات تلعب دوراً هاماً في حل المعادلات الخطية وبعض التطبيقات الأخرى مثل درجة ومقلوب مصفوفة.

2-24-1 تعريف المصفوفات المتكافئة: نقول عن مصفوفتين A و B إنهما متكافئتان ونرمز لها بالرمز $A \sim B$، إذا أمكن الحصول على إحداهما من الأخرى بإجراء عدة عمليات (تحويلات) أولية متتابعة (إما على الصفوف أو على الأعمدة).

أمثلة:

1- لتكن لدينا المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

إذا أجرينا التحويلات على الصفوف نجد:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \underset{R_{21}(-2)}{\overset{R_{31}(1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \underset{R_2(1/5)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \underset{R_{32}(-5)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 17/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

2- المصفوفة الواردة في المثال السابق إذا أجرينا عليها التحويلات المتتالية:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \underset{R_{21}(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \underset{R_{31}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \underset{R_{32}(-1)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

2-25 رتبة (درجة) المصفوفة:

2-25-1 تعريف: نعرف رتبة (درجة) المصفوفة بأنها عدد المتجهات المستقلة خطياً في المصفوفة وبالتالي إذا كانت المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ وكانت $\rho(A)$ رتبة هذه المصفوفة فإن:

$$\rho(A)\le n\le m \text{ أو } \rho(A)\le m\le n \qquad (2-70)$$

أي يوجد ρ من المتجهات المستقلة خطياً (في الصفوف أو الأعمدة) وهذا يؤدي إلى وجود $(\rho-n)$ أو $(n-\rho)$ أو $(m-\rho)$ من المتجهات المرتبطة خطياً.

2-25-2 نتائج هامة:

1) إذا كانت: $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ فإن $\rho(A)\le\rho(m,n)$.

2) إذا كانت: $A=[a_{ij}]_{(n,n)}$ مربعة ونظامية فإن $\rho(A)=n$.

3) $\rho(A)=\rho(A^T)$ (A^T منقول المصفوفة A).

4) $\rho(I_n)=n$ (I_n المصفوفة الواحدية من المرتبة n).

5) إذا كانت: $A=[a_{ij}]_{(n,n)}$ مصفوفة قطرية وكانت $a_{ii}\ne 0;\forall i$ فإن $\rho(A)=n$.

6) إذا كانت: $U=[u_{ij}]_{(n,n)}$ مصفوفة مثلثية عليا وكانت $u_{ii}\ne 0;\forall i$ فإن $\rho(U)=n$.

7) إذا كانت: $L=[l_{ij}]_{(n,n)}$ مصفوفة مثلثية سفلى وكانت $l_{ii}\ne 0;\forall i$ فإن $\rho(L)=n$.

2-25-3 خواص هامة:

1) $\rho(A+B)\le\rho(A)+\rho(B)$.

2) $\rho(AB)\le\min\{\rho(A),\rho(B)\}$.

3) $\rho(\lambda A)=\rho(A);(0\ne\lambda\in K)$.

4) $\rho(A-B)\ge\rho(A)-\rho(B)$.

5) إذا كانت A مصفوفة نظامية (غير شاذة) فإن $\rho(AB)=\rho(B)$.

6) $\rho(A^TA)=\rho(A)$.

7) إذا كانت $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ و $B=[b_{ij}]_{(n,p)}$ وكان $AB=0$ فإن: $\rho(A)+\rho(B)\le n$ (حيث n هي عدد صفوف المصفوفة B).

لنثبت صحة الخاصة (4):

$$\rho(A)=\rho(A-B+B)\le\rho(A-B)+\rho(B)\Rightarrow\rho(A-B)\ge\rho(A)-\rho(B)$$

4-25-2 رتبة (درجة) مصفوفة باستخدام الصغائر:

صغير مصفوفة: هو محدد أي مصفوفة مربعة جزئية من هذه المصفوفة.

فمثلاً إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&0&3\\2&1&2\end{bmatrix}$$

فإن:

$$\det\begin{bmatrix}1&2\\2&0\end{bmatrix}=-4\ ,\ \det\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}=5\ ,\ \det\begin{bmatrix}2&-1\\0&3\end{bmatrix}=6$$

$$\det\begin{bmatrix}2&0\\2&1\end{bmatrix}=2\ ,\ \det\begin{bmatrix}2&3\\2&2\end{bmatrix}=-2\ ,\ \det\begin{bmatrix}0&3\\1&2\end{bmatrix}=-3$$

$$\det\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}=-3\ ,\ \det\begin{bmatrix}1&-1\\2&2\end{bmatrix}=4\ ,\ \det\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}=5$$

تشكل الصغائر التسعة ذات المرتبة 2×2 للمصفوفة A.

وبشكل عام: فإن المصفوفة المربعة من المرتبة n يكون لها n^2 من الصغائر ذات المرتبة $(n-1)$ ونحصل على هذه الصغائر من حذف الصف i والعمود j اللذين يحويان العنصر a_{ij} من المصفوفة A ويرمز له بالرمز Δ_{ij}.

رتبة مصفوفة : هي مرتبة أكبر صغير من هذه المصفوفة لا يساوي الصفر.

إن الرتبة r لمصفوفة هي العدد الطبيعي الذي يحقق ما يلي:

1- يوجد صغير واحد على الأقل من المرتبة (r) لهذه المصفوفة لا يساوي الصفر.

2- كل صغير من المرتبة $(r+1)$ يساوي الصفر.

ومنه يمكن أن نلاحظ بأن كل صغير في هذه المصفوفة من المرتبة $r+2$ يساوي الصفر وكل صغير من المرتبة $r+3, r+4,...$ يساوي الصفر أيضاً.

نرمز لرتبة مصفوفة A بأحد الرموز : $rank(A)=r$ ، $\rho(A)=r$.

مثال:

أوجد رتبة كل من المصفوفتين:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ -3 & 3 & 2\\ -7 & 7 & -21\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 3 & -1 & 2 & 1\\ 1 & -5 & 8 & 7\end{bmatrix}$$

الحل:

بالنسبة للمصفوفة A نلاحظ أن: $\det(A)=0$ ومن ثم فإن $\rho(A)<3$.

بأخذ كل المحددات من المرتبة 2×2 الممكنة نجد أن هناك على الأقل واحداً منها لا يساوي صفراً ، ومن ثم فإن $\rho(A)=2$.

وبالنسبة للمصفوفة B بأخذ كل المحددات الجزئية من المرتبة 3×3 الممكنة وعددها أربعة نجد أن جميعها أصفاراً ، وبالتالي $\rho(B)<3$.

بأخذ كل المحددات من المرتبة 2×2 الممكنة نجد أن هناك على الأقل واحداً منها لا يساوي صفراً ، ومن ثم فإن $\rho(B)=2$.

2-25-5 رتبة مصفوفة باستخدام التحويلات الأولية:

سنرمز بالرموز التالية للدلالة على هذه التحويلات (عمليات الصف):

$R_i(\lambda)$ ضرب أحد الصفوف i بعدد $\lambda\neq 0$.

$R_{i,j}(\lambda)$ جمع أحد الصفوف إلى صف آخر بعد ضربه بعدد $\lambda\neq 0$.

$R_{i,j}$ المبادلة بين صفين في المصفوفة.

وسنرمز بالرموز التالية للدلالة على هذه التحويلات (عمليات الأعمدة):

$C_i(\lambda)$، $C_{i,j}(\lambda)$، $C_{i,j}$ على الترتيب مع عمليات الصف.

مثال:

أوجد رتبة المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}$$

الحل:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}\underset{R_{1,2}(-2)}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}\underset{R_1+R_3}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 5 & -3\end{bmatrix}\underset{R_{2,3}(-1)}{\sim}$$

إن:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{A} = B$$

نلاحظ أن: $rank(\tilde{A}) = 2$ وبالتالي $rank(A) = 2$ (التحويلات الأولية على مصفوفة لا تغير من رتبتها).

ملاحظة(30):

1- إن إضافة متجه صفري لا يغير من رتبة المصفوفة.

2- إن المصفوفة التي حصلنا عليها في المثال السابق تسمى بالمصفوفة الدرجية أو السلمية (كما سيأتي لاحقاً) ، ويمكن معرفة رتبتها من خلال شكلها ويمكن تحويل أي مصفوفة إلى الشكل الدرجي (أو السلمي) إذا اتبعنا القواعد كما في المثال السابق للوصول إلى الشكل الدرجي (أو السلمي).

3- إذا كانت A مصفوفة مستطيلة فإنه يوجد مصفوفة درجية B مكافئة للمصفوفة A بحيث يكون $\rho(A)$ مساوٍ لعدد الصفوف غير الصفرية للمصفوفة B.

6-25-2 رتبة مصفوفة باستخدام التعريف:

يمكن الحصول على رتبة مصفوفة وذلك بحل المعادلة الأساسية $\sum_{i=1}^{\min\{n,m\}} \alpha_i x_i = 0$ حيث $\{x_i\}$ هي صفوف (أو أعمدة) المصفوفة A ، ومن خلال الحل يمكن معرفة عدد المتجهات المستقلة في

هذه المجموعة وتكون الرتبة مساوية لهذا العدد.

مثال:

أوجد رتبة المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن مرتبة A هي 4×3 وبالتالي فإن $\rho(A) \leq 3$ نقوم بحل جملة المعادلات:

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\2\\-3\\4\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}3\\-1\\2\\1\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}1\\-5\\8\\-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow \alpha_1=2,\alpha_2=-1,\alpha_3=3$$

وهذا يعني أن $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ليست جميعها أصفاراً وتحقق المعادلة السابقة.

ومنه فالمتجهات مرتبطة أي أن $\rho(A)\neq 3$.

أما إذا أخذنا المتجه:

$$\begin{bmatrix}1\\-5\\8\\-7\end{bmatrix}$$

لا يرتبط مع المتجه:

$$\begin{bmatrix}3\\-1\\2\\1\end{bmatrix}$$

وبالتالي $\rho(A)=2$

2-26 المصفوفات الأولية:

المصفوفة الأولية هي المصفوفة الناتجة عن تطبيق التحويلات الأولية على المصفوفة الواحدية I_n وسنستخدم الرموز الموافقة كما ذكرنا سابقاً عن التحويلات الأولية أي أن الرمز $E_{i,j}$ تبديل الصفين (أو العمودين) i,j في المصفوفة الواحدية ، أيضاً $E_i(\lambda)$ ضرب عناصر الصف (أو العمود) i بـ λ والرمز $E'_{i,j}(\lambda)$ يعني أن المصفوفة نتجت عن المصفوفة I_n بعد ضرب الصف (أو العمود) j بـ λ وجمعه إلى الصف (أو العمود) i .

مثال:

لتكن لدينا المصفوفة الواحدية :

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

إن:

$$E_{1,3}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad E_{1,2}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad E_2(-3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$E_{1,2}(4)=\begin{bmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\ ,\ E_{3,1}(-2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\ ,\ E_{3}(5)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

$$E'_{1,3}(-2)=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\ ,\ E'_{1,2}(4)=\begin{bmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

2-26-1 خواص هامة:

بفرض لدينا $C = A\cdot B$ فإن:

1- إذا طبقنا على المصفوفة A أي تحويل أولي على صفوفها فإن المصفوفة C تخضع لنفس التحويل أيضاً.

2- إذا طبقنا على المصفوفة B أي تحويل أولي على أعمدتها فإن المصفوفة C تخضع لنفس التحويل أيضاً.

2-26-2 مبرهنة: إن تطبيق التحويلات الأساسية على أعمدة المصفوفة لا يغير من رتبتها كما في الصفوف.

2-26-3 نتائج:

1- المصفوفات الأولية جميعها نظامية (غير شاذة) محدداتها لا تساوي الصفر.

2- لا تتغير رتبة مصفوفة بتطبيق تحويلات أولية على صفوفها (وذلك بتطبيق المبرهنة السابقة على A^T مع ملاحظة $\rho(A)=\rho(A^T)$.

3- تكون $A \sim B$ (مصفوفتين متكافئتين) إذا كانت إحداهما تنتج عن الأخرى بتطبيق تحويلات أولية ويكون لهما رتبة واحدة.

4- ضرب مصفوفة (من اليمين أو اليسار) بمصفوفة أولية لا يغير من رتبتها.

مثال:

عين رتبة المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-4&0&-4\\1&-1&-2&-2&-2\\1&-3&0&-4&0\\0&1&-1&1&1\end{bmatrix}$$

الحل:

$$A \underset{\substack{R_{2,1}(-1)\\R_{3,1}(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{R_{2,4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{R_{3,2}(4)\\R_{4,2}(2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن رتبة المصفوفة المكافئة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تساوي 2 وبالتالي $\rho(A) = 2$

2-27 تعريف المصفوفة المدرجة:

إن المصفوفة من الشكل :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad (71-2)$$

حيث: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk} \neq 0$ تسمى مصفوفة درجية أو مصفوفة مدرجة (أوشبه منحرفة) وللسهولة من الأفضل أن تكون العناصر $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk} = 1$.

للحصول على مصفوفة درجية (مدرجة) نجري عدداً من التحويلات الأولية للمصفوفة المعطاة على صفوفها (أو أعمدتها).

أمثلة:

1- المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة درجية.

2- المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة درجية.

3- المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة درجية.

ملاحظة(31): رتبة المصفوفة الدرجية تساوي عدد الصفوف غير الصفرية فيها.

ملاحظة(32): لأي مصفوفة A توجد على الأقل مصفوفة درجية مكافئة لها.

مثال:

أوجد رتبة المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A \underset{\substack{-R_2 \leftrightarrow R_1 \\ R_2 \leftrightarrow R_5}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \underset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-3R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \underset{\substack{-\frac{1}{5}R_2, \frac{1}{5}R_4 \\ -\frac{1}{11}R_3, \frac{1}{2}R_5}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underset{\substack{R_3-R_2, R_4-R_3 \\ R_5-R_4, R_1-4R_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إن $\rho(\tilde{A}) = 2$ وبالتالي $\rho(A) = 2$ (يوجد مثلاً $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$) أو حسب الملاحظة السابقة عدد الصفوف غير الصفرية في المصفوفة الدرجية يساوي 2.

2-28 إيجاد مقلوب مصفوفة بتطبيق التحويلات الأولية (طريقة جوردان):

لإيجاد مقلوب مصفوفة بتطبيق التحويلات الأولية نتبع ما يلي:

١- نشكل المصفوفة التالية $[A \vdots I]$ حيث I المصفوفة الواحدية من نفس مرتبة A.

٢- نقوم بالتحويلات الأولية على صفوف (أعمدة) المصفوفة $[A \vdots I]$ لنحصل على مصفوفة من الشكل $[I \vdots B]$ عندئذٍ تكون المصفوفة $B = A^{-1}$ وبالتالي الحصول على A^{-1} (مقلوب المصفوفة A) نسمي هذه الطريقة –طريقة جوردان.

أمثلة:

1- أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 5 \\ 3 & -10 & 6 \end{bmatrix}$$

وذلك بتطبيق التحويلات الأولية على صفوفها.

الحل:

$$[A\,\vdots\,I_3]=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\vdots 1 & 0 & 0\\ 2 & -6 & 5\vdots 0 & 1 & 0\\ 3 & -10 & 6\vdots 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\underset{\substack{R_2-2R_1\\R_3-3R_1}}{\sim}\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\vdots\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\vdots -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\vdots -3 & 0 & 1\end{bmatrix}\underset{R_2\leftrightarrow R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\vdots\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\vdots -3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\vdots -2 & 1 & 0\end{bmatrix}\underset{R_1-3R_2}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\vdots 10 & 0 & -3\\ 0 & -1 & 0\vdots -3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\vdots -2 & 1 & 0\end{bmatrix}\underset{R_1-2R_3,-R_2}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\vdots 14 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 0\vdots\ 3 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\vdots -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

أي أن :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}14 & -2 & -3\\ 3 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

للتحقق يمكن تطبيق ما يلي $A\cdot A^{-1}=I_3$.

2- أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

وذلك بتطبيق التحويلات الأولية على صفوفها.

الحل:

$$[A\,\vdots\,I_3]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\ \vdots 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\ \vdots 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\vdots 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\vdots 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & 0\vdots 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\vdots 1 & -1/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

أي أن :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & -1/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

للتحقق يمكن تطبيق ما يلي $A\cdot A^{-1}=I_3$.

2-29 خواص محدد جداء مصفوفتين (مبرهنات):

2-29-1 مبرهنة: لتكن لدينا A مصفوفة مربعة من المرتبة n و E مصفوفة أولية من نفس مرتبة A عندئذٍ:

$$\det(EA)=\det(E).\det(A) \qquad (72-2)$$

2-29-2 مبرهنـــة: جـداء مصـفوفات أوليـة هـو مصـفوفة نظاميـة ومحـدد الجـداء يسـاوي إلـى جـداء المحـددات لهـذه المصفوفات .

3-29-2 مبرهنـة: إذا كـان للمصفوفتين A,B مرتبـة واحدة (m,n) ورتبـة واحـدة r فإنـه يمكن إيجـاد مصـفوفة نظاميـة P من المرتبة (m,n) بحيث يكون: $B = P.A$

4-29-2 مبرهنة: كل مصفوفة مربعة نظامية من المرتبة n تساوي أيضاً جداء مصفوفات أولية من المرتبة n.

5-29-2 مبرهنة: محدد جداء مصفوفتين مربعتين يساوي جداء المحددين لهاتين المصفوفتين.

$$\det(AB) = \det A . \det B \qquad (73-2)$$

6-29-2 يمكن تعميم المبرهنة السابقة كما يلي:

محدد جداء مصفوفات مربعة يساوي جداء محدداتها أي :

$$\det \prod_{i=1}^{n} A_i = \prod_{i=1}^{n} \det A_i \qquad (74-2)$$

تذكرة بقواعد الاشتقاق للتوابع الشهيرة مع تمارين محلولة :

مسلسل	التابع	مشتق التابع
1	$y = c$	$y' = 0$
2	$y = x$	$y' = 1$
3	$y = u(x)$	$y' = u'$
4	$y = A\,u$	$y' = A\,u'$
5	$y = x^{n}$	$y' = n\,x^{n-1}$
6	$y = u^{n}$	$y' = n\,u^{n-1}.\,u'$
7	$y = u_1 + u_2 + u_3 + ...$	$y' = u_1' + u_2' + u_3' + ...$
8	$y = u\,.\,v$	$y' = u'.\,v + v'.\,u$
9	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'.\,v - v'.\,u}{v^{2}}$
10	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
11	$y = \sin u$	$y' = \cos u\,.\,u'$
12	$y = \cos u$	$y' = -\sin u\,.\,u'$
13	$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
14	$y = \tan u$	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u} = \sec^2 u\,.\,u'$
15	$y = \cot x$	$y' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$
16	$y = \cot u$	$y' = \frac{-u'}{\sin^2 u} = -\operatorname{cosec}^2 u\,.\,u'$
17	$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$	$y' = \sec x\,.\,\tan x$
18	$y = \sec u = \frac{1}{\cos u}$	$y' = \sec u\,.\,\tan u\,.\,u'$
19	$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$	$y' = -\operatorname{cosec} x\,.\,\cot x$
20	$y = \operatorname{cosec} u = \frac{1}{\sin u}$	$y' = -\operatorname{cosec} u\,.\,\cot u\,.\,u'$

21	$y = \sin^{-1} x = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
22	$y = \sin^{-1} u = \arcsin u$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \,.\, u'$
23	$y = \cos^{-1} x = \arccos x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
24	$y = \cos^{-1} u = arc \cos u$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \,.\, u'$
25	$y = \tan^{-1} x = arc \tan x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
26	$y = \tan^{-1} u = arc \tan u$	$y' = \dfrac{1}{1+u^2} \,.\, u'$
27	$y = \operatorname{cotan}^{-1} x = arc \cot x$	$y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$
28	$y = \operatorname{cotan}^{-1} u = arc \cot u$	$y' = \dfrac{-1}{1+u^2} \,.\, u'$
29	$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
30	$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$
31	$y = e^{x}$	$y' = e^{x}$
32	$y = e^{u(x)}$	$y' = e^{u(x)} \,.\, u'$
33	$y = a^{u(x)}$	$y' = a^{u(x)} \,.\, \ln a \,.\, u'$
34	$y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \,.\, u'$

وفيما يلي جدول يبين قوانين التفاضلات لبعض التوابع الشهيرة التي نستخدمها وهو :

م	التابع	تفاضل التابع
١	$y = c$	$dy = 0$
٢	$y = x$	$dy = dx$
٣	$y = u(x)$	$dy = u' dx$
٤	$y = A u$	$dy = A u' dx$
٥	$y = x^{n}$	$dy = n x^{n-1} dx$
٦	$y = u^{n}$	$dy = n u^{n-1} u' dx$
٧	$y = u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots$	$dy = u_1' dx + u_2' dx + u_3' dx + \dots..$
٨	$y = u.v$	$dy = u\,.dv + v\,.du$
٩	$y = \dfrac{u}{v}$	$dy = \dfrac{u\,.dv - v\,.du}{v^2}$

١٠	$y=\sin x$	$dy=\cos x\ dx$
١١	$y=\sin u$	$dy=\cos u\ .u'.dx$
١٢	$y=\cos u$	$dy=-\sin u\ .u'.dx$
١٣	$y=\tan x$	$dy=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=\sec^2 x\ dx$
١٤	$y=\tan u$	$dy=\dfrac{u'}{\cos^2 u}dx=\sec^2 u\ .u'.dx$
١٥	$y=\cotan x$	$dy=\dfrac{-1}{\sin^2 x}dx=-\mathrm{cosec}^2 x\ dx$
١٦	$y=\cotan u$	$dy=\dfrac{-u'}{\sin^2 u}dx=-\mathrm{cosec}^2 u\ .u'.dx$
١٧	$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$	$dy=\sec x\ .\ \tan x\ dx$
١٨	$y=\sec u=\dfrac{1}{\cos u}$	$dy=\sec u\ .\tan u.u'.dx$
١٩	$y=\mathrm{cosec}\,x=\dfrac{1}{\sin x}$	$dy=-\mathrm{cosec}\,x\ .\cotan x\ dx$
٢٠	$y=\mathrm{cosec}\,u=\dfrac{1}{\sin u}$	$dy=-\mathrm{cosec}\,u.\cotan u\ .u'dx$
٢١	$y=\sin^{-1}x=\arcsin x$	$dy=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
٢٢	$y=\sin^{-1}u=\arcsin u$	$dy=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'\ dx$
٢٣	$y=\cos^{-1}x=\arccos x$	$dy=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
٢٤	$y=\cos^{-1}u=arc\cos u$	$dy=\dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}u'\ dx$
٢٥	$y=\tan^{-1}x=\arctan x$	$dy=\dfrac{1}{1+x^2}dx$
٢٦	$y=\tan^{-1}u=\arctan u$	$dy=\dfrac{1}{1+u^2}.u'.dx$
٢٧	$y=\cot^{-1}x=arc\cot x$	$dy=\dfrac{-1}{1+x^2}dx$
٢٨	$y=\cot^{-1}u=arc\cot u$	$dy=\dfrac{-1}{1+u^2}u'.dx$
٢٩	$y=sh^{-1}x=\arg sh\ x$	$dy=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$
٣٠	$y=sh^{-1}u=\arg sh\ u$	$dy=\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}u'.dx$
٣١	$y=ch^{-1}x=\arg ch\ x$	$dy=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$

٣٢	$y = ch^{-1}u = \arg ch u$	$dy = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}\ u'.dx$
٣٣	$y = th^{-1}x = \arg th\, x$	$dy = \dfrac{1}{1-x^2}\ dx$
٣٤	$y = th^{-1}u = \arg th\, u$	$dy = \dfrac{1}{1-u^2}\ u'.dx$
٣٥	$y = cth^{-1}x = \arg cth\, x$	$dy = \dfrac{-1}{x^2-1}\ dx$
٣٦	$y = cth^{-1}u = \arg cth\, u$	$dy = \dfrac{-1}{u^2-1}\ u'.dx$
٣٧	$y = sech^{-1}x$	$dy = \dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2+1}}\ dx$
٣٨	$y = sech^{-1}u$	$dy = \dfrac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2+1}}\ u'.dx$
٣٩	$y = cosech^{-1}x$	$dy = \dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2+1}}\ dx$
٤٠	$y = cosech^{-1}u$	$dy = \dfrac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2+1}}\ u'.dx$
٤١	$y = \ln u$	$dy = \dfrac{u'}{u}\ dx$
42	$y = e^x$	$y' = e^x .dx$
43	$y = e^u$	$y' = e^u .u'.dx$
44	$y = a^{u(x)}$	$y' = a^{u(x)} . \ln a . u'.dx$
45	$y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} . u'.dx$

تمارين محلولة على المشتقات

أولا– احسب المشتق الأولى للتوابع الآتي:

1) $y = 2^{\frac{1}{\cos x}}$; $\cos x \neq 0$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k = 0 , \pm 1 ,....$

$$y' = 2^{\frac{1}{\cos x}} . \ln 2 . \frac{0 . \cos x - 1 . (-\sin x)}{\cos^2 x} = 2^{\frac{1}{\cos x}} . \ln 2 . \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

2) $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$; $a > 0$, $x > 0$

$$y' = x^{x^a}\left(a\, x^{a-1} . \ln x + x^a . \frac{1}{x}\right) + x^{a^x}\left(a^x . \ln a . \ln x + a^x . \frac{1}{x}\right) +$$

$$+ a^{x^x}\left[x^x\left(1 . \ln x + x . \frac{1}{x}\right) . \ln a + x^x \frac{0}{\ln a}\right]$$

$$y' = x^{x^a}(a\,x^{a-1}.\ln x + x^{a-1}) + x^{a^x}.a^x.(\ln a.\ln x + \frac{1}{x}) +$$

$$+ a^{x^x}.x^x.(\ln x + 1).\ln a$$

$$y' = x^{x^a}.x^{a-1}.(a\ln x + 1) + x^{a^x}.a^x.(\ln a.\ln x + \frac{1}{x}) + a^{x^x}.x^x(\ln x + 1).\ln a.$$

3) $y = \dfrac{a^x.e^x}{1+\ell n a} = \dfrac{1}{1+\ln a}\, a^x.e^x$; $a > 0$, $x \in (-\infty, \infty)$

$$y' = \frac{1}{1+\ln a}(a^x.\ln a.e^x + a^x.e^x) = \frac{a^x.e^x(1+\ln a)}{1+\ln a} = a^x.e^x$$

4) $y = \dfrac{a^x.b^x}{\ln(a\,b)} = \dfrac{1}{\ln a + \ln b}.a^x.b^x$; $a,b > 0$, $x \in (-\infty, \infty)$

$$y' = \frac{1}{\ln a + \ln b}(a^x.\ln a.b^x + a^x.b^x.\ln b) =$$

$$= \frac{a^x.b^x.(\ln a + \ln b)}{\ln a + \ln b} = a^x.b^x$$

5) $y = (\cos x + 7x^2)^{\cos x}$

$$\ln|y| = \cos x.\ln\left|\cos x + 7x^2\right| \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin x.\ln\left|\cos x + 7x^2\right| + \cos x.\frac{-\sin x + 14x}{\cos x + 7x^2}$$

6) $y = x^2 e^x$

$$y' = x^2 e^x + 2x\,e^x = x\,e^x(x+2)$$

7) $y = x^3 \arctan x$

$$y' = \frac{x^3}{1+x^2} + 3x^2 \arctan x$$

8) $y = \dfrac{\arcsin x}{x}$

$$y' = \frac{x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2}.\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

9) $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2) \Rightarrow y = x^{\frac{3}{2}}(3\ln|x| - 2) \Rightarrow$

$$y' = x^{\frac{3}{2}}\frac{3}{x} + \frac{3}{2x^2}(3\ln|x| - 2) = \frac{9}{2}\sqrt{x}\ \ln|x|$$

10) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

$$y' = \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} - \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

11) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$

12) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2 \left(1+x^2\right)}} \Rightarrow y' = \frac{2(1-x^2)}{\left|1-x^2\right| . \left(1+x^2\right)}$$

13) $y = \arccos(\tan x) + \sin(\sin 6x) \Rightarrow$

$$y' = -\frac{(\tan x)'}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} + \cos(\sin 6x)(\sin 6x)' \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\sqrt{\frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x}}} + 6\cos 6x \, . \cos(\sin 6x) \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} + 6\cos 6x \ \cos(\sin 6x) \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{1}{\cos x} + 6\cos 6x \, . \cos(\sin 6x) \, .$$

14) $y = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$

$$z = \ln|y| = \ln \sqrt[3]{\frac{|x|^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$$

$$z = \ln|x| + \frac{1}{3}\ln(x^2+1) - \frac{1}{15}\ln|5-x|$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار أنَّ $\frac{u'}{u} = (\ln|u|)'$ نجد أن :

$$z' = \frac{1}{x} + \frac{2x}{3(x^2+1)} + \frac{1}{15(5-x)} \Rightarrow$$

$$z' = \frac{-24x^3 + 125x^2 - 14x + 75}{15x(x^2+1)(5-x)}$$

وبما أن : $z' = (\ln|y|)' = \frac{y'}{y}$ ، فإن :

$$y' = y\,z' = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}\cdot\left[\frac{-24x^3+125x^2-14x+75}{15x(x^2+1)(5-x)}\right]$$

$$15)\ f(x) = \sqrt[3]{x+\sqrt{x-1}} = (x+\sqrt{x-1})^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(x+\sqrt{x-1}\right)^{\frac{-2}{3}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)$$

$$16)\ y = (\arctan x)^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln|y| = \sqrt{x}\,.\ln|\arctan x|$$

وبالاشتقاق نجد أن : $\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln|\arctan x| + \sqrt{x}\,.\,\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x} \Rightarrow$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln|\arctan x| + \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2).\arctan x} \Rightarrow$$

$$y' = (\arctan x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln|\arctan x| + \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2).\arctan x}\right)$$

$$17)\ y = x^{\ln|\ln x|} \Rightarrow \ln y = \ln|\ln x|\,.\ln x \Rightarrow$$

نفرض أن : $u = \ln|x| \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

$$\ln|y| = \ln|u|\,.u \Rightarrow \frac{y'}{y} = u'.\ln|u| + u\,.\frac{u'}{u}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}\ln|\ln x| + \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$y' = x^{\ln|\ln x|}\left[\frac{1}{x}\ln|\ln x| + \frac{1}{x}\right]$$

$$18)\ y = \cos(\mathrm{ch}\,x) \quad ; \quad x \in (-\infty,\infty)$$

$$y' = -\sin(\mathrm{ch}\,x)\,.\,\mathrm{sh}\,x$$

$$19)\ y = \ln\left|\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right|$$

طريقة أولى: نعلم أن : $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}\ ;\ 1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$

نعوّض ونختصر فنحصل على : $y = \ln|\tan x| \Rightarrow$

$$y' = \frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{\tan\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\tan\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

$$21)\ y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{1+\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1+\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{1+\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\,.\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1+\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\,.\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\,.\sqrt{x+\sqrt{x}}\,.\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

22) $y = \arctan\sqrt{x}$

$$y' = \frac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2} = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$$

23) $y = \arcsin\left(\frac{3x}{4}\right)$

$$y' = \frac{\left(\dfrac{3x}{4}\right)'}{\sqrt{1-\left(\dfrac{3x}{4}\right)^2}} = \frac{\dfrac{3}{4}}{\sqrt{1-\dfrac{9x^2}{16}}} = \frac{3}{\sqrt{16-9x^2}}$$

24) $y = \arccos(e^{3x})$

$$y' = \frac{-(e^{3x})'}{\sqrt{1-(e^{3x})^2}} = \frac{-e^{3x}}{\sqrt{1-(e^{3x})^2}}$$

25) $y = \operatorname{arcsec}(5x)$

$$y' = \frac{(5x)'}{|5x|\sqrt{(5x)^2-1}} = \frac{5}{|5x|\sqrt{25x^2-1}} =$$

$$= \frac{5}{5|x|\sqrt{25x^2-1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{25x^2-1}}$$

26) $y = \sqrt[4]{1+\cos^2 x} = (1+\cos^2 x)^{\frac{1}{4}}$

$$y' = \frac{1}{4}(1+\cos^2 x)^{\frac{-3}{4}} .2\cos x \; . \; (-\sin x) \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{1}{2}\frac{\sin x \; . \; \cos x}{\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}} = -\frac{1}{2} . \frac{2\sin x \; . \; \cos x}{2\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}} \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}$$

27) $y = 2\sin^3\sqrt{\frac{3}{x}}$

$$y' = 2 \; . \; 3 \; . \sin^2\sqrt{\frac{3}{x}} \; . \cos\sqrt{\frac{3}{x}} \; . \; . \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) . \; x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$y' = -3\sqrt{3} \; . \; \frac{\sin^2\sqrt{\frac{3}{x}} \; . \; \cos\sqrt{\frac{3}{x}}}{x\sqrt{x}}$$

28) $y = \frac{1}{2} arc \cot \frac{2}{x}$

$$y' = -\frac{1}{2} \; . \; \frac{1}{1+(\frac{2}{x})^2} \; . \; 2 \; . (-\frac{1}{x^2}) \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{\frac{x^2+2}{x^2}} \; . \; \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2+2}$$

29) $y = \ln\frac{1-\ln|x|}{1+\ln|x|}$

$$y' = \frac{1+\ln|x|}{1-\ln|x|} \; . \; \frac{-\frac{1}{x}(1+\ln|x|)-(1-\ln|x|) \; . \; \frac{1}{x}}{(1+\ln|x|)^2} \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{1}{x} \; \frac{1}{1-\ln x} \; \frac{1+\ln x \; +1-\ln x}{1+\ln x} \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{2}{x(1-\ln^2|x|)}$$

30) $y = \ln\left| arc\cos\frac{1}{\sqrt{x}} \right|$

$$y' = \frac{1}{\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}} \left(-\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{x}})^2}}\right) . \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{2} \frac{1}{\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{2x\sqrt{x-1} \; . \; \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

31) $y = \arccos(th\, x) + sh(\sin 6x)$

$$y' = -\frac{(th\, x)'}{\sqrt{1 - th^2 x}} + ch(\sin 6x)(\sin 6x)' =$$

$$= -\frac{\frac{1}{ch^2 x}}{\sqrt{\frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x}}} + 6\cos 6x \, . \, ch(\sin 6x) =$$

$$= -\frac{1}{ch\, x} + 6\cos 6x \, . \, ch(\sin 6x)$$

32) $y = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$

$$z = \ln|y| = \ln \sqrt[3]{\frac{|x|^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}} \Rightarrow$$

$$z = \ln \frac{\sqrt[3]{|x|^3(x^2+1)}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{5-x}}}$$

$$z = \ln|x| + \frac{1}{3}\ln(x^2+1) - \frac{1}{15}\ln|5-x|$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار أنَّ $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$ نجد أن :

$$z' = \frac{1}{x} + \frac{2x}{3(x^2+1)} + \frac{1}{15(5-x)} =$$

$$= \frac{-24x^3 + 125x^2 - 14x + 75}{15x(x^2+1)(5-x)}$$

لكن $z' = (\ln|y|)' = \frac{y'}{y}$

ومنه فإن :

$$y' = y . z' = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}} \cdot \frac{-24x^3+125x^2-14x+75}{15x(x^2+1)(5-x)}$$

$$33)\ y = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}} = \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \quad ; \quad x \geq 0$$

$$y' = \frac{1}{4}\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}} \cdot \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}\right)^3}} \cdot \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$34)\ y = 5x + \tan^3 x \quad ; \quad \cos x \neq 0 \ ; \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$y' = 5 + 3\tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{5\cos^4 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

$$35)\ y = (2-x^2) . \cos x + 2x . \sin x \quad ; \quad x \in (-\infty , +\infty)$$

$$y' = -2x\cos x + (2-x^2)(-\sin x) + 2\sin x + 2x . \cos x =$$

$$= -2x\cos x - 2\sin x + x^2 \sin x + 2\sin x + 2x . \cos x = x^2 \sin x$$

$$36)\ y = \cot \sqrt[5]{x^5+1} \quad ; \quad x \in (-\infty , +\infty)$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 \sqrt[5]{x^5+1}} \cdot \frac{1}{5}(x^5+1)^{-\frac{4}{5}} . 5x^4 =$$

$$= -\frac{x^4}{\sqrt[5]{(x^5+1)^4} . \sin^2 . \sqrt[5]{x^5+1}} .$$

2-30 اشتقاق وتكامل المصفوفات:

2-30-1 اشتقاق المصفوفات: بفرض أن المصفوفة $A = [a_{ij}]$ من المرتبة n جميع عناصرها دوال في المتغير x.

إن مشتق المصفوفة A بالنسبة للمتغير x ويرمز له بالرمز $\frac{dA}{dx}$ هو مصفوفة لها نفس درجة المصفوفة الأصلية وعناصرها هي المشتقات بالنسبة للمتغير x لعناصر المصفوفة A أي:

$$\frac{dA}{dx}=\begin{bmatrix} \frac{da_{11}}{dx} & \frac{da_{12}}{dx} & \cdots & \frac{da_{1n}}{dx} \\ \frac{da_{21}}{dx} & \frac{da_{22}}{dx} & \cdots & \frac{da_{2n}}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{da_{n1}}{dx} & \frac{da_{n2}}{dx} & \cdots & \frac{da_{nn}}{dx} \end{bmatrix} \quad (75-2)$$

مثال:

أوجد المشتق الأول والثاني للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} e^{2x} & \cos x \\ 1 & x^3 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\frac{dA}{dx}=\begin{bmatrix} 2e^{2x} & -\sin x \\ 0 & 3x^2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \frac{d^2A}{dx^2}=\begin{bmatrix} 4e^{2x} & -\cos x \\ 0 & 6x \end{bmatrix}$$

2-30-2 مبرهنات:

1- مشتق مجموع مصفوفتين:

$$\frac{d}{dx}(A+B)=\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dx}$$

2- مشتق جداء مصفوفتين:

$$\frac{d}{dx}(A\cdot B)=\frac{dA}{dx}B+A\frac{dB}{dx}$$

3- مشتق مقلوب مصفوفة:

$$\frac{d}{dx}(A^{-1})=-A^{-1}\frac{dA}{dx}A^{-1}$$

لنبرهن صحة (3) :

بما أن:

$$A^{-1}.A=I$$

نأخذ مشتق الطرفين بالنسبة للمتغير x فنجد:

$$\frac{dA^{-1}}{dx}A+A^{-1}\frac{dA}{dx}=0$$

بضرب الطرفين من اليمين بـ A^{-1} :

$$\frac{dA^{-1}}{dx}+A^{-1}\frac{dA}{dx}A^{-1}=0$$

ومنه نجد:

$$\frac{dA^{-1}}{dx}=-A^{-1}\frac{dA}{dx}A^{-1}$$

جدول التكاملات الأساسية:

1) $\int 1\,dx = x + c$

2) $\int x^{n}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c; n\neq -1$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

4) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

5) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$

8) $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$

9) $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$

10) $\int e^{x}dx = e^{x} + c$

11) $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + c$

12) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$

13) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$

مثال (2): احسب التكامل: $\int (5x^3-3x^2+2x+7)dx$

الحل: اعتماداً على الخاصتين الأولى والثانية، نكتب:

$$\begin{aligned}\int (5x^3-3x^2+2x+7)dx &= \int 5x^3dx-\int 3x^2dx+\int 2xdx+\int 7dx\\ &=5\int x^3dx-3\int x^2dx+2\int xdx+7\int dx\\ &=\frac{5}{4}x^4-x^3+x^2+7x+c\end{aligned}$$

مثال (3): احسب التكامل $\int (3\cos x+4e^{2x})dx=$.

الحل: $\int\left(3\cos x+4e^{2x}\right)dx=3\int\cos x dx+4\int e^{2x}dx=3\sin x+2e^{2x}+c$

ملاحظة1: أن نتيجة كل تكامل غير محدد يعطي ثابتاً للتكامل، وحيث أن مجموع عدد من الثوابت الكيفية هو ثابت كيفي، لذا فقد كتبنا ثابتا واحداً c في النتيجة النهائية للتكامل.

مثال (4): احسب التكامل $\int (2-x^2)^3dx$.

الحل:

$$\begin{aligned}\int (2-x^2)^3dx &= \int (8-12x^2+6x^4-x^6)dx\\ &=8\int dx-12\int x^2dx+6\int x^4dx-\int x^6dx=8x-4x^3+\frac{6}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+c\end{aligned}$$

مثال (5): احسب التكامل $\int\frac{dx}{x-a}$.

الحل: بتطبيق الخاصة الثالثة، نجد: $\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+c$

مثال (6): احسب كل من التكاملين: $\int\sin ax\cdot dx \quad , \quad \int\cos ax\cdot dx$

الحل: $\int\sin ax\cdot dx=\frac{1}{a}\int\sin ax\cdot d(ax)=-\frac{1}{a}\cos ax+c \quad ; \quad a\neq 0$

$$\int\cos ax\cdot dx=\frac{1}{a}\int\cos ax\cdot d(ax)=\frac{1}{a}\sin ax+c \quad ; \quad a\neq 0$$

مثال (7): احسب التكاملين $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ و $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$:

الحل: $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+c$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(x/a)}{1+(x/a)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c$$

مثال (8): احسب التكامل $\int \sin x\cos x\,dx$:

الحل: يمكن حساب هذا التكامل باستخدام دساتير التحويل المثلثية، ويكتب هذا التكامل بالشكل الآتي:

$$\int \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{4}\int \sin 2x\,d(2x)$$
$$= -\frac{1}{4}\cos 2x + c$$

ويمكن حساب هذا التكامل **بطريقة ثالثة:**

$$\int \sin x\cos x\,dx = \int \sin x\,d(\sin x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$$

وأيضا **بطريقة ثالثة:** $\int \sin x\cos x\,dx = -\int \cos x\,d(\cos x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + c$

من الملاحظ أننا حصلنا على ثلاثة أجوبة مختلفة (ظاهرا) لتكامل واحد، وهي:

$$-\frac{1}{2}\cos^2 x + c \text{ ، } \frac{1}{2}\sin^2 x + c \text{ ، } -\frac{1}{4}\cos 2x + c$$

إلا أنه يمكن بسهولة التأكد أن هذه الأجوبة تختلف عن بعضها بمقدار ثابت.

مثال (9): احسب التكامل $\int e^{-5x}\cdot dx$.

الحل: $$\int e^{-5x}\cdot dx = -\frac{1}{5}\int e^{-5x}\,d(-5x) = -\frac{1}{5}e^{-5x}+c$$

مثال (10): احسب التكامل $\int \frac{dx}{7x-2}$.

الحل: $\int \frac{dx}{7x-2} = \frac{1}{7}\int \frac{7dx}{7x-2} = \frac{1}{7}\ln|7x-2| + c$

مثال (11): احسب التكامل $\int \frac{3x^2-5x+1}{x+1}\cdot dx$.

الحل: $\int \frac{3x^2-5x+1}{x+1}\cdot dx = \int\left(3x-8+\frac{9}{x+1}\right)dx = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 9\ln|x+1| + c$.

ملاحظة: بشكل عام، إذا كانت الدالة المستكملة كسرية، وفيها البسط هو مشتق للمقام فإن:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

مثال (12): احسب التكامل $\int \operatorname{tg} x\, dx$.

الحل: $\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\ln|\cos x| + c$

مثال (13): احسب التكامل $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}dx$.

الحل: $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3}{x^3+3x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+3x+1| + c$

2-30-3 تكامل المصفوفات:

بفرض أن المصفوفة $A = \left[a_{ij}\right]$ من المرتبة n جميع عناصرها دوال في المتغير x . إن تكامل المصفوفة A بالنسبة للمتغير x على المجال $[x_0, x]$ويرمز له بالرمز $\int_{x_0}^{x} Adx$ هو مصفوفة وعناصرها تنتج عن تكامل عناصر المصفوفة المفروضة على المجال $[x_0, x]$ ويكون لهذه العملية معنى إذا كان التكامل ممكناً لجميع عناصر المصفوفة.

$$\int_{x_0}^{x} A\,dx = \begin{bmatrix} \int_{x_0}^{x} a_{11}dx & \int_{x_0}^{x} a_{12}dx & \dots & \int_{x_0}^{x} a_{1n}dx \\ \int_{x_0}^{x} a_{21}dx & \int_{x_0}^{x} a_{22}dx & \dots & \int_{x_0}^{x} a_{2n}dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{x_0}^{x} a_{n1}dx & \int_{x_0}^{x} a_{n2}dx & \dots & \int_{x_0}^{x} a_{nn}dx \end{bmatrix} \quad (76-2)$$

مثال:

احسب التكامل $\int_{1}^{x} A dx$ إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} x^3 & 3 \\ e^x & x+2 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\int_{1}^{x} Adx = \begin{bmatrix} \int_{1}^{x} x^3 dx & \int_{1}^{x} 3dx \\ \int_{1}^{x} e^x dx & \int_{1}^{x} (x+2)dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x^4-1}{4} & 3(x-1) \\ e^x - e & \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

<u>تمارين محلولة</u>

1- إذا كانت المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فأوجد A^2, A^3.

الحل:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \;,\; A^3 = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

2- احسب الجداء $A \cdot B$ وذلك بتجزئة كل منهما حيث:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{bmatrix} \;,\; B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\3&1&2\end{bmatrix}$$

الحل:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 3&1&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&1&2\\6&2&4\\9&3&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&1&2\\6&3&4\\9&3&7\end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}4&1&2\\6&3&4\\9&3&7\end{bmatrix}$$

3- برهن أن:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}$$

معدومة القوى من الدرجة 3.

الحل:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\3&3&9\\-1&-1&-3\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}0&0&0\\3&3&9\\-1&-1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}=0$$

وهذا يعني أن A معدومة القوى من الدرجة 3.

4- أثبت أنه إذا كان $AB=A$ و $BA=B$ فإن A و B تكونان متساويتي القوى.

الإثبات:

$ABA=A(BA)=AB=A$ و $ABA=(AB)A=A\cdot A=A^2$

وبالتالي $A^2=A$ ،أي أن A متساوية القوى.

بشكل مشابه نثبت أن B متساوية القوى (نستخدم حاصل الجداء BAB).

5- أوجد رتبة كل من المصفوفات التالية:

$$1)\quad A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-4&0&5\end{bmatrix}\qquad 2)\quad B=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&5\\2&4&8\end{bmatrix}\qquad 3)\quad C=\begin{bmatrix}0&2&3\\0&4&6\\0&6&9\end{bmatrix}$$

الحل:

إن رتبة المصفوفة A تساوي 2 لأن $\begin{vmatrix}1&2\\-4&0\end{vmatrix}\neq 0$ ولا يوجد صغائر من الدرجة الثالثة.

ورتبة المصفوفة B تساوي 2 لأن $|B|=0$ و $\begin{vmatrix}2&3\\2&5\end{vmatrix}\neq 0$

أما رتبة المصفوفة C تساوي 1 لأن $|C|=0$ و الصغائر التسعة من الدرجة الثانية أصفار وليست كل عناصر المصفوفة أصفاراً.

6- احسب $adjA$ حيث:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&4\\1&4&3\end{bmatrix}$$

الحل:

نحسب أولاً العوامل المرافقة $D_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ ثم $[D_{ij}]^T$

$$adjA=\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}3&4\\4&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&3\\4&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&4\\1&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&3\\1&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\1&4\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&6&-1\\1&0&-1\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

7- أوجد A^{-1} حيث: $A=\begin{bmatrix}2&3\\1&4\end{bmatrix}$

الحل:

إن $\det A = 5 \neq 0$ و $adjA = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ وبالتالي:

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

8- أوجد A^{-1} حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن $\det A = -10 \neq 0$ وبالتالي:

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & 15 \end{bmatrix}$$

9- حول المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

إلى الشكل الدرجي.

الحل:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_3 - 3R_1 \\ R_2 - 2R_1}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -9 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = B$$

10- أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

وذلك بتطبيق التحويلات الأولية على الصفوف.

الحل:

$$[A\vdots I_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&3&1&0&0\\1&4&3&0&1&0\\1&3&4&0&0&1\end{array}\right]\underset{R_3-R_1}{\overset{R_2-R_1}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&3&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]\overset{R_1-3R_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&4&-3&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]\overset{R_1-3R_3}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7&-3&-3\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$=\left[I_3\vdots A^{-1}\right]$$

وبالتالي مقلوب المصفوفة A هو:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

11 – أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1&3&2\\-2&-6&-5\\3&10&6\end{bmatrix}$$

وذلك بتطبيق التحويلات الأولية على أعمدتها.

الحل:

$$[A\vdots I_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&2&1&0&0\\-2&-6&-5&0&1&0\\3&10&6&0&0&1\end{array}\right]\underset{\substack{C_2-3C_1\\C_3-2C_1}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-3&-2\\-2&0&-1&0&1&0\\3&1&0&0&0&1\end{array}\right]\underset{C_2\leftrightarrow C_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-2&-3\\-2&-1&0&0&0&1\\3&0&1&0&1&0\end{array}\right]\underset{C_1-2C_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-2&-3\\0&-1&0&0&0&1\\3&0&1&-2&1&0\end{array}\right]\underset{C_1-2C_3,\,-C_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&14&2&-3\\0&1&0&-3&0&1\\0&0&1&-2&-1&0\end{array}\right]$$

أي أن :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}14&2&-3\\-3&0&1\\-2&-1&0\end{bmatrix}$$

للتحقق يمكن تطبيق ما يلي $A\cdot A^{-1}=I_3$.

12 – أثبت أنه لأي مصفوفة مربعة A وأي عدد صحيح موجب n فإن: $(A^{-1})^n=(A^n)^{-1}$

الإثبات:

لدينا العلاقة $(A^n)(A^n)^{-1}=I$

ومنه بضرب العلاقة من اليسار بـ $(A^{-1})^n$ نجد :

$$(A^{-1})^n A^n (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \Rightarrow (AA^{-1})^n (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

وبالتالي: $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$

13- أثبت أنه إذا كانت المصفوفة A متناظرة فإن: A^{-1} إن وجدت تكون أيضاً متناظرة.

الإثبات:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow (AA^{-1})^T = I \Rightarrow (A^{-1})^T (A^T) = I$$

ومن ثم نضرب من اليمين بـ $(A^T)^{-1}$ فنجد :

$$(A^{-1})^T (A^T)(A^T)^{-1} = (A^T)^{-1} \Rightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A$$

أي أن: A^{-1} أيضاً متناظرة.

14- أثبت أنه لأي مصفوفة مربعة A من المرتبة n وأي عدد k فإن: $|kA| = k^n |A|$.

الإثبات:

بفرض $A = [a_{ij}]$ إذن:

$$kA = [ka_{ij}] \Rightarrow |kA| = |[ka_{ij}]| = k.k.k...k|[a_{ij}]| = k^n |A|$$

إن kA تعني ضرب الثابت k في جميع عناصر المصفوفة A ، أما $k|A|$ فهي عملية ضرب الثابت k في أحد صفوف أو أعمدة المحدد $|A|$.

15- أثبت أنه إذا كانت A مصفوفة مرتبتها $(m \times n)$ و B مصفوفة مرتبتها $(n \times m)$ وكان $m > n$ فإن المصفوفة AB تكون شاذة.

الإثبات:

لنفرض $AB = C$ ومنه C مرتبتها $(m \times m)$ ونعلم أن:

$$\rho(B) \le m, \rho(A) \le n$$

لكن:

$$\rho(C) = \rho(AB) \le Min\{\rho(A), \rho(B)\} = \min\{\rho_1, \rho_2\}$$

وبالتالي فإن:

$$\rho(AB) \le n < m$$

وهذا يعني أن المصفوفة AB تكون شاذة.

16- أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} -10 & 15 \\ 22 & 33 \end{vmatrix}$ باستخدام الخاصة:

$$\det(\lambda \mathrm{A}) = \lambda n.\det \mathrm{A}$$

الحل: $\begin{vmatrix} -10 & 15 \\ 22 & 33 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 15 \\ 11 & 33 \end{vmatrix} = 22\begin{vmatrix} -5 & 15 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -110\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -330\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -330(2) = 660$

17 - لتكن $A,B \in M_{(3,3)}(R)$ حيث $B = \begin{bmatrix} -9 & 8 & 4 \\ 10 & -2 & 5 \\ 7 & -7 & 4 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ أثبت أن:

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

الحل:

$$\det A = -5(-2-2) - 3(-8-2) = 50$$
$$\det B = -9(-8+35) - 8(40-35) + 4(-70+14) = -507$$

$AB = \begin{bmatrix} 29 & 11 & 13 \\ 52 & -34 & 10 \\ 38 & -7 & 28 \end{bmatrix}$ ومنه $\det(AB) = -25350$

وكذلك فإن: $\det(A)\det(B) = -25350$ وبالتالي:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = -25350$$

$$\begin{vmatrix} -10 & 15 \\ 22 & 33 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 15 \\ 11 & 33 \end{vmatrix} = 22\begin{vmatrix} -5 & 15 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -110\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -330\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -330(2) = 660$$

18 - لتكن $A \in M_{(3,3)}(R)$ حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

أثبت أن:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

الحل:

$$\det A = -5(-2-2) - 3(-8-2) = 50$$

إن:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$\det(A^T) = 0(2-8) + 2(5+12) + 1(10+6) = 50$$

ومنه نجد:

$$\det\left(A\right) = \det(A^T) = 50$$

19- باستخدام خصائص المحددات أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

الحل:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

أضفنا العمود الثاني إلى الثالث ثم أخرجنا العامل المشترك من العمود الثالث مع الاستفادة من الخاصة (3).

20- باستخدام خصائص المحددات أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

أضفنا إلى الصف الثالث الأول والثاني وبإخراج العامل المشترك .وطرح الصف الثاني من الثالث وطرح الصف الثالث من الصف الأول. ثم طرح الصف الأول من الثاني وأخيراً جعل الصف الثالث أول الصفوف.

21-أثبت بدون فك:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = -(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$$

الحل:

نطرح الصف الثاني من الأول نجد:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^2 - a_2^2 & a_1 - a_2 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = (a_1 - a_2)\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & 1 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix}$$

استناداً إلى الخاصة (4) وإلى أن $a_1 - a_2$ عامل لـ $|A|$.أيضاً $a_2 - a_3$ و $a_3 - a_1$ عاملان وإن $|A|$ من الدرجة الثالثة فيكون: $|A| = -(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$

تمارين غير محلولة

1- بفرض لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

تحقق من أن: $A + (B - C) = (A + B) - C$

أوجد المصفوفة D بحيث يكون $A + D = B$ وتحقق من أن: $D = B - A = -(A - B)$

2- أثبت أن $AB = 0$ حيث :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3- بفرض لدينا:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -2 & -4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

تحقق من أن:

$AB=BA=0$ أيضاً $AC=A, CA=C$

4- تحقق من الخاصة التجميعية للضرب حيث:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 3 & -1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0 & -3\\ -1 & 2 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

5- أوجد الجداء في كل مما يأتي :

$$1)\begin{bmatrix}2 & -1 & 4\\ 5 & 1 & -2\\ -1 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 5\\ 2 & 2 & 7\end{bmatrix}\quad 2)\begin{bmatrix}1- & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1-\\ 0 & 3\end{bmatrix}\quad 3)\begin{bmatrix}1- & 0 & 3\\ 0 & 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 6\end{bmatrix}$$

$$4)\begin{bmatrix}2 & 1-\\ 4 & 3\\ 6 & 2-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2-\\ 0\end{bmatrix}\quad 5)\begin{bmatrix}2- & 0 & 1\\ 1 & 2- & 0\\ 0 & 1 & 2-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1- & 2\\ 3 & 1-\end{bmatrix}\quad 6)\begin{bmatrix}1- & 3 & 2\\ 3 & 2- & 1-\\ 6 & 5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-\\ 2\\ 3-\end{bmatrix}$$

6- ليكن لدينا A و B مصفوفتين حيث:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 5 & 3 & 0 & 1\\ 9 & 2 & 1 & 6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\end{bmatrix}$$

والمطلوب: أوجد $A+B, 2A, 2A+B$

7- ليكن لدينا:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

والمطلوب: أوجد المصفوفة D بحيث يكون $A+D=B$ وتحقق من أن:

$D=B-A=-(A-B)$

8- احسب AB إذا علمت :

1) $A=\left[\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&1\\\hline 0&0&1\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\\hline 1&1&0\end{array}\right]$

2) $A=\left[\begin{array}{cc|c}1&0&3\\0&1&2\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\\hline -1&2\end{array}\right]$

9- إذا كان:

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}-3&-2\\1&-5\\4&3\end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد $C=\begin{bmatrix}p&q\\r&s\\t&u\end{bmatrix}$ بحيث يكون:

$$A+B-D=0$$

10- بين أن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1&1+i&2+3i\\1-i&2&-i\\2-3i&i&0\end{bmatrix}$$

هرميتية.

11- بين أن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}i&1+i&2-3i\\-1+i&2i&1\\-2-3i&-1&0\end{bmatrix}$$

هرميتية متخالفة و المصفوفة iA هرميتية.

12- ليكن لدينا المصفوفة الهرميتية:

$$A=\begin{bmatrix}1&1-i&2\\1+i&3&i\\2&-i&0\end{bmatrix}$$

هل المصفوفة kA هرميتية إذا كان k عدد حقيقي ما ، وإذا كان k عدداً مركباً ما؟.

13- ليكن لدينا المصفوفة الهرميتية المتخالفة:

$$A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$$

هل المصفوفة kA هرميتية متخالفة إذا كان k عدداً حقيقياً ما ، وإذا كان عدداً مركباً ما، وإذا كان عدداً تخيلياً بحتاً.؟

14- ليكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أحسب A^2, A^3 ثم استنتج A^n .

15- إذا كانت A مصفوفة متساوية القوى فبرهن أن:

$B = I - A$ متساوية القوى

وأن: $AB = BA = 0$

16- إذا كان:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

بين أن A و B متساويتا القوى.

17- برهن أن:

1) $$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

2) $$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

18- أوجد رتبة كل من المصفوفات التالية:

$$1)\quad A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 2 & 5 & -4 & 6\\ -1 & -3 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -1 & 6\end{bmatrix}\qquad 2)\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 3 & 4\\ 3 & 7 & 4 & 6\end{bmatrix}\qquad 3)\quad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 5 & 1\\ 1 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

19- أوجد مقلوب كل من المصفوفتين:

$$1)\quad A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ 4 & -3 & -3\\ 4 & -1 & 0\end{bmatrix}\qquad 2)\quad B=\begin{bmatrix}2 & 4 & 3 & 2\\ 3 & 6 & 5 & 2\\ 2 & 5 & 2 & -3\\ 4 & 5 & 14 & 14\end{bmatrix}$$

20- أوجد مقلوب كل من المصفوفتين:

$$1)\quad A=\begin{bmatrix}3 & -2 & -1\\ -4 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad 2)\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 8 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

21- أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 3 & 2\\ 3 & 6 & 5 & 2\\ 2 & 5 & 2 & -3\\ 4 & 5 & 14 & 14\end{bmatrix}$$

وذلك بتطبيق التحويلات الأساسية على صفوفها.

22- أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

وذلك بتطبيق التحويلات الأساسية على صفوفها.

23- أوجد مقلوب كل من المصفوفات التالية وذلك باستخدام مبرهنة " كيلي هاملتون ":