الفصل الأول

الحمولات والمساند

1-1 تعريف وهدف علم مقاومة المواد:

يهتم هذا العلم بالأجسام الحقيقية الصلبة ويهدف بشكل أساسي إلى التطبيق العملي لها وهو يعني مقاومة المنشآت ومن ناحية أخرى التشوهات المحدودة ضمن شروط الاستخدام. ويتوجب على هذا العلم تحقيق منشآت اقتصادية. ويأخذ هذا العلم بعين الاعتبار نوعين من المسائل:

1- حساب المقاطع　　　　2- التحقق من المقاطع

1-2 الفرضيات الأساسية في علم مقاومة المواد:

1- **تركيب المادة:** نعتبر أن المادة تتضمن تركيباً حبياً وأن التركيب الإنشائي للمادة ذو استمرارية أي دون انقطاع ونفترض أن المادة متجانسة أي أن تركيبها وخواصها واحدة في كامل مقاطعها وأجزائها.

2- **القوى الداخلية والإجهادات:** نفترض وجود نظام من القوى الداخلية التي تعتبر مساوية للصفر في حالة التوازن. ولكن عند قطع العنصر تظهر بشكل قوى متساوية ومتعاكسة. أما الإجهاد فهو عبارة عن القوى المطبقة على الجسم مقسومة على مساحة المقطع العرضي وتقدر بـ kg/cm .

3- **مبدأ التشوهات المرنة:** حيث فرضية المقاطع المستوية تبقى مستوية بعد التشوه الحاصل للعنصر تحت تأثير الحمولات الخارجية.

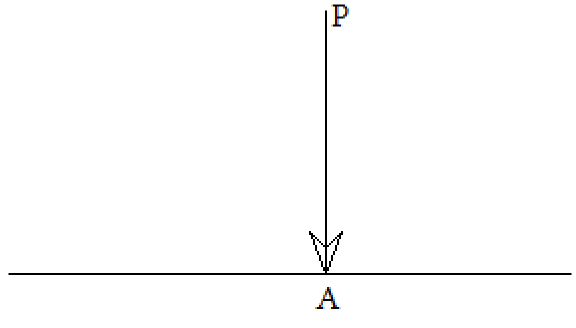
1-3 الحمولات المطبقة على المنشآت:

وهي عبارة عن القوى المؤثرة على المنشأ ويمكن تصنيفها إما حسب شكل توزيعها أو حسب طبيعة تأثيرها

أ- تصنيف الحمولات حسب شكل التوزيع

1- الحمولات المركزة Concentrated Loads:

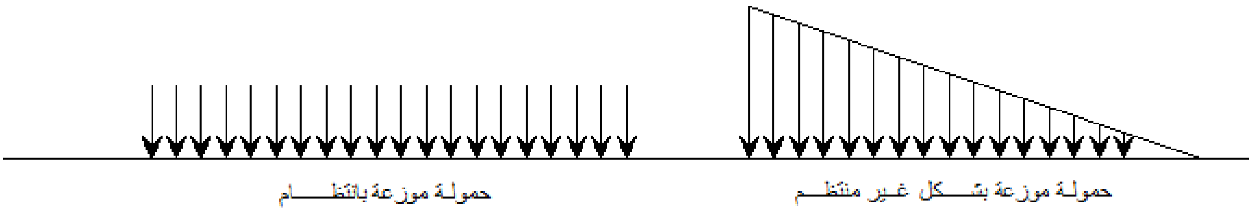
وتؤثر عند نقطة معينة وفي اتجاه محدد ، الشكل (1-1)



الشكل (1–1)

2– <u>الحمولات الموزعة</u>   <u>Distributed Loads:</u>

ويمتد تأثيرها على منطقة واسعة من المنشأ ولا يقتصر على نقطة واحدة . وتكون إما موزعة بانتظام أو موزعة بشكل غير منتظم. ، الشكل (1–2)



الشكل (1–2)

<u>ب – تصنيف الحمولات حسب طبيعة التأثير:</u>

1– **الحمولات الدائمة (Dead Loads)** :

وهي حمولات لا تتغير قيمتها أو موقعها مع مرور الزمن وتشمل الوزن الذاتي لمختلف العناصر في المنشأ وجميع الحمولات التي لها صفة الاستمرار كدفع المياه والتربة وحمولة التغطية.

2– **الحمولات الحية (Live Loads):**

وهي الحمولات التي تزول بزوال المسبب وليس لها استمرار كوزن الثلج وحمولة الرياح وحمولة الأشخاص في الأبنية وحمولة العربات والقاطرات في الجسور.

كما تصنف حسب تطبيقها إلى: حمولات مركزة وحمولات موزعة

<u>1–3 المساند وردود الأفعال:</u>

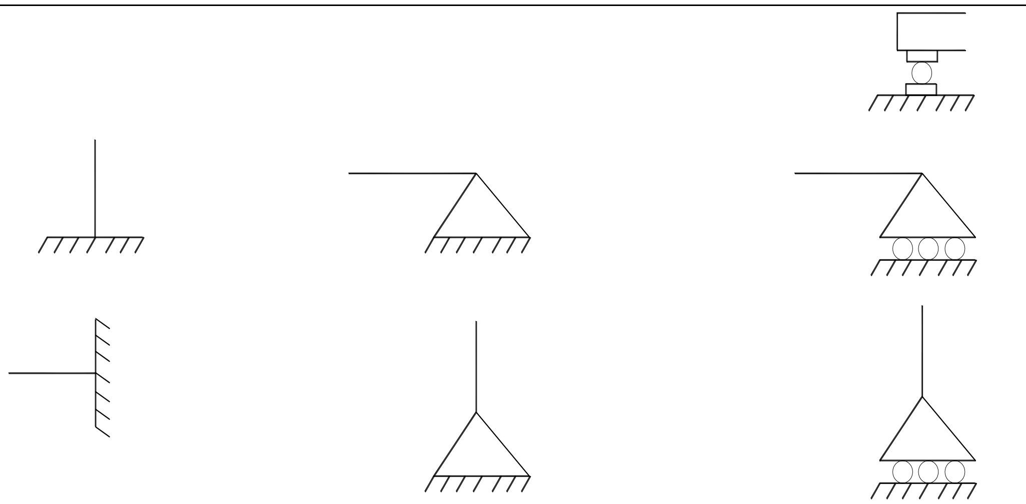
1– **المسند المتدحرج:** وله رد فعل واحد عمودي عليه أي عمودي على سطح الاستناد ويسمح بالدوران والانتقال الأفقي.

2– **المسند الثابت (المسماري)** : وله ردي فعل أي لا يسمح بالحركة الأفقية ولا الشاقولية ويسمح بالدوران فقط.

3– **المسند الموثوق (الوثاقة):** ولها ثلاثة ردود أفعال أي تمنع الانتقال الأفقي والشاقولي والدوران. ويبين الشكل (1–4) أنواع المساند السابقة الذكر.

وحتى تكون الجملة مقررة يجب أن تحقق معادلات التوازن الثلاث أي:

$$\sum x = 0 \qquad \sum y = 0 \qquad \sum M = 0$$



مسند متدحرج   مسند ثابت   وثاقة

الشكل (1-4)

الفصل الثاني

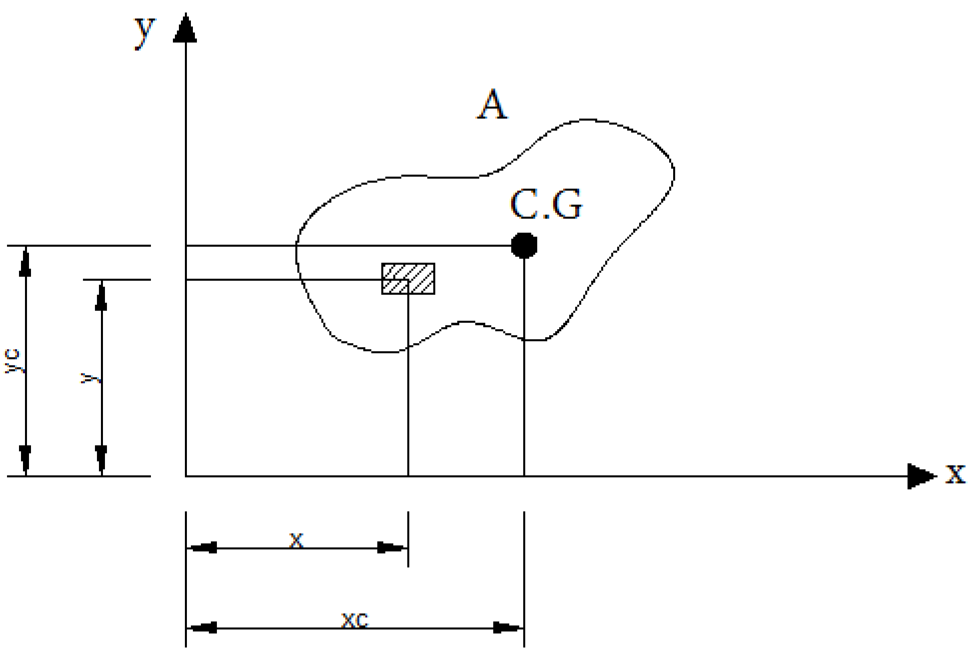
الخواص الهندسية للمقاطع المستوية

1-2 مراكز الثقل Center of Gravity:

لتعيين إحداثيي مركز ثقل المساحة A الكائنة في المستوي $(x \ , y)$ ، إذا كانت $d\,A$ مساحة عنصر صغير احداثيات مركزه $(x_c \ , \ y_c)$ فإن المساحة الكلية للشكل تعطى بالتكامل التالي:

$$A = \int_A dA$$

انظر الشكل (2-1)



الشكل (2-1)

إن احداثيات مركز ثقل المساحة A يمكن تحديدها من العلاقتين:

$$x_c = \frac{\int_A x \, dA}{\int_A dA} = \frac{\int_A x \, dA}{A} = \frac{S_y}{A}$$

$$y_c = \frac{\int_A y \, dA}{\int_A dA} = \frac{\int_A y \, dA}{A} = \frac{S_x}{A}$$

$$S_y = \int_A x \, .dA$$

ويسمى بالعزم التوازني للمساحة A أو العزم الستاتيكي بالنسبة للمحور y .

$$S_x = \int_A y \, .dA$$

ويسمى بالعزم التوازني للمساحة A أو العزم الستاتيكي بالنسبة للمحور x . ويعرف كما يلي:

العزم الستاتيكي للمقطع: هو عبارة عن المساحة المعتبرة مضروبة بذراع مركز ثقلها عن المحور المحايد أو السليم . ويعطى العزم الستاتيكي لشكل مركب بالعلاقة:

$$S_x = S_{x1} + S_{x2} + S_{x3} \quad , \quad S_y = S_{y1} + S_{y2} + S_{y3}$$

ويعطى العزم الستاتيكي لشكل مفرغ بالعلاقة:

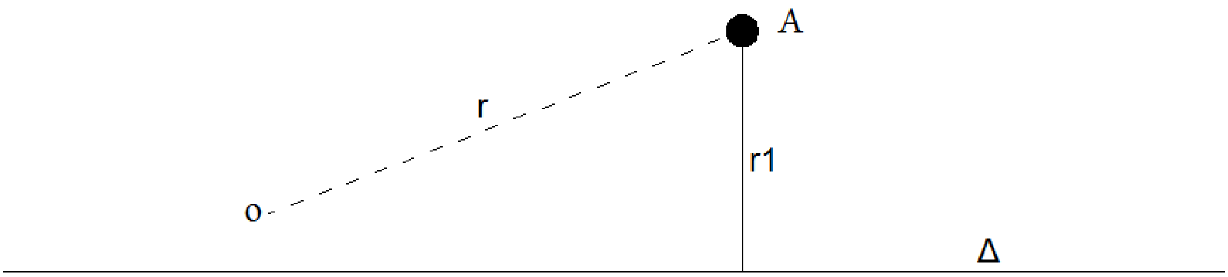
$$S_x = S_{x1} - S_{x2} \quad , \quad S_y = S_{y1} - S_{y2}$$

إن مركز ثقل المساحة التي لها محوري تناظر ينطبق على نقطة تقاطع هذين المحورين. وإن مركز ثقل المساحة التي لها محور تناظر واحد يقع على هذا المحور. وإذا ما كانت المساحة متناظرة حول نقطة فإن مركز الثقل ينطبق على هذه النقطة حتى إذا لم يكن لها محورا تناظر.

2–2 عزوم العطالة Moment of Inertia:

2–2–1 عزم عطالة نقطة مادية

إذا كان لدينا نقطة A كتلتها m وكان هناك نقطة مثل o ، الشكل(2–2) . نسمي جداء كتلة هذه النقطة بمربع بعدها عن النقطة o : عزم عطالة النقطة A بالنسبة لـ o ونرمز له بالرمز I_o ويكون:



الشكل(2−2)

$$I_0 = m \cdot \left(\overrightarrow{oA}\right)^2$$

$$\left(\overrightarrow{oA}\right) = r \qquad \Rightarrow \qquad I_o = m \cdot r^2$$

إذا كان لدينا نقطة مادية A كتلتها m وكان هناك مستقيم Δ. نسمي جداء كتلة النقطة بمربع بعدها عن المستقيم عزم عطالة هذه النقطة بالنسبة للمستقيم ونرمز له بالرمز I_Δ :

$$I_\Delta = m \cdot r_1^2$$

حيث: r_1 بعد النقطة عن المستقيم. ونلاحظ أن عزم العطالة كمية موجبة أو صفر لأن الكتلة عدد موجب ومربع المسافة عدد موجب. ونسمي k نصف قطر العطالة (التأرجح): $k = \sqrt{\dfrac{I}{m}}$

2-2-2 عزم العطالة لسطح مستو بالنسبة لمحور واقع ضمن مستويه:

إن عزم العطالة للسطح A في الشكل السابق (2−1) بالنسبة للمحور x يعطى بالعلاقة:

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$$

وعزم العطالة بالنسبة للمحور y :

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA$$

حيث dA مساحة شريحة من العنصر ويقدر عزم العطالة بـ cm^4.

أما عزم العطالة بالنسبة لمحور عمودي على السطح المستوي فيدعى بعزم العطالة القطبي ، فإذا ما اعتبرنا هذا المحور يمر من مبدأ الاحداثيات O يمكننا أن نكتب:

$$I_p = \int_A r^2 \cdot dA = \int_A \left(x^2 + y^2\right) \cdot dA = I_x + I_y$$

حيث r هي مسافة المساحة العنصرية dA عن نقطة تقاطع المحورين الاحداثيين y , x وبما أن:

$$r = x^2 + y^2$$

بحسب فيثاغورث ، يمكننا أن نكتب:

$$I_p = \int_A r^2 \cdot dA = \int_A \left(x^2 + y^2\right) \cdot dA = I_x + I_y$$

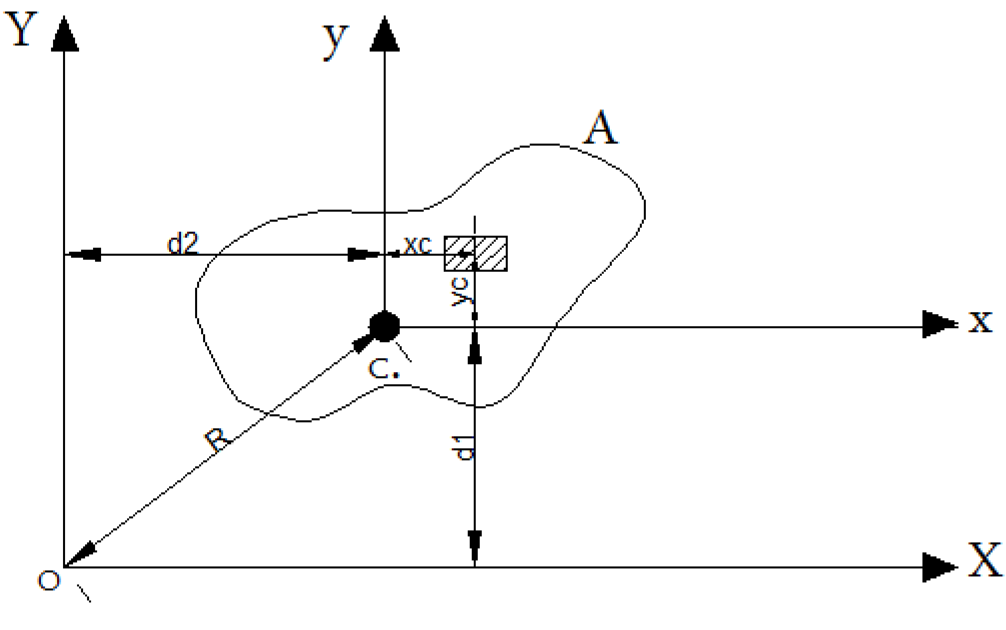
إذاً عزم العطالة القطبي بالنسبة لنقطة O هو عبارة عن مجموع عزمي العطالة بالنسبة لمحورين احداثيين x , y متقاطعين في هذه النقطة.

<u>3-2-2 نظرية المحور الموازي:</u>

لنعتبر المساحة A ولتكن (x , y) جملة المحاور الاحداثية القائمة والتي تمر من النقطة C مركز ثقل المساحة A . ولتكن (X, Y) جملة محاور احداثية تمر من النقطة O وتوازي جملة المحاور الاحداثية السابقة وتبعد عنها بالمسافات d_2 , d_1 كما في الشكل (2-3).

إن عزم عطالة المساحة A بالنسبة للمحاور (X, Y) هي :

$$I_X = \int_A y^2 dA = \int_A (y_c + d_1) dA = \int_A {y_c}^2 dA + 2d_1 \int_a y_c dA + {d_1}^2 \int_A dA$$



الشكل (2-3).

ولكن:

$$\int_A {y_c}^2 dA = I_{xc}$$

و :

$$\int_A y_c \, dA = 0$$

لأن العزم التوازني بالنسبة لمركز الثقل يساوي الصفر.

$$\int_A dA = A$$

ومنه نجد أن :

$$I_X = I_{xc} + A.{d_1}^2$$

وبنفس الطريقة نجد أن :

$$I_Y = I_{Yc} + A.{d_2}^2$$

أي أن عزم العطالة لسطح ما بالنسبة لمحور واقع في مستوي هذا السطح يساوي عزم العطالة لمحور موازي للمحور المعتبر ويمر من مركز ثقل هذا السطح مضافاً إليه جداء مساحة السطح المعتبرة بمربع البعد بين المحورين.

أما عزم العطالة القطبي للمساحة A بالنسبة للنقطة O فهو:

$$\begin{aligned} I_{po} &= I_X + I_Y = I_{xc} + I_{yc} + A.{d_1}^2 + A.{d_2}^2 \\ &= I_{xc} + I_{yc} + A\left({d_1}^2 + {d_2}^2\right) \\ &= I_{PC} + AR^2 \end{aligned}$$

فعزم العطالة القطبي للمساحة A بالنسبة للنقطة O يساوي عزم العطالة القطبي بالنسبة لمركز الثقل C مضافاً إليه جداء المساحة بمربع البعد بين النقطتين O و C .

<u>2-3 جداء العطالة:</u>

إن جداء عطالة المساحة A بالنسبة للمحورين x و y هو بالتعريف:

$$I_{xy} = \int_A x \, y \, dA$$

ويلاحظ أنه خلافاً لعزم العطالة الذي هو كمية موجبة دوماً ، فإن جداء العطالة يمكن أن يكون موجباً أو سالباً وينعدم أيضاً ، وذلك حسب موقع المحورين x و y من المساحة المعتبرة .

بمعرفة جداء العطالة بالنسبة لمحورين احداثيين x و y يمران من مركز الثقل C يمكن حساب جداء العطالة بالنسبة لمحورين احداثيين X و Y موازيين لـ x و y ويبعدان عنهما بالمسافة d_1 , d_2 على التوالي. كالآتي:

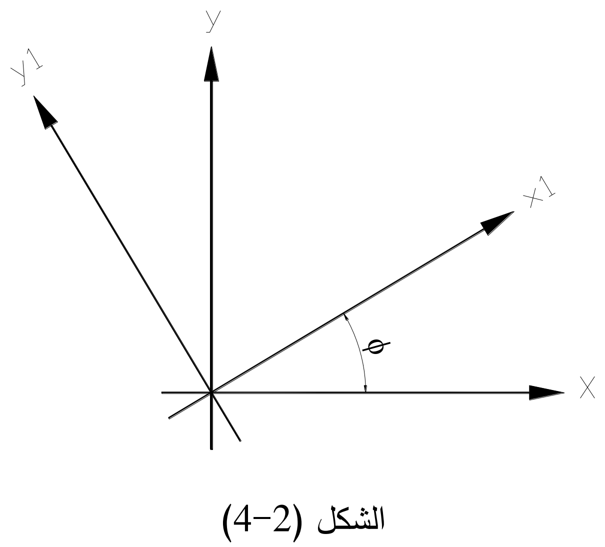
$$\begin{aligned} I_{XY} &= \int_A (x_c + d_2).(y_c + d_1) dA \\ &= \int_A x_c \, . y_c dA + d_1 \int_a x_c \, dA + d_2 \int_a y_c \, dA + d_1 d_2 \int_A dA \\ &= I_{XcYc} + A. \, d_1 \, d_2 \end{aligned}$$

والعلاقة الأخيرة تعبر عن نظرية المحاور المتوازية بالنسبة لحساب جداء العطالة.

أي أن كل عنصر من السطح يضرب بجداء إحداثياته. ونلاحظ أن جداء العطالة بالنسبة لمحورين مارين من مركز ثقل الجسم يساوي الصفر. وتدعى هذه المحاور حينئذ بالمحاور الرئيسية (محورا تناظر الجسم).

3-2 العلاقة بين عزوم العطالة بالنسبة لمحاور ديكارتية ناتجة عن دوران محاور أخرى معروفة:

يبين الشكل التالي(2-4) جملة محاور احداثية x و y وجملة محاور أخرى $x1$ و $y1$ ناتجة عن دوران الأولى بزاوية قدرها ϕ . وتبين المعادلات التالية العلاقة بين عزوم العطالة بالنسبة للمحاور الأساسية والمحاور الجديدة.



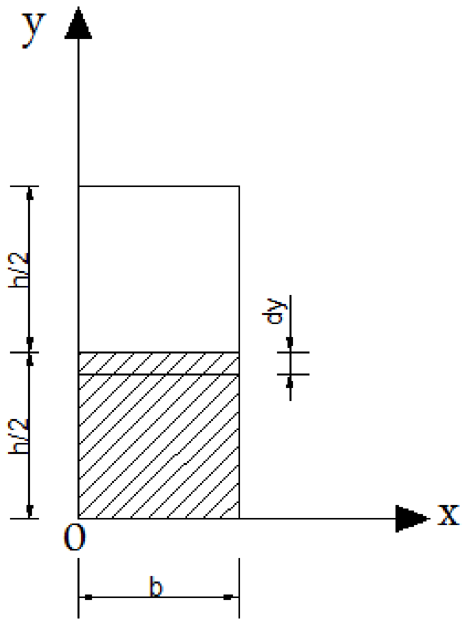
الشكل (2-4)

$$I_{x1} = I_x \cos^2\varphi + I_y \sin^2\varphi - I_{xy} \sin^2\varphi$$
$$I_{y1} = I_y \cos^2\varphi + I_x \sin^2\varphi + I_{xy} \sin^2\varphi$$
$$I_{x1y1} = \frac{(I_x + I_y)}{2} \sin^2\varphi + I_{xy} \cos^2\varphi$$
$$tg^2\varphi = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

حيث: X_1 , Y_1 المحاور بعد الدوران ، X , Y المحاور قبل الدوران ، φ زاوية الدوران.

4-2 أمثلة:

مثال (1) : المطلوب إيجاد العزم الستاتيكي للجزء المهشر من المستطيل ثم العزم الستاتيكي



للمستطيل كله بالنسبة للمحور x .

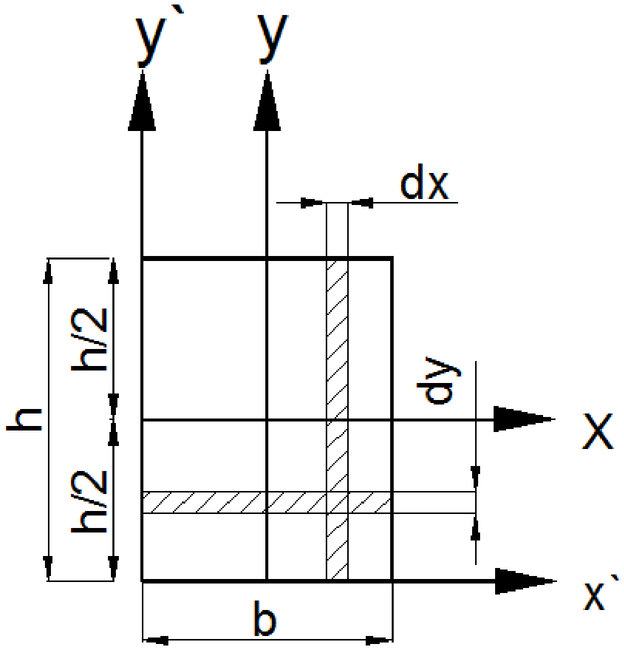
الحل:

– للجزء المهشر

$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_A y \cdot b\,dy = b\int_A y \cdot dy = b\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{h}{2}} = b\frac{\frac{h^2}{4}}{2} = \frac{bh^2}{8}$$

– لكامل المستطيل: $S_x = A\, y_c = b\, h\, \frac{h}{2} = \frac{b h^2}{2}$

مثال (2): المطلوب إيجاد عزم العطالة للمستطيل المبين بالنسبة لمحور مار من مركز ثقله ثم بالنسبة لمحور مار من القاعدة.



الحل:

– عزوم العطالة حول المحاور المارة من مركز الثقل:

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 \cdot b\, dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b}{3}\left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right) = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} x^2 \cdot h\, dx = h\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} = \frac{h}{3}\left(\frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8}\right) = \frac{hb^3}{12}$$

عزوم العطالة حول المحور المار من القاعدة:

$$I_{x`} = \int_A y^2 \cdot dA = \int_0^h y^2 \cdot b\, dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{b}{3}\left(h^3 - o\right) = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{y`} = \int_A x^2 \cdot dA = \int_0^b x^2 \cdot h\, dx = h\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b = \frac{h}{3}\left(b^3 - 0\right) = \frac{hb^3}{3}$$

ويمكن أيضاً استخدام نظرية المحور الموازي:

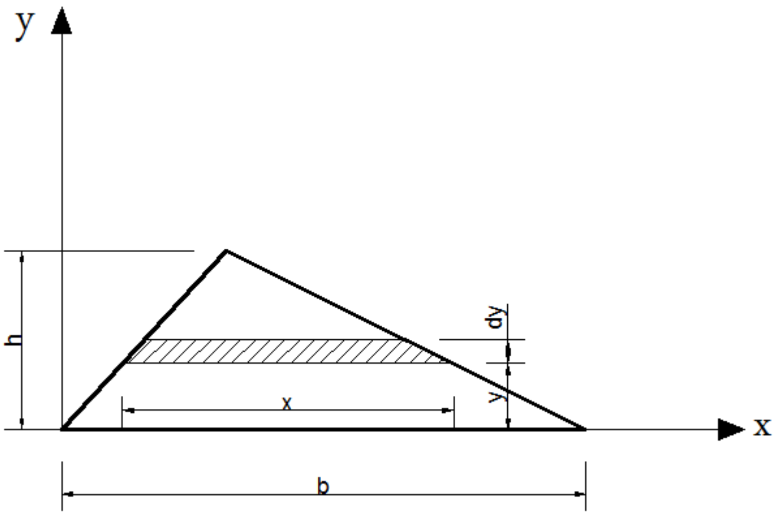
$$I_{x`} = I_x + A y^2 = \frac{b\,h^3}{12} + b\,h\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{b\,h^3}{3}$$

$$I_{y`} = I_y + A x^2 = \frac{h\,b^3}{12} + b\,h\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{h\,b^3}{3}$$

مثال (3) احسب عزم عطالة مثلث بالنسبة لقاعدته ، ثم لمحور يوازي قاعدته ويمر من مركز ثقله.

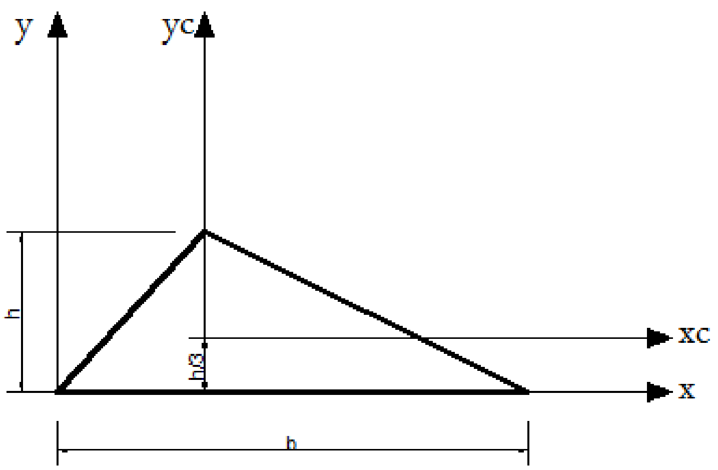
الحل:

- عزم العطالة بالنسبة للقاعدة:



$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_A y^2 x.dy$$
$$= \int_0^h y^2 . \frac{b(h-y)}{h}\, dy$$
$$= \frac{b}{h}\left[\frac{hy^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h$$
$$= \frac{bh^3}{12}$$

- عزم العطالة بالنسبة لمحور يوازي القاعدة ويمر بمركز الثقل:

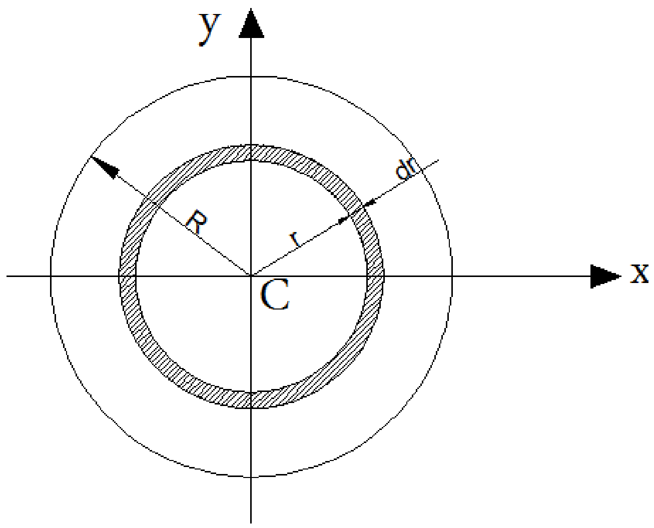


$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_x = I_{xc} + Ad^2 \Rightarrow I_{xc} = I_x - Ad^2$$

$$I_{xc} = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{36}$$

مثال (4): احسب عزم العطالة القطبي لدائرة نصف قطرها R بالنسبة لمركزها ، ثم عزم العطالة لمحورين متعامدين يتقاطعان في مركز الدائرة.



<u>**الحل:**</u>

$$I_p = \int_A r^2\, dA = \int_0^R r^2 \,.\, 2\pi r\, dr$$

حيث :

$$dA = \int_0^{2\pi} r.d\theta.dr = 2\pi\, r\, dr$$

$$I_p = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$= \frac{\pi R^4}{2}$$

وبما أن :

$$I_p = I_x + I_y$$

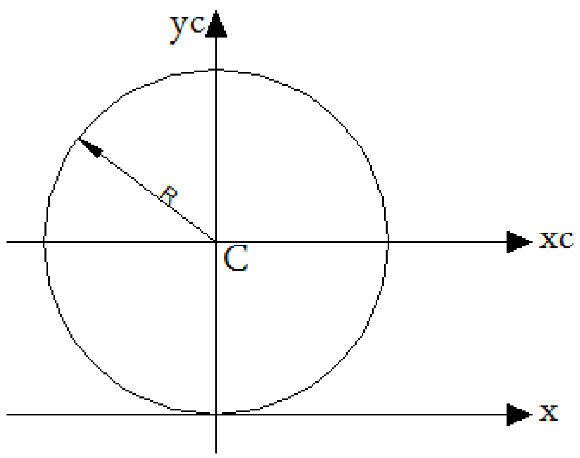
وبسبب التناظر فإن :

$$I_p = I_x = I_y$$

فإن :

$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

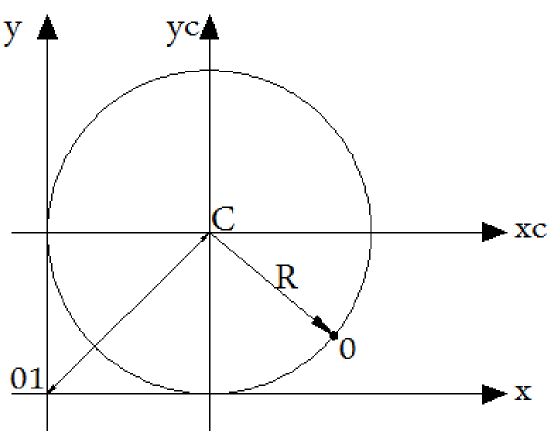
مثال (5): احسب عزم عطالة الدائرة بالنسبة للمستقيم المماس لها.



الحل:

$$I_x = I_{xc} + Ad^2$$
$$= \frac{\pi.R^4}{4} + \pi.R^2.R^2 = \frac{\pi.R^4}{4} + \pi.R^4$$
$$= \frac{5.\pi.R^4}{4}$$

مثال (6): احسب عزم العطالة القطبي للدائرة بالنسبة لنقطة من محيطها ثم لنقطة تقاطع مماسين متعامدين.

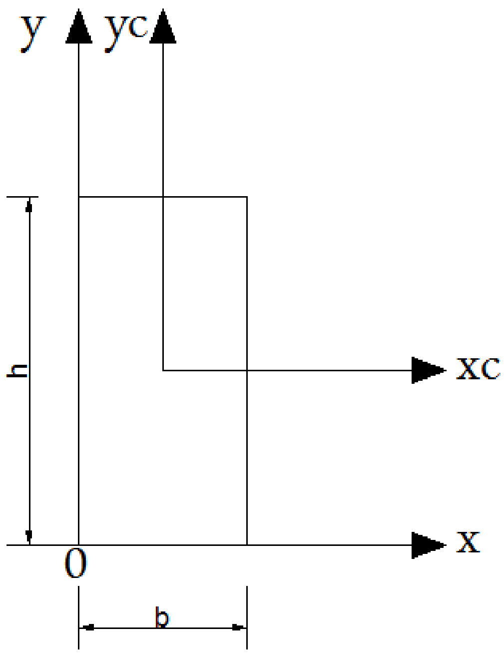


الحل:

$$I_{P0} = I_{PC} + A.R^2 = \frac{\pi.R^4}{2} + \pi.R^2.R^2 = \frac{3\pi.R^4}{2}$$

$$I_{P01} = I_{PC} + A.\left(R\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\pi.R^4}{2} + \pi.R^2.2R^2 = \frac{5\pi.R^4}{2}$$

مثال (7): أوجد عزم عطالة المستطيل بالنسبة للقاعدة b ثم بالنسبة للارتفاع h ثم بالنسبة للنقطة o . ثم احسب جداء العطالة بالنسبة للمحاور (x , y).



__الحل:__

– عزوم العطالة:

$$I_x = I_{xc} + A.d^2$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_y = I_{yc} + A.d^2$$

$$= \frac{hb^3}{12} + bh\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{hb3}{3}$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{bh^3}{3} + \frac{hb^3}{3} = bh\left(\frac{b^2+h^2}{3}\right)$$

– جداء العطالة:

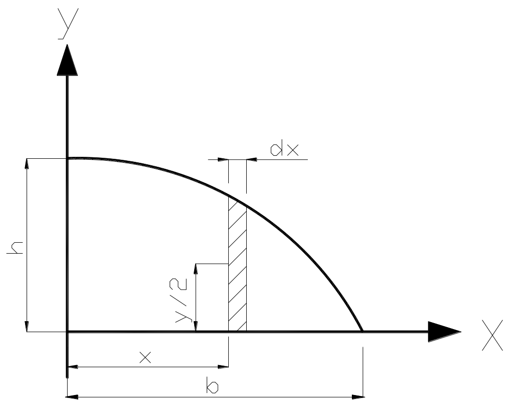
$$I_{xy} = I_{xcyc} + A.d_1.d_2$$

$$I_{xcyc} = 0$$

$$A = bh \;\;,\;\; d_1 = \frac{h}{2} \;\;,\;\; d_2 = \frac{b}{2}$$

$$I_{xcyc} = bh.\frac{h}{2}.\frac{b}{2} = \frac{b^2.h^2}{4}$$

مثال (8) : المطلوب حساب المساحة A وعزمي المساحة S_x , S_y وإحداثيات مركز الثقل للمقطع المكافئ المبين في الشكل والذي معادلته: $y = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)$.



<u>الحل:</u>

$$A = \int_A dA = \int_0^b y\,dx = \int_0^b h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)dx = h\left[x - \frac{x^3}{3b^2}\right]_0^b = h\left(b - \frac{b^3}{3b^2}\right) = \frac{2}{3}bh$$

$$S_y = \int_A x\,dA = \int_0^b x \cdot y\,dx = \int_0^b x \cdot h \cdot \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)dx = h\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4b^2}\right]_0^b = \frac{hb^2}{4}$$

$$S_x = \int_A \frac{y}{2}dA = \frac{1}{2}\int_0^b y \cdot y\,dx = \int_0^b h^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)^2 dx = \frac{h^2}{2}\left[x - \frac{2x^3}{3b^2} + \frac{x^5}{5b^4}\right]_0^b = \frac{4h^2b}{15}$$

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{hb^2}{4}}{\frac{2hb}{3}} = \frac{3}{8}b \quad , \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{4bh^2}{15}}{\frac{2hb}{3}} = \frac{2}{5}h$$

الشد والانضغاط

Tension and Compresion

1–3 علاقات عامة:

إذا تعرضت عينة اختبار معدنية متجانسة إلى قوة محورية P في اتجاه المحور x المنطبق على المحور الطولي للعينة ، تكون الاجهادات المتولدة على سطح المقطع العرضي الذي مساحته A عبارة عن اجهاد ناظمي يعطى بالعلاقة:

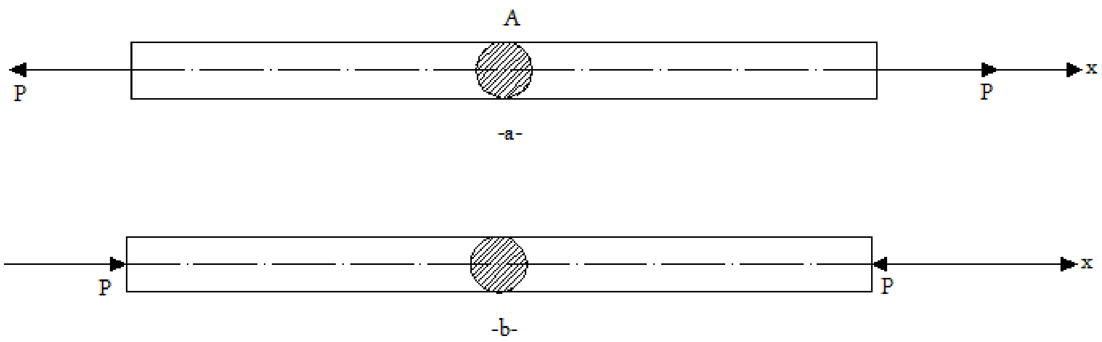
$$\sigma_X = \frac{P}{A} \qquad (1-3)$$

حيث :

P : القوة المطبقة kg أو ton .

A : مساحة المقطع العرضي للعينة cm^2.

ويكون الاجهاد موجباً حين تتعرض عينة الاختبار إلى شد ، الشكل (1–3–a) وسالباً حين تتعرض العينة إلى ضغط ، الشكل (1–3–b).



الشكل (1–3)

وفي مجال المرونة وحسب قانون هوك فإن الانفعال الطولي ε_X في اتجاه المحور x يعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon_X = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma_x}{E} \qquad (2-3)$$

حيث:

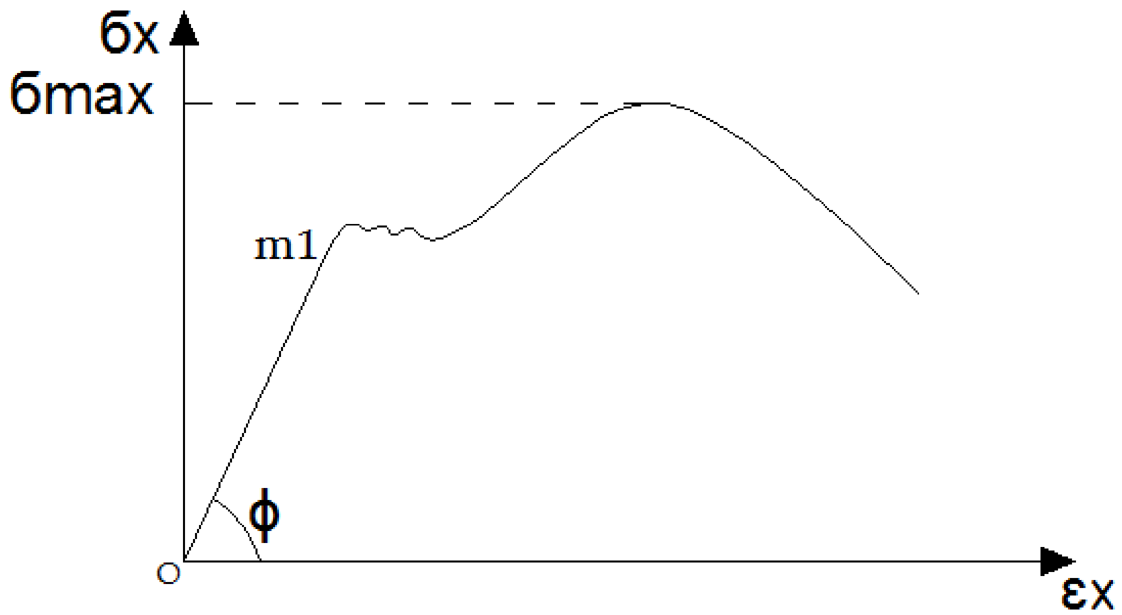
ε_X : الانفعال الطولي.

Δl : قيمة التطاول.

l : طول العينة.

σ_X : الاجهاد.

E : معامل مرونة العينة أو معامل يونغ. ويعبر عن ميل المستقيم om1 في مخطط الاجهاد – الانفعال للعينة المعدنية المختبرة ، الشكل (3−2) .



الشكل(3−2)

$$tg\phi = E = \frac{\sigma_X}{\varepsilon_X}$$

ويرافق الانفعال الطولي انفعال عرضي في كل من الاتجاهين المتعامدين عليه وهما:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\,\varepsilon_x \qquad (3-3)$$

حيث:

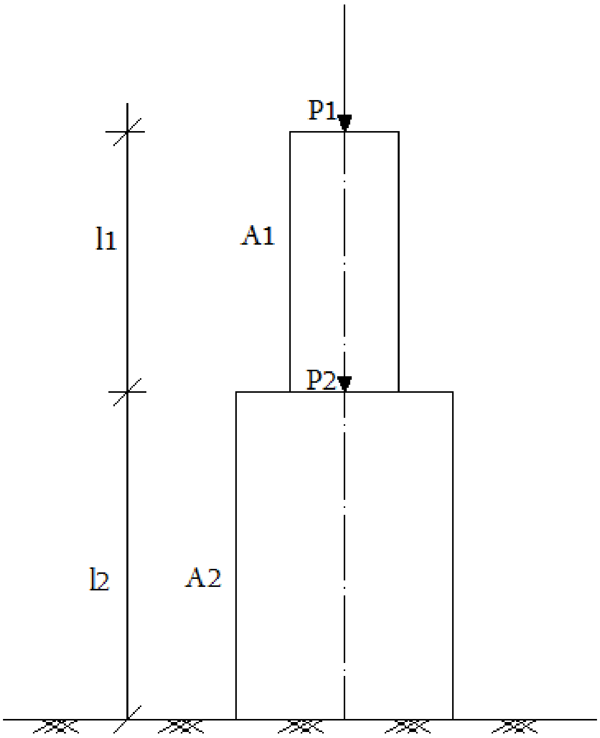
ε_x , ε_z : الانفعال العرضي بالاتجاهين y و z على التوالي.

ν : عامل بواسون وهو إحدى الخواص الميكانيكية للمادة.

ويعطى التغير في طول العينة أو التطاول بالعلاقة:

$$\Delta l = \varepsilon_x l = \frac{\sigma_x}{E} .\ l = \frac{P.l}{E.A} \qquad (4-3)$$

إذا كان القضيب مؤلفاً من مساحات مقاطع مختلفة أو تؤثر عليه قوى متغيرة كما في الشكل (4-3)

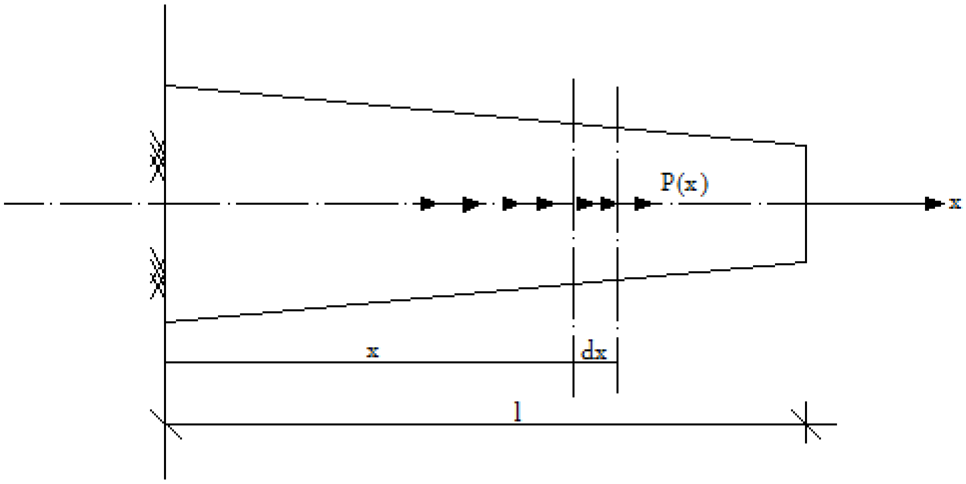


الشكل (4-3).

يعطى التطاول الكلي بالعلاقة:

$$\Delta l_{tot} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P_i \ .\ l_i}{E_i \ .\ A_i} \qquad (5-3)$$

وإذا كان مقطع القضيب أو القوى التي تؤثر عليه متغيرة بصورة مستمرة على الطول l ، كما في الشكل (5-3).



الشكل (3-5)

يحسب التطاول الذي يعانيه عنصر طولي ، طوله (dx) يقع على بعد x من النهاية الثابتة من العلاقة:

$$\Delta(dx)=\frac{P_{(x)}.\,dx}{E_{(x)}\,.\,A_{(x)}}=\frac{\sigma_x}{E_x}\,.dx \qquad (6-3)$$

حيث:

$P_{(x)}$: القوة التي يتعرض لها المقطع الكائن على بعد x من الطرف الثابت ، وهي تابع لــ x .

$A_{(x)}$: مساحة المقطع المعتبر وهي تابع لــ x أيضاً

$E_{(x)}$: عامل يونغ للمقطع الكائن على بعد x ويمكن أن يكون في الحالة العامة تابعاً لــ x .

أما التطاول الكلي للقضيب فيعطى بالتكامل التالي:

$$\Delta l=\int_0^l \frac{P_{(x)}.\,dx}{E_{(x)}\,.\,A_{(x)}} \qquad (7-3)$$

3-2 الاجهادات المتولدة عن تغير درجة الحرارة:

حين تتغير درجة الحرارة للجوائز المقررة لا تتولد ضمنها أي اجهادات بسبب هذا التغير. لأن مثل هذه الجوائز تستطيع أن تتطاول أو تتقاصر دون أي عائق. إلا أن تغير درجة الحرارة للجوائز غير المقررة

أي التي لا تستطيع أن تتطاول أو تتقاصر بحرية يولد ضمنها اجهادات تدعى الاجهادات الحرارية.

فحين تتغير درجة حرارة الجائز البسيط الشكل (a –3 – 6) بمقدار Δt سوف يتغير طوله بمقدار :

$$\Delta l = \alpha . \ l \ . \Delta t \qquad (8-3)$$

حيث :

α : عامل التمدد الحراري لمادة الجائز.

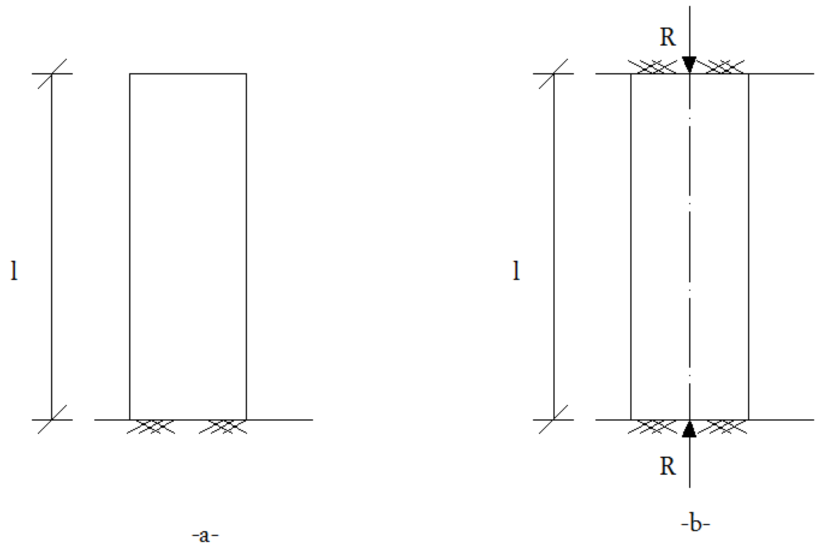
l : طول الجائز.

أما إذا تغيرت درجة حرارة الجائز الموثوق من طرفيه ، الشكل (6–3–b) بالمقدار Δt فسوف تمنعه الوثاقة من التمدد الذي كان محققاً فيما لو كان حراً.

فلكي تستطيع الوثاقة أن تمنع الجائز من التمدد فإنها يجب أن تؤثر عليه بقوة خارجية (رد فعل) R ، يمكن تحديد قيمته من كتابة : أن التقاصر الذي تولده هذه القوة الضاغطة يكون مساوياً للتطاول الناجم عن تغير درجة الحرارة أي:

$$\Delta l = \alpha . l \ . \Delta t = \frac{R \ . \ l}{E . A}$$

$$\Rightarrow \quad R = \alpha . E . A . \Delta t \qquad (9-3)$$



الشكل (6–3)

ويكون الاجهاد المتولد في ألياف مقطع الجائز في الاتجاه الطولي هو:

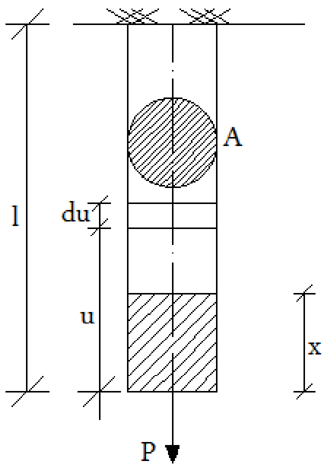
$$\sigma = \frac{R}{A} = \alpha . E . \Delta t \qquad (10-3)$$

وهكذا فإن تغير درجة حرارة الجوائز غير المقررة يولد اجهادات ضمن هذه الجوائز حتى ولو أنها غير محملة بقوى خارجية.

3-3 أمثلة على الشد والانضغاط:

مثال (1) :

قضيب ذو مقطع ثابت A يتعرض إلى قوة مطبقة في طرفه P ووزنه الذاتي أيضاً ، الشكل (3- 7) . والمطلوب : حساب الاجهادات والانتقالات في مقاطع القضيب باعتبار أن وزن واحدة الحجم من القضيب هي γ



الشكل (3-7)

الحل:

القوة التي يتعرض لها المقطع الكائن على بعد x من الطرف الحر للقضيب تعطى بالعلاقة :

$$N_{(x)} = P + \gamma . A . x \qquad (11-3)$$

وبالتالي فإن اجهاد الشد الذي يتعرض له المقطع:

$$\sigma_{\max} = \frac{P+\gamma . A.x}{A} = \frac{P}{A} + \gamma . x \qquad (12-3)$$

وهكذا تتغير القوة ويتغير الاجهاد على طول القضيب كما في الشكل $(3-8)$.

ويلاحظ أن الاجهاد يتغير تغيراً خطياً على طول القضيب. والمقطع الذي يتعرض للاجهاد الأعظمي يقع عند الوثاقة وقيمة هذا الاجهاد تعطى بالعلاقة:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \gamma . l$$

حيث قيمة الاجهاد الذي يتعرض له القضيب في مقطع ما تحت تأثير ثقله فقط

$$\sigma_{\max} = \gamma . x$$

وفي المقطع الحرج:

$$\sigma_{\max} = \gamma . l$$

فإذا كان الاجهاد المسموح به لمادة القضيب أو الحبل σ_{all} يكون الطول الأعظمي المسموح به للحبل قبل أن ينهار تحت تأثير وزنه الذاتي فقط هو :

$$l_{\max} = \frac{\sigma_{all}}{\gamma}$$

ويلاحظ من العلاقة $(3-11)$ و العلاقة $(3-12)$ أن كلا من القوة $N_{(x)}$ والاجهاد $\sigma_{(x)}$ عبارة عن مجموع حدين: حد ناتج عن تأثير الوزن الذاتي وحد ناتج عن تأثير القوة P . وهذا طبيعي حسب مبدأ تنضد الآثار.

إن تطاول القضيب يمكن حسابه بسهولة باستعمال مبدأ تنضد الآثار أيضاً.

فالتطاول الكلي للقضيب يكون عبارة عن مجموع التطاول الناتج عن تطبيق القوة الخارجية P مع التطاول الناتج عن الوزن الذاتي.

فانتقال المقطع الكائن على بعد x من النهاية الحرة يكون مساوياً إلى تطاول الجزء الذي يعلوه والذي طوله $(l-x)$. فتحت تأثير القوة P يكون تطاول الجزء المحصور بين النهاية الثابتة والمقطع x معطى بـــ :

$$\Delta l_1 = \frac{P(l-x)}{E\ .\ A} \qquad (13-3)$$

ولحساب التطاول تحت تأثير الوزن الذاتي : لنعتبر مقطعاً يبعد بمقدار u عن النهاية الحرة . ولنأخذ عنصراً طولياً عند هذا المقطع طوله du فيكون الاجهاد الكائن عند هذا المقطع :

$$\sigma_{(u)} = \gamma . u$$

والانفعال:

$$\varepsilon_u = \frac{\Delta.(du)}{du} = \frac{\sigma_u}{E} = \frac{\gamma . u}{E}$$

وتزايد طول هذا العنصر الطولي:

$$\Delta(du) = \frac{\gamma . u . du}{E}$$

وتزايد طول الجزء المحصور بين المقطع الكائن على بعد x من النهاية السفلية والنهاية الثابتة:

$$\Delta l_2 = \int_{u=x}^{u=l} \frac{\gamma . u . du}{E} = \frac{\gamma}{2E}\left(l^2 - x^2\right)$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{P(l-x)}{E.A} + \frac{\gamma}{2E}\left(l^2 - x^2\right)$$

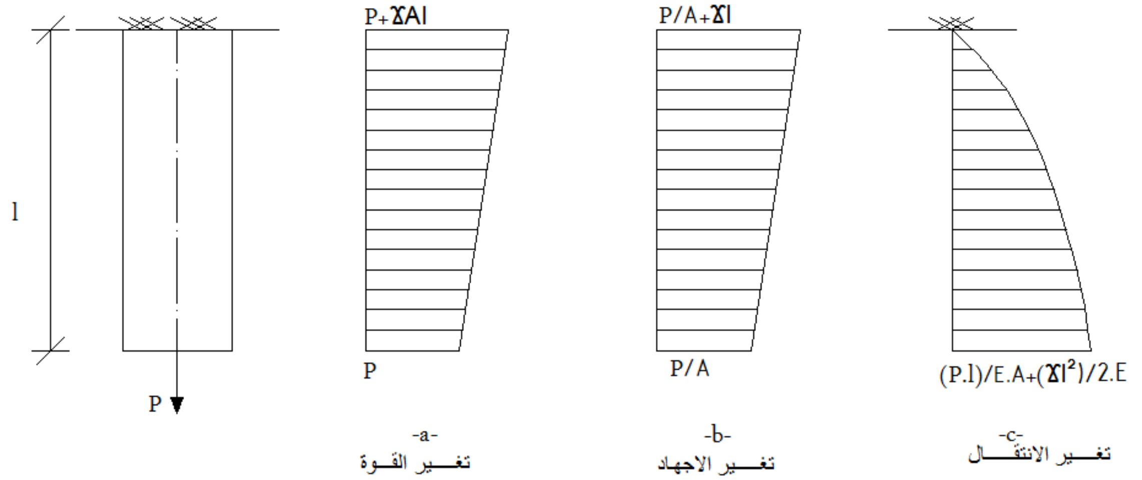
ومن أجل النهاية الحرة السفلى للقضيب أي عند $x=0$ يكون :

$$\Delta l = \frac{P.l}{E.A} + \frac{\gamma}{2E}.l^2$$

ومن أجل النهاية العليا يكون :

$$x = l \Rightarrow \Delta l = 0$$

ويمثل الانتقال الشاقولي في الشكل (8-3-c)



الشكل (8−3)

ومن أجل حمولة موزعة بانتظام q/m' يمكننا أن نكتب عند العنصر الطولي du مايلي: الشكل (3− 9).

$$\varepsilon_u = \frac{\Delta(du)}{du} = \frac{\sigma_u}{E}$$

لكن:

$$\sigma_u = \frac{q.u}{A}$$

بالتبديل نجد:

$$\Delta(du) = \frac{\sigma_u \ . \ du}{E}$$

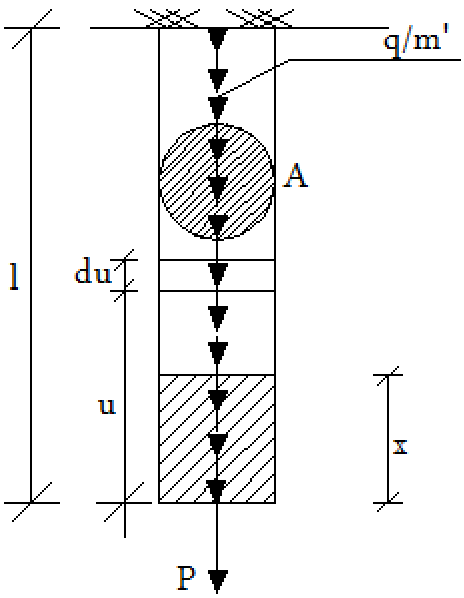
$$\Delta l_3 = \int_{u=x}^{u=l} \frac{q.u.du}{E.A} = \frac{q}{2EA}\left(l^2 - x^2\right)$$

من أجل : $x = 0$ نجد :

$$\Delta l_3 = = \frac{q}{2EA} l^2$$

ومن أجل: $x = l$ فإن:

$$\Delta l_3 = 0$$



الشكل (3-9)

مثال (2) :

جائز ذو مقطع متغير يتعرض إلى قوة ناظمية N ، الشكل (3-10). والمطلوب :
دراسة تغير القوة والاجهاد والانتقال على طول الجائز.

الحل:

إن القوة ثابتة على طول المحور الطولي للجائز. فتغيرها يمثل بالشكل (10-3-a). أما الاجهاد في المقاطع الكائنة في المجال الأول على بعد x_1 من الطرف الثابت فهو:

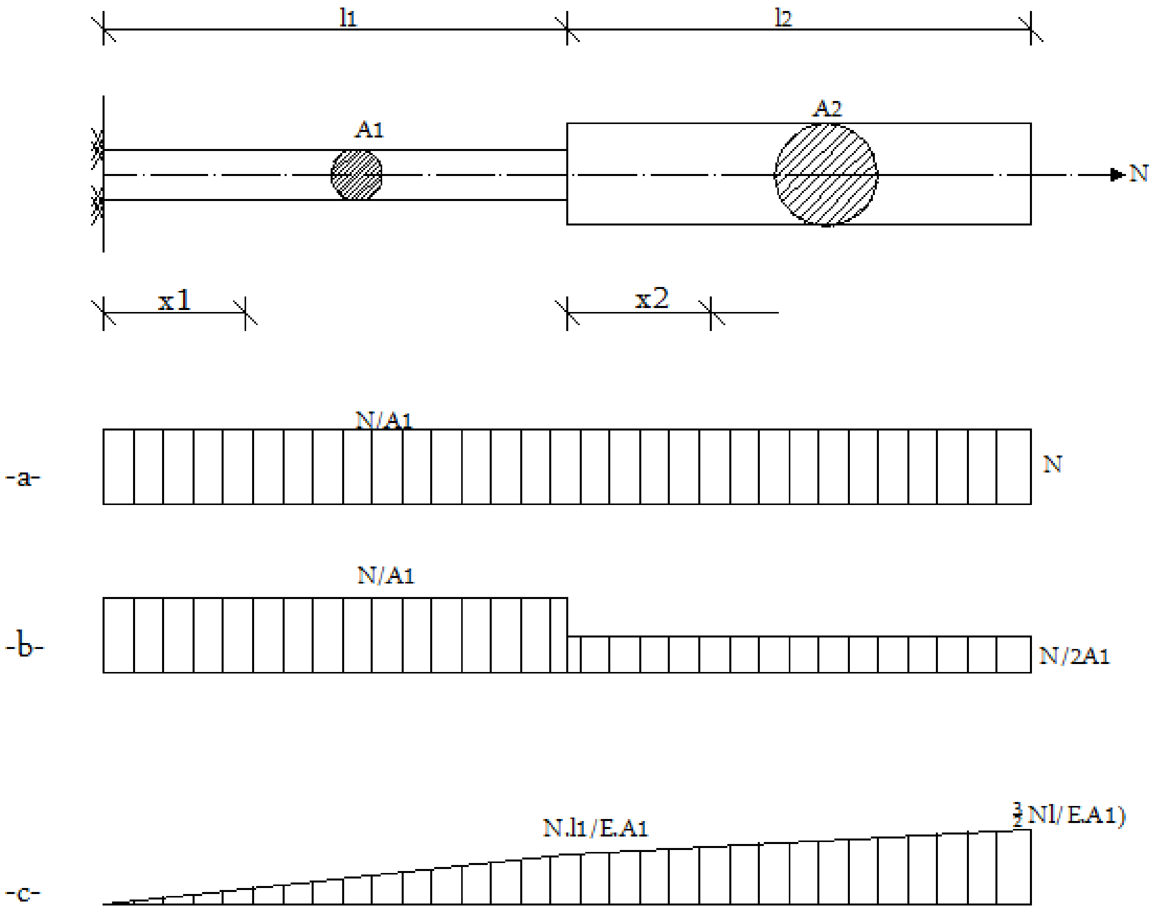
$$\sigma_{x1} = \frac{N}{A_1}$$

وفي المجال الثاني:

$$\sigma_{x2} = \frac{N}{A_2} = \frac{N}{2A_1}$$

وبهذا يكون تغير الاجهاد ممثلا بالشكل : (10-3-b) . أما تطاول المقطع في المجال الأول على بعد x_1 من الطرف الثابت :

$$\Delta_{x1} = \frac{\sigma_{x1}}{E} \cdot x_1 = \frac{N}{EA_1} \cdot x_1$$



الشكل (10−3)

وبالتالي فالتطاول عند نهاية الجزء الأول هو:

$$\Delta_{l1} = \frac{N}{E.\ A_1}.l_1$$

كما أن انتقال المقطع الكائن على بعد x_2 من مكان تغير المقطع :

$$\Delta_{x2} = \frac{N.l_1}{E.A_1} + \frac{N.x_2}{E.A_2}$$

ويكون الانتقال الكلي عند نهاية الطرف الحر :

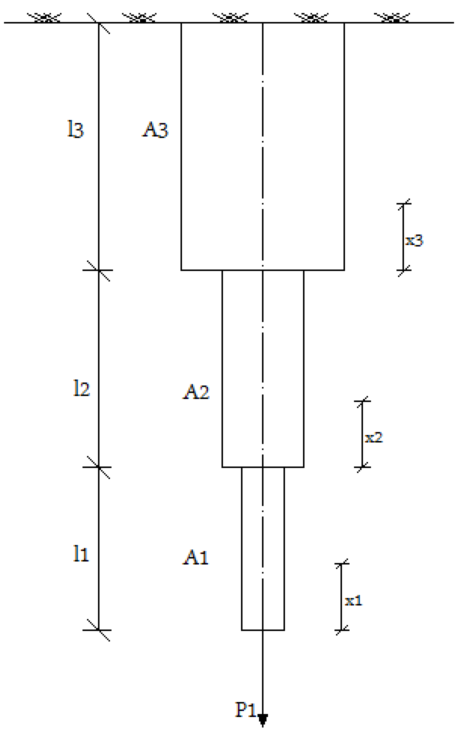
$$\Delta_{tot} = \frac{N.l_1}{E.A_1} + \frac{N.l_2}{E.A_2}$$

فإذا كان : $l_1 = l_2 = l$ فإن :

$$\Delta_{tot} = \frac{N.l}{E} \cdot \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{2A_1} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{N.l}{E.A_1}$$

مثال (3):

المطلوب ايجاد معادلات الاجهادات والانتقالات لمقاطع القضيب ذو المقطع المتغير الممثل في الشـــكل (3−11) وذلك تحت تأثير القوة P والوزن الذاتي.



الشكل (3−11)

الحل:

الاجهادات في مقاطع القضيب المبين في الشكل (3−11) تعين كما يلي:

3− في المجال الأول: $0 \le x_1 \le l_1$

معادلة القوى المحورية:

$$P_{(x1)} = P + \gamma A_1 \; x_1$$

وبذلك فإن :

$$\sigma_{(x1)} = \frac{P}{A_1} + \gamma \;\; x_1$$

من أجل $x_1 = l_1$ نجد :

$$\sigma_{(l1)} = \frac{P}{A_1} + \gamma \ l_1$$

4- في المجال الثاني: $0 \le x_2 \le l_2$

$$P_{(x2)} = P + \gamma A_1 \ l_1 + \gamma A_2 \ x_2$$

وبالتالي فإن الاجهاد :

$$\sigma_{(x2)} = \frac{P}{A_2} + \frac{\gamma \ A_1 \ l_1}{A_2} + \gamma \ x_2$$

عندما تكون $x_2 = l_2$ نجد:

$$\sigma_{(l2)} = \frac{P}{A_2} + \frac{\gamma \ A_1 \ l_1}{A_2} + \gamma \ l_2$$

5- في المجال الثالث: $0 \le x_3 \le l_3$ حيث: x_3 مقاسة من نهاية القسم الثاني، نجد أن القوة المؤثرة هي:

$$P_{(x3)} = P + \gamma A_1 \ l_1 + \gamma A_2 \ l_2 + \gamma A_3 \ x_3$$

والاجهاد:

$$\sigma_{(x3)} = \frac{P}{A_3} + \frac{\gamma A_1 \ l_1}{A_3} + \frac{\gamma A_2 \ l_2}{A_3} + \gamma \ x_3$$

ومن أجل $x_3 = l_3$ نجد

$$\sigma_{(l3)} = \frac{P}{A_3} + \frac{\gamma A_1 \ l_1}{A_3} + \frac{\gamma A_2 \ l_2}{A_3} + \gamma \ l_3$$

ومن أجل مقطع ***n*** يكون:

$$\sigma_{(\ln)} = \frac{P}{A_n} + \frac{\gamma A_1 \ l_1}{A_n} + \frac{\gamma A_2 \ l_2}{A_n} + ... + \frac{\gamma A_{n-1} \ .l_{n-1}}{A_n} \ + \gamma \ x_3$$

لحساب الانتقالات : إن إزاحة المقطع x_3 تكون مساوية إلى تطاول الجزء الذي يعلوه ، أي:

$$\Delta_{(x3)} = \int_{x3}^{l3} \frac{\sigma_{(x3)}}{E} dx_3 = \frac{1}{E} \int_{x3}^{l3} \left(\frac{P}{A_3} + \frac{\gamma A_1 \ l_1}{A_3} + \frac{\gamma A_2 \ l_2}{A_3} + \gamma \ x_3 \right) dx_3$$

$$\Delta_{(x3)} == \frac{1}{E} \left[\left(\frac{P}{A_3} + \frac{\gamma A_1 \ l_1}{A_3} + \frac{\gamma A_2 \ l_2}{A_3} \right) (l_3 - x_3) + \frac{\gamma}{2} \left(l_3^{\ 2} - x_3^{\ 2} \right) \right]$$

ومن أجل $x_3 = 0$ نجد :

$$\Delta_{(l3)} == \frac{l_3}{E}\left(\frac{P}{A_3} + \frac{\gamma A_1\, l_1}{A_3} + \frac{\gamma A_2\, l_2}{A_3} \right) + \frac{\gamma}{2}.l_3 \quad)$$

وهو الانتقال في نهاية المقطع الثاني.

إن انتقال العنصر المحدد بـ x_2 يساوي إلى تطاول الجزء الذي يعلوه أيضاً ، أي أن :

$$\Delta_{(x2)} = \Delta_{(l3)} + \int_{x2}^{l2} \frac{\sigma_{(x2)}}{E} dx_2 = \Delta_{(l3)} + \frac{1}{E}\int_{x2}^{l2} \left(\frac{P}{A_2} + \frac{\gamma A_1\, l_1}{A_2} + \gamma\, x_2\right) dx_2$$

$$\Delta_{(x2)} = \Delta_{(l3)} + \frac{1}{E}\left[\left(\frac{P}{A_2} + \frac{\gamma A_1\, l_1}{A_2} \right).(l_2 - x_2) + \frac{\gamma}{2}\left(l_2^{\,2} - x_2^{\,2}\right) \right]$$

من أجل $x_2 = 0$ فإن انتقال المقطع الكائن عن نهاية العنصر الثاني من الأسفل هو:

$$\Delta_{(l2)} = \Delta_{(l3)} + \frac{l_2}{E}\left(\frac{P}{A_2} + \frac{\gamma A_1\, l_1}{A_2}. + \frac{\gamma l_2}{2} \right)$$

أما انتقال المقطع x_1 فيعطى بالمعادلة:

$$\Delta_{(x1)} = \Delta_{l2} + \Delta_{(l3)} + \int_{x1}^{l1} \frac{\sigma_{(x1)}}{E} dx_1 = \Delta_{(l2)} + \Delta_{(l3)} + \frac{1}{E}\int_{x1}^{l1} \left(\frac{P}{A_1} + \gamma\, x_1\right) dx_1$$

$$\Delta_{(x1)} = \Delta_{(l2)} + \Delta_{(l3)} + \frac{1}{E}\left[\left(\frac{P}{A_1}(l_1 - x_1) + \frac{\gamma}{2}\left(l_1^{\,2} - x_1^{\,2}\right) \right) \right]$$

من أجل $x_1 = 0$ أي عند النهاية الحرة للقضيب فإن:

$$\Delta_{(l1)} = \Delta_{(l2)} + \Delta_{(l3)} + \frac{l_1}{E}\left(\frac{P}{A_1} + \frac{\gamma}{2} l_1 \right)$$

وهي قيمة الانتقال من أجل قضيب مكون من مقطع واحد.

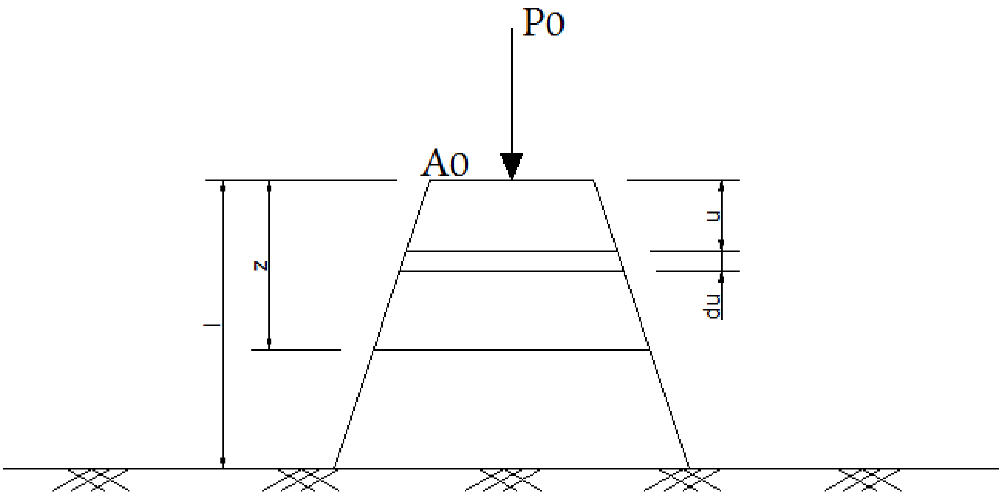
<u>مثال (4)</u>

عمود يتعرض إلى قوة مركزة في نهايته وإلى وزنه الذاتي ، الشكل (3−12) . ما هو قانون تغير مساحة المقطع على طول العمود بحيث يبقى الاجهاد ثابتاً في كل مقاطع هذا العمود.

<u>الحل:</u>

لنختر مقطعاً كائناً على بعد z من النهاية الحرة للعمود ولنفرض أن مساحة هذا المقطع $A_{(z)}$.

وهذا المقطع يتعرض إلى قوة ضاغطة قدرها:



الشكل (3−12)

$$P_z = P_0 + \int_0^z \gamma . A . du$$

ويكون الاجهاد وفي نفس المقطع هو:

$$\sigma_z = \frac{P_0 + \int_0^z \gamma . A . du}{A} = \frac{P_0}{A_0}$$

حيث A_0 هي مساحة المقطع المعتبر عند النهاية الحرة. ومن هذه العلاقة يمكننا أن نكتب :

$$P_0 + \int_0^z \gamma . A . du = \frac{A . P_0}{A_0}$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة لـــ z نحصل على :

$$\gamma . A = \frac{dA}{dz} \cdot \frac{P_0}{A_0}$$

وبالتالي :

$$d_z = \frac{P_0}{\gamma . A_0} \cdot \frac{dA}{A}$$

وبتكامل الطرفين نحصل على :

أو :

$$A = A_0 . e^{\frac{\gamma . A_0 . z}{P_0}}$$

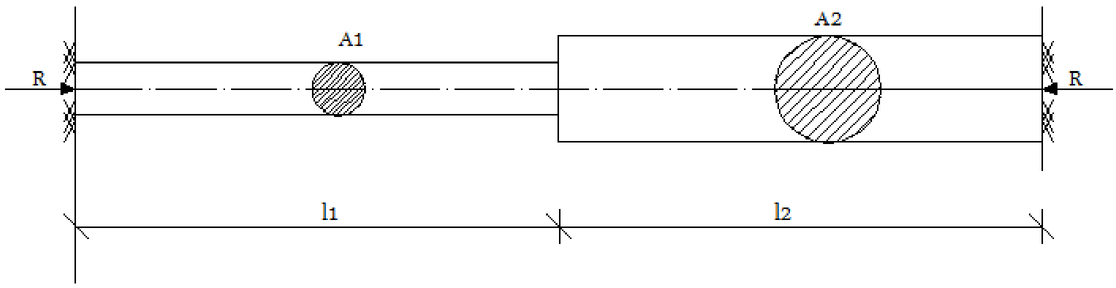
ولما كان الاجهاد ثابتاً في كافة المقاطع تكون القوى المؤثرة في مقطع ما :

$$P_z = \sigma_0 . A_z = \frac{P_0}{A_0} A_z = \frac{P_0}{A_0} . A_0 . e^{\frac{\gamma . A_0 . z}{P_0}} = P_0 . e^{\frac{\gamma . A_0 . z}{P_0}}$$

ويكون الانفعال متغيراً تغيراً خطياً مع البعد عن القاعدة الثابتة لأن الاجهاد ثابت في كافة المقاطع.

<u>مثال (5)</u>

جائز ذو مقطع متغير ومثبت من نهايتيه كما في الشكل (13−3). إذا تغيرت درجة حرارته بمقدار Δt ، ما هو مقدار الاجهاد الذي تتعرض له مقاطع هذا الجائز.



الشكل (13−3)

<u>الحل:</u>

في حال عدم وجود المساند الموثوقة في كل من الطرفين يكون تزايد طول القطعة معطى بالعلاقة:

$$\Delta l = \alpha (l_1 + l_2) . \Delta t$$

إلا أن وجود المساند سوف يمنع التطاول عن طريق ردود الأفعال التي تعمل على تقاصر القطعة بالمقدار:

$$\Delta l = \frac{R . l_1}{E . A_1} + \frac{R . l_2}{E . A_2}$$

ولما كانت القطعة ستبقى محافظة على طولها ، يمكن مساواة Δl في الحالتين:

$$\alpha (l_1 + l_2) \Delta t = R . \left(\frac{l_1}{E . A_1} + \frac{l_2}{E . A_2} \right)$$

وبالتالي فإن:

$$R = \frac{\alpha (l_1 + l_2) . \Delta t}{\frac{l_1}{E . A_1} + \frac{l_2}{E . A_2}}$$

ويكون الاجهاد في المقطع الأول:

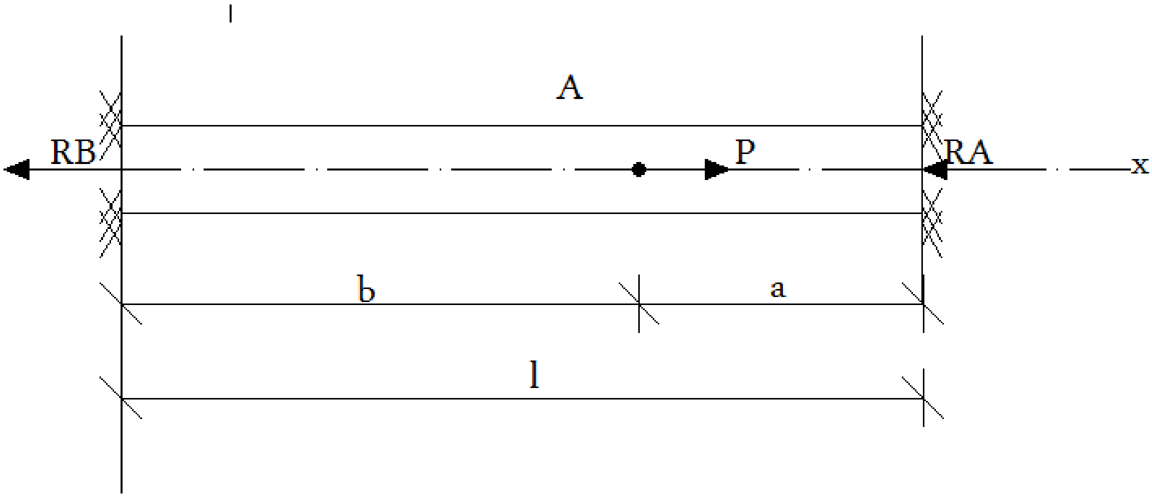
$$\sigma_1 = \frac{R}{A_1}$$

والاجهاد في المقطع الثاني:

$$\sigma_2 = \frac{R}{A_2}$$

<u>مثال (6)</u>

جائز موثوق في نهايتيه ومحمل بقوة شد P كما في الشكل (3−14). والمطلوب : حساب ردود الأفعال في الوثاقات.



(14−3)

<u>الحل:</u>

من معادلات التوازن في اتجاه المحور x نكتب:

$$P = R_a + R_b$$

و هذه المعادلة بمجهولين وبالتالي غير كافية لايجاد قيم ردود الأفعال في المساند. فالجائز غير مقرر ولا بد من اللجوء إلى الانتقالات من أجل الحصول على معادلة إضافية.

فالجزء الذي طوله a يكون مضغوطاً والجزء الذي طوله b يكون مشدوداً. ويجب أن يكون مقدار التطاول مساوياً إلى مقدار التقاصر، بحيث يبقى طول الجائز ثابتاً أي أن:

$$\frac{R_A \cdot a}{E.A} = \frac{R_B \cdot b}{E.A} \Rightarrow R_A = \frac{b}{a} \cdot R_B$$

وبالتعويض في المعادلة أعلاه:

$$P = \frac{b}{a} \cdot R_B + R_B = R_B \frac{b+a}{a}$$

$$R_B = P\frac{a}{a+b} = P\frac{a}{l}$$

ويكون:

$$R_A = P \cdot \frac{b}{a+b} = P \cdot \frac{b}{l}$$

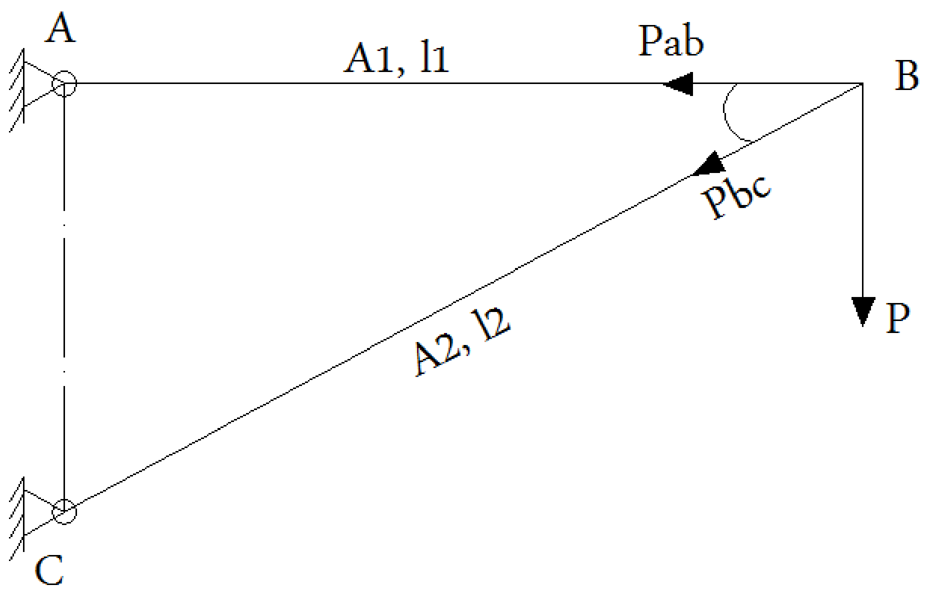
مثال (7)

القضيبان BC , AB يتمفصلان في النقاط (A, B, C) كما في الشكل (15−3) . والمطلوب حساب إزاحة النقطة B تحت تأثير القوة الشاقولية P .

الحل :

نحسب تغير طول كل من القضيبين BC , AB إلا أنه يلزمنا لذلك معرفة القوتين اللتين تؤثران على كل من القضيبين ، ولتكن هاتان القوتان P_{bc} , P_{ab} على الترتيب.

إن هاتين القوتان يمكن تحديدهما من كتابة معادلات التوازن للقوى المؤثرة على العقدة B في الاتجاهين الأفقي والشاقولي.



الشكل (15−3)

بكتابة : $\sum P_X = 0$ نحصل على :

$$P_{ab}+P_{bc}\cos\theta=0$$
$$P_{ab}=-P_{bc}\cos\theta \qquad (1)$$

وكذلك أيضاً: $\sum P_y = 0$

$$P+P_{bc}\sin\theta=0 \Rightarrow P_{bc}=-\frac{P}{\sin\theta} \qquad (2)$$

بالتعويض في (1) نجد :

$$P_{ab}=\frac{P}{tg\,\theta} \qquad (3)$$

والعنصر AB يشد العقدة بقوة $\frac{P}{tg\,\theta}$ ، وحسب مبدأ الفعل ورد الفعل فإن B تشد العنصر أيضاً بقوة مساوية ومعاكسة ، أما العنصر BC فإنه يؤثر على العقدة بقوة معاكسة للقوة الموضحة على الشكل، فهو يضغط على العقدة B بقوة قيمتها $\frac{P}{\sin\theta}$ وبالتالي فإن القضيب BC يكون مضغوطاً بنفس القوة.

سيتطاول العنصر AB تحت تأثير الشد بالمقدار:

$$\Delta ab=\frac{P}{tg\,\theta}\cdot\frac{l_1}{E.A_1} \qquad (4)$$

أما العنصر BC فسيتقاصر تحت تأثير الضغط بالمقدار:

$$\Delta bc=\frac{P}{\sin\theta}\cdot\frac{l_2}{E.A_2} \qquad (5)$$

وذلك بفرض أن عامل المرونة واحد للعنصرين.

إن العنصر AB سيتطاول بمقدار Δab والنقطة B ستصبح في النقطة B_1 الواقعة على محيط دائرة مركزها A ونصف قطرها AB_1 وذلك نتيجة تأثير القوة Pab .

وتحت تأثير القوة الضاغطة Pbc سيتقاصر العنصر BC بمقدار Δbc ، والنقطة B ستصبح في B_2 الواقعة على محيط دائرة مركزها C ونصف قطرها CB_2 .

أن تقاطع قوسي الدائرتين يحدد B' الموقع النهائي للنقطة B بعد الإزاحة التي مقدارها BB'. ولما كانت الإزاحات $\Delta ab, \Delta bc$ كميات صغيرة جداً فيمكن الاستعاضة عن قوس الدائرة بالمماس المتعامد على نصف القطر AB_1 و CB_2. وإن تقاطع العمودين يحدد النقطة B' كما في الشكل (3−16).

يمكن الحصول على الإزاحة تحليلياً بالشكل التالي:

إن المركبة الأفقية للإزاحة هي عبارة عن $\Delta ab = BB_1$ ، بينما للإزاحة الشاقولية مركبتان:

6− الأولى $B_1B_3 = \Delta bc \sin\theta$

7− والثانية B_3B' يمكن حساب طولها من المثلث B_2B_3B'

$$B_3B' = \frac{B_2\,B_3}{tg\,\theta}$$

غير أن:

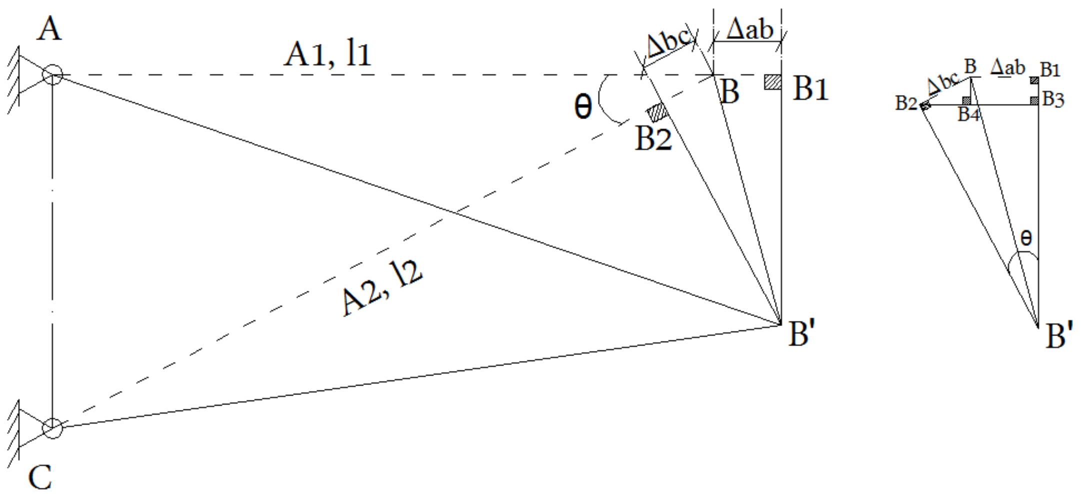
$$B_2\,B_3 = \Delta ab + \Delta bc\,.\cos\theta$$

$$\Rightarrow B_3\,B' = \frac{\Delta ab}{tg\,\theta} + \frac{\Delta.bc.\cos\theta}{tg\theta}$$

ويكون :

$$B_1B_3 + B_3B' = \quad B_1\,B' = \frac{\Delta ab}{tg\theta} + \Delta bc\left(\sin\theta + \frac{\cos\theta}{tg\theta}\right)$$

$$\Rightarrow B_1B' = \frac{\Delta ab}{tg\theta} + \Delta bc\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{\Delta ab}{tg\theta} + \frac{\Delta bc}{\sin\theta}$$



الشكل (3−16)

بمعرفة المركبة الأفقية والمركبة الشاقولية ، يمكن حساب الانتقال الكلي حسب فيثاغورث:

لدينا

$$BB_1 = \Delta ab$$
$$B_1B' = \frac{\Delta ab}{tg\theta} + \frac{\Delta bc}{\sin\theta}$$

وتكون الإزاحة النهائية:

$$\Delta t = \sqrt{BB_1^{\ 2} + B_1B'^2}$$

الفصل الرابع

الانعطاف

4-1 تعريف:

عندما تتعرض القضبان إلى أحمال خارجية مطبقة في مستو يمر بمحور القضيب تظهر في المقاطع العرضية للقضيب عزوم تؤثر في المستويات المتعامدة مع المقطع العرضي تسمى بعزوم الانعطاف أو الانحناء.

عندما تكون عزوم الانعطاف هي المركبة الوحيدة للقوى الداخلية المتولدة في المقاطع العرضية للقضيب سواء على كل أو جزء من القضيب يقال أن هذا القضيب أو هذا الجزء من القضيب يعمل على الانعطاف الدائري أو الانعطاف المجرد.

إلا أنه غالباً ماتتعرض مقاطع القضيب إلى قوى القص التي تظهر إلى جانب عزم الانعطاف فيسمى الانعطاف في هذه الحالة بالانعطاف العرضي. وعندما يمر المستوى الذي يؤثر عليه عزم الانعطاف بأحد المحاور الأساسية للعطالة للمقطع العرضي (وذلك إلى جانب مروره بمحور القضيب) يسمى الانعطاف في هذه الحالة بالانعطاف المستوي وإلا فإنه يسمى بالانعطاف المائل.

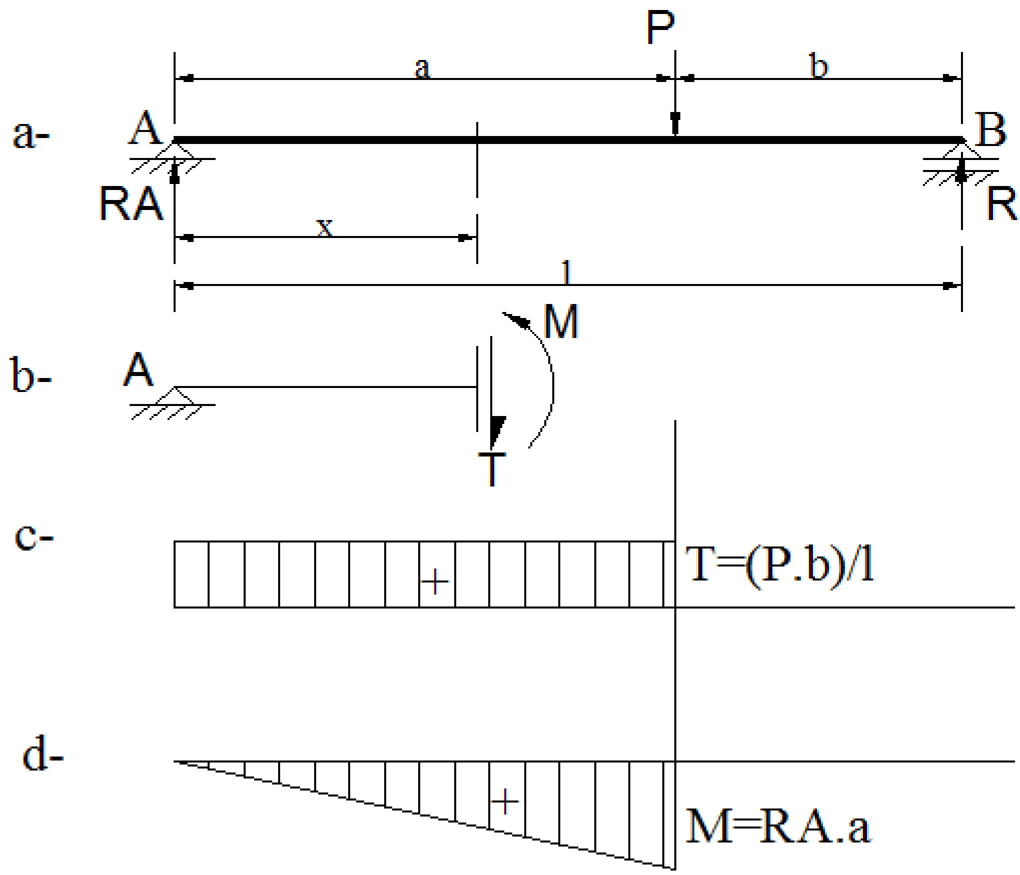
وفي هذه الحالة الأخيرة يمكن تحليل عزم الانعطاف إلى مركبتين كل منهما واقعة في مستو يحتوي أحد المحاور الأساسية للعطالة للمقطع العرضي ، فينتج لدينا انعطافان مستويان يقعان في مستويين متعامدين.

4-2 مخططات الجهد القاطع وعزم الانعطاف:

من أجل حساب الاجهادات المتولدة في المقاطع العرضية للجائز لابد من معرفة القوى الداخلية المؤثرة على كل مقطع من مقاطعه. لذا يتم اللجوء إلى رسم المخططات البيانية التي تبين تغير كل مركبة من مركبات القوى الداخلية وذلك على طول المحور. سوف ندرس في هذه الفقرة تغيرات عزم الانعطاف M والجهد القاطع T على طول المحور ورسم المخططات العائدة لذلك. وفيما يلي بعض الأمثلة الموضحة لذلك.

مثال(1)

المطلوب رسم مخطط الجهد القاطع ومخطط عزم الانعطاف للجائز البسيط المبين في الشكل (4-1) والمحمل بقوة مركزة P.



الشكل (1-4)

الحل

من معادلات التوازن يمكن حساب رد الفعل RA ورد الفعل RB . فبأخذ العزوم حول A وكتابة شرط التوازن $\sum MA=0$ نحصل على:

$$-P.a+RB.l=0 \quad \Rightarrow RB=P\frac{a}{l}$$

وكذلك أيضاً: $\sum MB=0$ نحصل على:

$$-P.b+RA..l=0 \;\Rightarrow RA=P\frac{b}{l}$$

لنعتبر مقطعا كائنا على بعد x من الطرف الأيسر للجائز على يسار نقطة تطبيق القوة P ، الشكل (a–1–4). حيث $0\langle x\langle a$. إن هذا الجزء من الجائز يبقى متوازناً تحت تأثير القوى الخارجية المطبقة وهي عبارة عن رد الفعل RA والقوى الداخلية المتحرضة في المقطع وهي T و M، الشكل(b–1–4). والتي تعوض عن تأثير الجزء الأيمن من الجائز.

من معادلات توازن هذا الجزء من الجائز يمكن تحديد قيم T و M بدلالة القوى الخارجية المطبقة وموقع المقطع المعتبر. فبكتابة:

$\sum Fy = 0$ نحصل على:

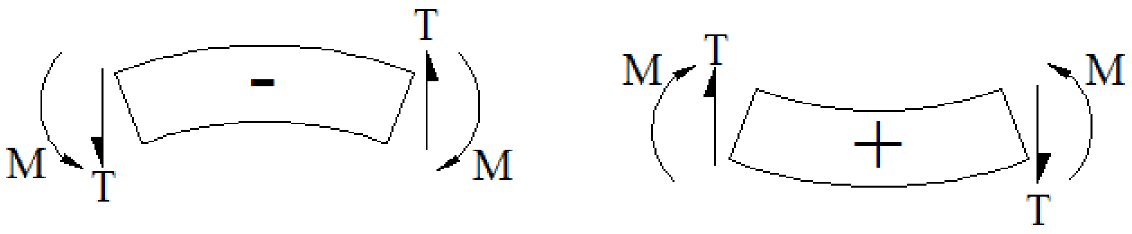
$$RA - T = 0 \Rightarrow T = RA$$

وكذلك بكتابة $\sum M = 0$ وذلك بالنسبة لمركز المقطع المعتبر نحصل على :

$$-RA\,.\,x + M = 0 \Rightarrow M = RA\,.x$$

فالجهد القاطع T يساوي رد الفعل RA وقيمته لا تتعلق بالبعد x عن الطرف الأيسر ، فهو ثابت في المجال المعتبر. ولتمثيله على المخطط لابد من الاصطلاح على اتجاه موجب وآخر سالب. لذا سنعتبر أن الجهد القاطع في مقطع من المقاطع موجب حين يعمل على تدوير المقطع الذي يؤثر عليه باتجاه دوران عقارب الساعة وسالب في الحالة المعاكسة كما هو مبين في الشكل (2−4) . ففي مثالنا هذا يكون T موجباً في المجال المعتبر فهو يمثل بالخط المستقيم الموازي لمحور الجائز والذي ارتفاعه $RA = P.\frac{b}{l}$. كما في الشكل (c−1−4).

أما عزم الانعطاف M في المقطع المعتبر والذي قيمته $M = R_A.x$ فهو يتناسب خطياً مع البعد x ولتمثيله على المخطط سنصطلح على اعتبار أن عزم الانعطاف موجب حين يعمل على توليد ضغط في الألياف العليا من الجائز وشد في الألياف السفلى ، كما في الشكل (2−4) . ففي المقطع المعتبر وحسب الاصطلاح المعتبر للإشارات ، يكون عزم الانعطاف M موجباً ، ويكون تغير عزم الانعطاف على طول المحور في المجال المعتبر كما هو مبين في الشكل *(d-1-4)* .



الشكل(2−4)

إلى يسار نقطة تطبيق القوة بمسافة صغيرة جداً يكون:

$$M = R_A.a = P\frac{a.b}{l}$$

أما في المجال الثاني والواقع إلى يمين نقطة تطبيق القوة P حيث $a \langle x \langle l$ ، لنعتبر مقطعاً كائناً على بعد x من الطرف الأيسر للجائز الشكل (*a−3−4*) يكون :

$$P + T = R_A \Rightarrow T = R_A - P = -R_B$$

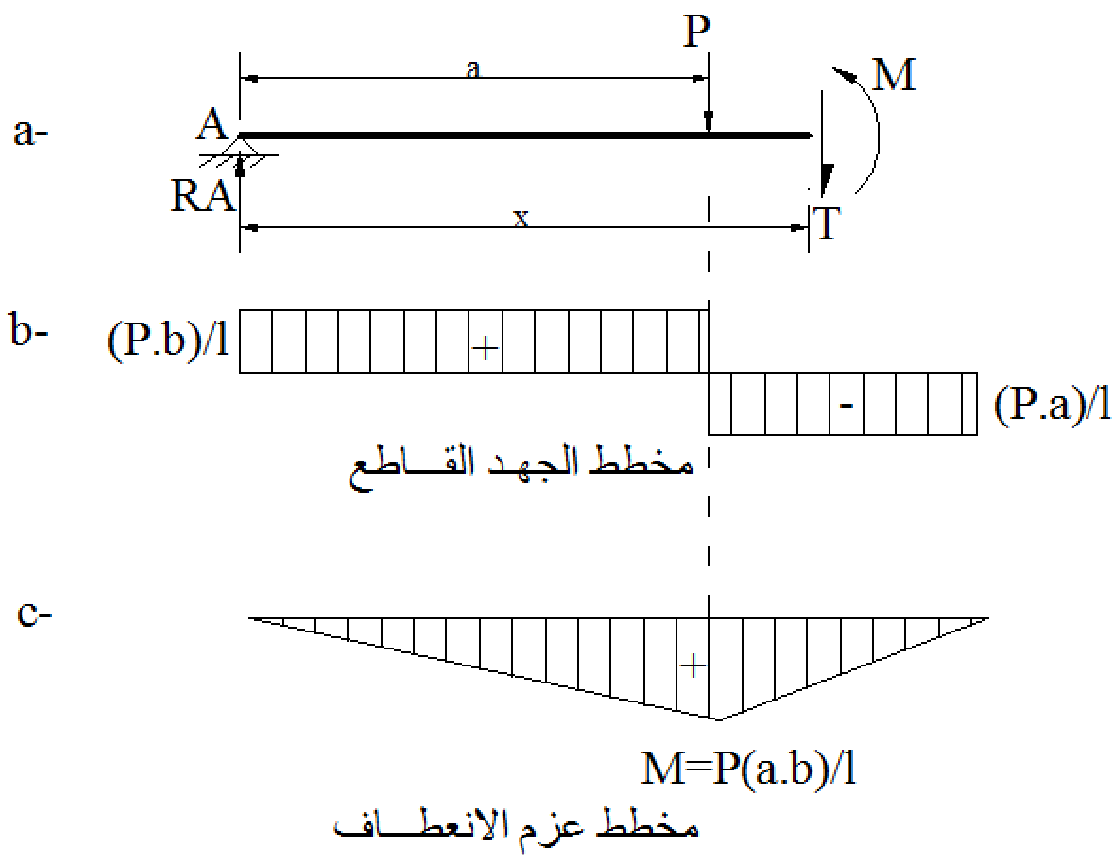
وكذلك:

$$M - R_A.x = -P(x - a) = 0$$

وبالتالي:

$$M = R_A.x - P(x-a)$$

فالجهد القاطع ثابت القيمة على طول المجال المعتبر ، وهو يساوي إلى مجموع مساقط القوى الخارجية الكائنة على يسار المقطع المعتبر. إلا أن اتجاهه مخالف للاتجاه المفروض (لأن النتيجة سالبة). فهو سالب حسب الاصطلاح المعتبر للاتجاه الموجب للجهد القاطع ، ويمثل كما في الشكل (*b- 3-4*).



الشكل (3-4)

أما عزم الانعطاف الذي يتغير تغيراً خطياً مع المسافة x فيمثل بخط مستقيم ، ويكون من أجل $x=a$

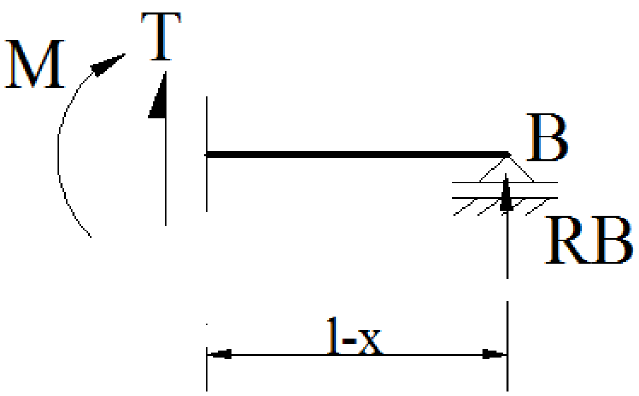
$$M_a = = P\frac{a.b}{l}$$

ومن أجل $x=l$ نجد أن : $M=0$

أما اتجاهه فموجب حسب الاصطلاح المعتبر للإشارات الخاصة بعزم الانعطاف، ويمثل كما في الشكل $(c\text{-}3\text{-}4)$. ففي المجال $a\langle x\langle l$ اعتبر أن توازن الجزء الأيسر من الجائز من أجل حساب الجهد القاطع وعزم الانعطاف المؤثرين على المقطع المعتبر. وكان من الأسهل أن نعتبر توازن الجزء الأيمن كما في الشكل (4–4) . حيث يؤثر رد الفعل Rb فقط كقوة خارجية . فمن معادلات توازن هذا الجزء يمكن ايجاد أن :

$$T=-R_b=-P\frac{a}{l}$$

$$M=R_b(l-x)=P.\,a.\left(1-\frac{x}{l}\right)$$



الشكل (4–4)

وهي نفس النتائج التي حصلنا عليها عند اعتبار توازن الجزء الأيسر. القيم عند أماكن القطع متساوية بالقيمة ومتعاكسة بالاتجاه على كل من المقطعين المتقابلين وذلك حسب مبدأ الفعل ورد الفعل. إلا أنها تأخذ نفس الإشارة عند رسم مخططات الجهد القاطع وعزم الانعطاف بسبب الاصطلاح المعتبر للإشارات. إذا ما أثرت على الجائز عدة قوى كما في الشكل $(5\text{-}4)$ ، يمكن ايجاد قيم T و M في المجالات الواقعة بين نقاط تطبيق القوى كما يلي:

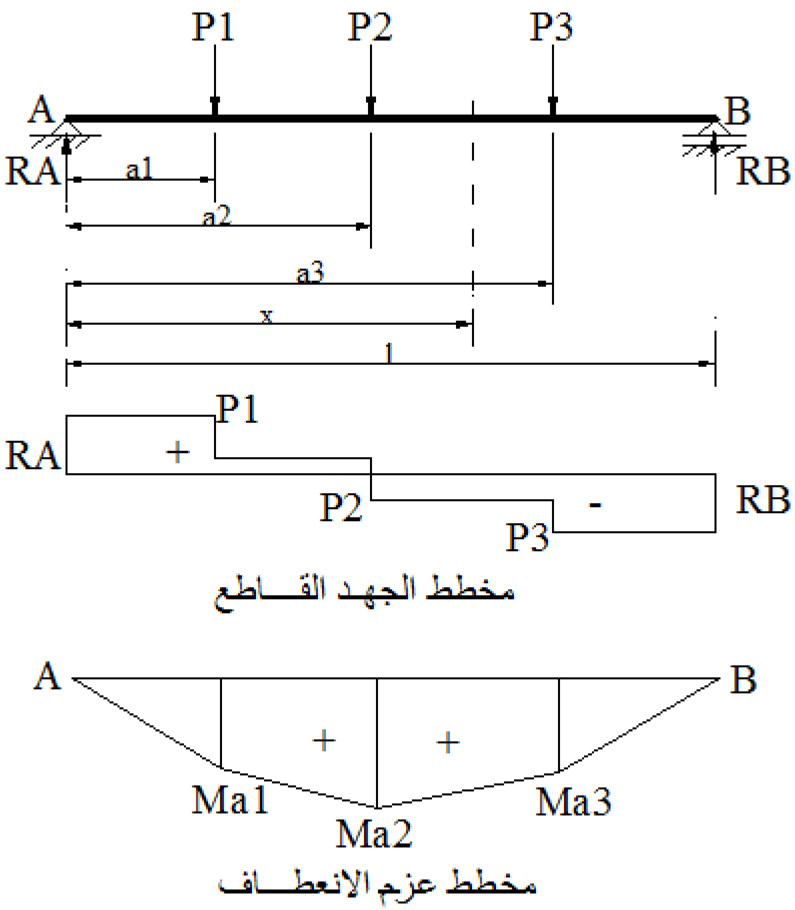
تحسب ردود الأفعال من معادلات التوازن أولاً ثم تكتب معادلات توازن كل جزء من أجزاء الجائز بعد قطعه بالمقاطع المناسبة كما يلي:

– في المجال الأول:

حيث $0\langle x\langle a_1$ يكون:

$$T_1 = R_A$$

$$M_1 = R_A \cdot x$$



الشكل (5-4)

- في المجال الثاني:

حيث $a_1 \langle x \langle a_2$ يكون :

$$T_2 = R_A - P_1$$

$$M_2 = R_A \cdot x - P_1(x - a_1)$$

- في المجال الثالث :

حيث $a_2 \langle x \langle a_3$ يكون:

$$T_3 = R_A - P_1 - P_2$$

$$M_3 = R_A \cdot x - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2)$$

وإذا ما اعتبر توازن الجزء الكائن على يمين المقطع ، يمكننا أن نكتب :

$$T_3 = -R_B + P_3$$

$$M_3 = R_B\left(l-x\right) - P_3\left(l-x-b_3\right)$$

- وفي المجال الرابع :

حيث $a_3 \langle\, x \,\rangle\, l$ يكون : باعتبار توازن الجزء الكائن على يمين المقطع:

$$T_4 = -R_B$$
$$M_4 = R_B\left(l-x\right)$$

بإمعان النظر في معادلات الجهد القاطع ومعادلات عزم الانعطاف في المقاطع المختلفة ، يلاحظ أن الجهد القاطع في مقطع من المقاطع يساوي عددياً إلى المجموع الجبري لمساقط القوى الخارجية المؤثرة على جهة واحدة من المقطع وذلك على مستوي المقطع.

أما عزم الانعطاف في مقطع من المقاطع فيساوي عددياً المجموع الجبري لعزوم القوى الخارجية التي تؤثر على جهة واحدة من المقطع بالنسبة لمركز ثقل المقطع المعتبر.

من المعادلات السابقة التي تعطي قيم T و M في المجالات المختلفة. يمكن رسم مخططات الجهد القاطع وعزم الانعطاف كما في الشكل (*b-5-4*) والشكل (*c-5-4*) .

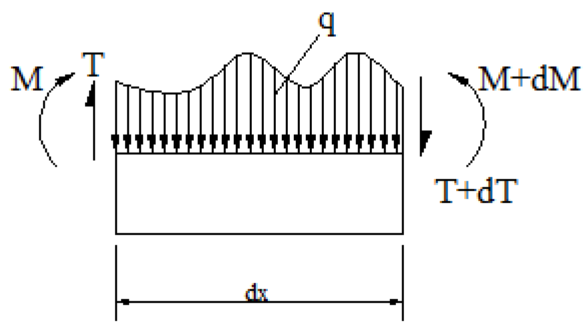
ويلاحظ أن قيم الجهد القاطع ثابتة في كل مجال من المجالات الأربعة . بينما تتغير قيم عزوم الانعطاف تغيراً خطياً في المجالات الأربعة. ويمكن ايجاد قيم عزوم الانعطاف من المعادلات السابقة في كافة المقاطع.

بالتعويض عن x بالقيمة المراد حساب عزم الانعطاف فيها نحصل على:

$$M_{a1} = R_A\,.a1$$
$$M_{a2} = R_A.a2 - P_1\left(a2-a1\right)$$
$$M_{a3} = R_B\,.b3$$

4–3 العلاقة بين القوة المطبقة والجهد القاطع وعزم الانعطاف:

لنعتبر عنصراً تفاضلياً في الجائز محصوراً بين مقطعين عموديين ، المسافة بينهما dx كما في الشكل (4–6).



الشكل (4–6)

ولتكن M و T مركبتي العزم والجهد القاطع المؤثرتين على المقطع الأيسر ، فيؤثر على المقطع الأيمن:

$$M + dM \quad , \; T + dT$$

إن الحمولات المؤثرة على هذا الجزء من الجائز يمكن أن تكون موزعة أو قوى مركزة أو عزوماً. لنفترض في هذه الحالة أنها موزعة . فعلى اعتبار أن الطول dx صغير جداً ، يمكن اعتبار شدة الحمولة الموزعة ثابتة q . فمن معادلات التوازن نكتب:

$$T - q.dx - (T + dT) = 0$$

$$\Rightarrow \; \frac{dT}{dx} = -q$$

فحينما تؤثر قوة موزعة شدتها q على الجائز ، يتغير الجهد القاطع على طول هذا الجائز. ويكون معدل التغير بالنسبة لـ x مساوياً لـ q- وإذا ما كانت $q=0$ فهذا يعني أن الجهد القاطع يبقى ثابتاً. وبكتابة مجموع العزوم بالنسبة لمركز ثقل الوجه الأيسر يساوي الصفر نحصل على:

$$M + q.dx\left(\frac{dx}{2}\right) + (T + dT).dx - (M + dM) = 0$$

وباهمال الحدود التي تحوي على جداء التفاضلات نحصل على :

$$\frac{dM}{dx} = T$$

فمعدل تغير عزم الانعطاف على طول الجائز يساوي القيمة الجبرية للجهد القاطع مهما تكن القوى المؤثرة على الجائز. وإن عزم الانعطاف يأخذ بالتالي قيمته العظمى حين يكون $T=0$. فمن أجل الجائز المحمل بحمولة موزعة بانتظام شدتها q كما في الشكل (4–7) ، وبسبب التناظر يكون:

$$RA = RB = q\,\frac{l}{2}$$

ويكون الجهد القاطع في المقطع الواقع على بعد x من الطرف الأيسر معطياً بالعلاقة:

$$T = RA - q.x = q\frac{l}{2} - q.x \qquad (a)$$

وعزم الانعطاف من أجل نفس المقطع:

$$M = RA.x - q\frac{x^2}{2}$$

$$= q\frac{l}{2}.x - q\frac{x^2}{2} \qquad (b)$$

اعتباراً من هاتين العلاقتين يمكن رسم مخطط الجهد القاطع ، الشكل (b–7–4).

ومخطط عزم الانعطاف ، الشكل (c–7–4) مع ملاحظة أنه في منتصف الجائز يكون:

$$T_{(l/2)} = q\frac{l}{2} - q\frac{l}{2} = 0$$

و:

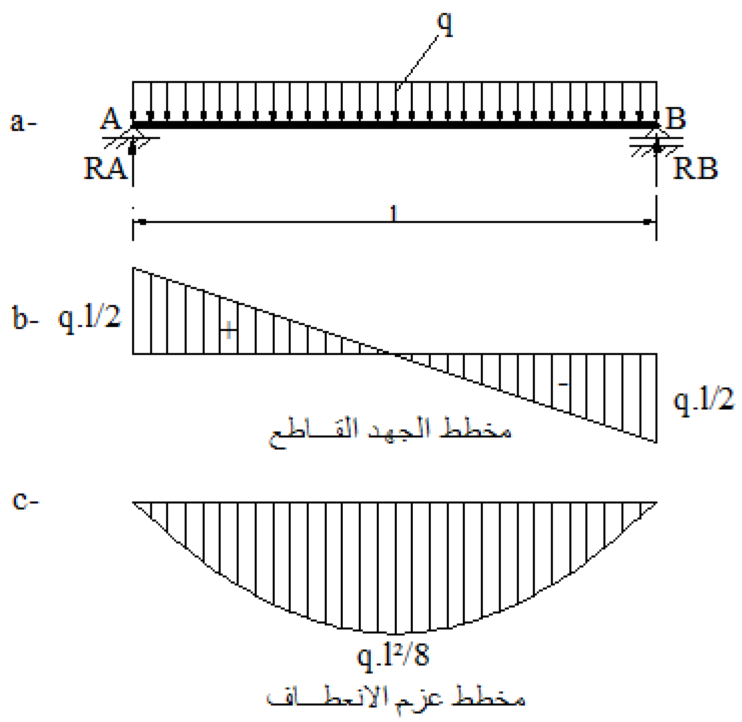
$$M_{(l/2)} = q\frac{l^2}{4} - q\frac{l^2}{8} = q\frac{l^2}{8}$$

ومن العلاقة (a) نلاحظ أن :

$$\frac{dT}{dx} = -q$$

ومن العلاقة (b) نلاحظ أن:

$$\frac{dM}{dx} = q\frac{l}{2} - qx = T$$



الشكل (4-7)

مثال 4-3-1:

أوجد مخططات القوى القاطعة وعزوم الانعطاف للجائز البسيط المبين في الشكل (4-8).

الحل:

بسبب التناظر يكون:

$$RA = RB = P$$

- القوى القاطعة:

من جهة اليسار:

$$0 \langle\ x_1 \langle a \qquad \Rightarrow \qquad T_{x1} = RA = P$$

$$a \langle x_2\ \langle l - 2a \qquad \Rightarrow \qquad M_{x2} = RA - P = P - P = 0$$

من جهة اليمين:

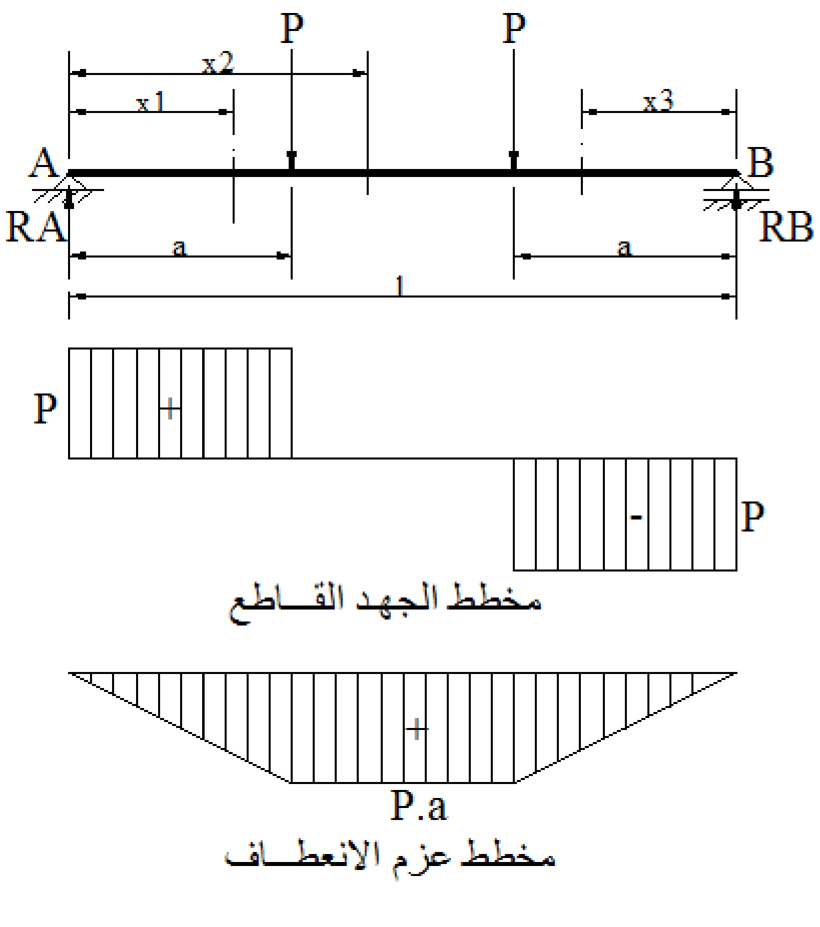
$$0 \langle x_3 \langle a \qquad \Rightarrow \qquad T_{x3} = -RB = -P$$

- عزوم الانعطاف:

$$0 \langle\ x_1 \langle a \qquad \Rightarrow \qquad M_{x1} = P\ .x_1$$

$$a \langle x_2\ \langle l - 2a \qquad \Rightarrow \qquad M_{x2} = P\ .x_2 - P.(x_2\ - a)$$

$$0 \langle x_3 \langle a \qquad \Rightarrow \qquad M_{x3} = P.x_3$$



الشكل (8-4)

<u>مثال 4-3-2:</u>

جائز بسيط يخضع إلى حمولة مثلثية شدتها العظمى q كما في الشكل (4-9) . والمطلوب ايجاد معادلات ورسم مخططات الجهد القاطع وعزوم الانعطاف

<u>الحل:</u>

بأخذ العزم عند المسند B ، يمكننا كتابة:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow RA.l - \frac{q.l}{2}.\frac{l}{3} = 0 \Rightarrow RA = \frac{q.l}{6}$$

بالاسقاط عمودياً نجد :

$$\sum y = 0 \Rightarrow RA + RB - \frac{ql}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$RB = \frac{q.l}{2} - \frac{q.l}{3} \Rightarrow RB = \frac{q.l}{3}$$

بأخذ مقطع يبعد عن المسند A بمسافة x يمكن كتابة المعادلات التالية للجهد القاطع وعزم الانعطاف.

$$0 \le x \le l$$

$$T = RA - \frac{qx^2}{2.l}$$

$$= \frac{q.l}{6} - \frac{q\,x^2}{2l}$$

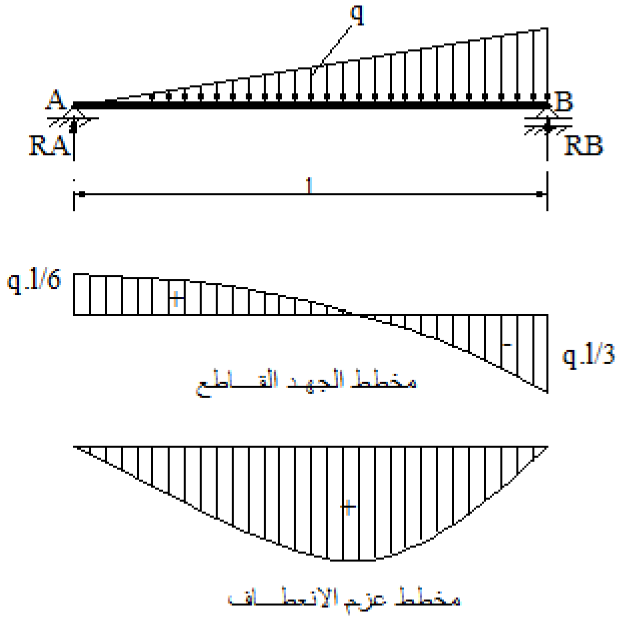
$$M = \frac{q.l}{6}.x - \frac{q.x^3}{6l}$$

ولحساب قيمة عزم الانعطاف الأعظمي . نوجد قيمة x التي ينعدم عندها الجهد القاطع . ثم نبدل في معادلة العزم كما يلي:

$$T = 0 \Rightarrow x = 0.58l$$

$$M_{\max} = 0.064\,q\,l^2$$

ومخططات الجهد القاطع وعزم الانعطاف مبينة في الشكل (4-9)



الشكل (4−9)

<u>مثال 4−3−3:</u>

جائز بسيط يخضع إلى مزدوجة انعطاف m كما في الشكل (4−10). والمطلوب ايجاد معادلات ورسم مخططات الجهد القاطع وعزم الانعطاف.

<u>الحل:</u>

- ايجاد ردود الأفعال في المساند:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow RA.l + m = o$$

$$RA = -\frac{m}{l}$$

واتجاه رد الفعل عند A للأسفل.

$$\sum y = 0 \Rightarrow RA + RB = 0$$

$$RB = -RA = \frac{m}{l}$$

- معادلات الجهد القاطع:

$0 \le x1 \le a \Rightarrow \qquad T = -RA = -\frac{m}{l}$

$a \le x2 \le l - a = b \Rightarrow \qquad T = -RA = -\frac{m}{l}$

- عزوم الانعطاف:

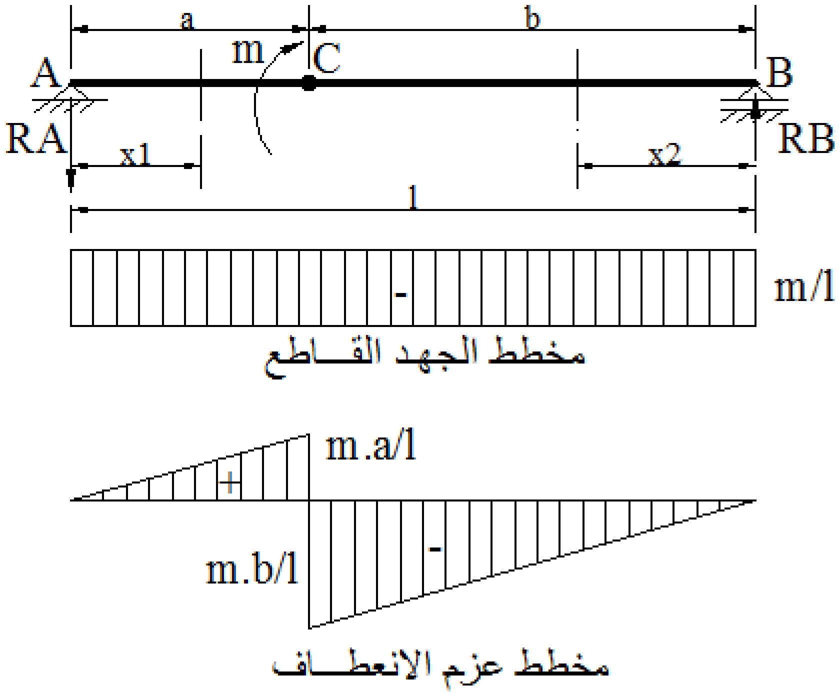
على يسار نقطة تطبيق المزدوجة

$0 \le x1 \le a \Rightarrow \qquad M = -\frac{m}{l}.x_1$

على يمين نقطة تطبيق المزدوجة

$0 \le x2 \le a \Rightarrow \qquad M = \frac{m}{l}.x_2$

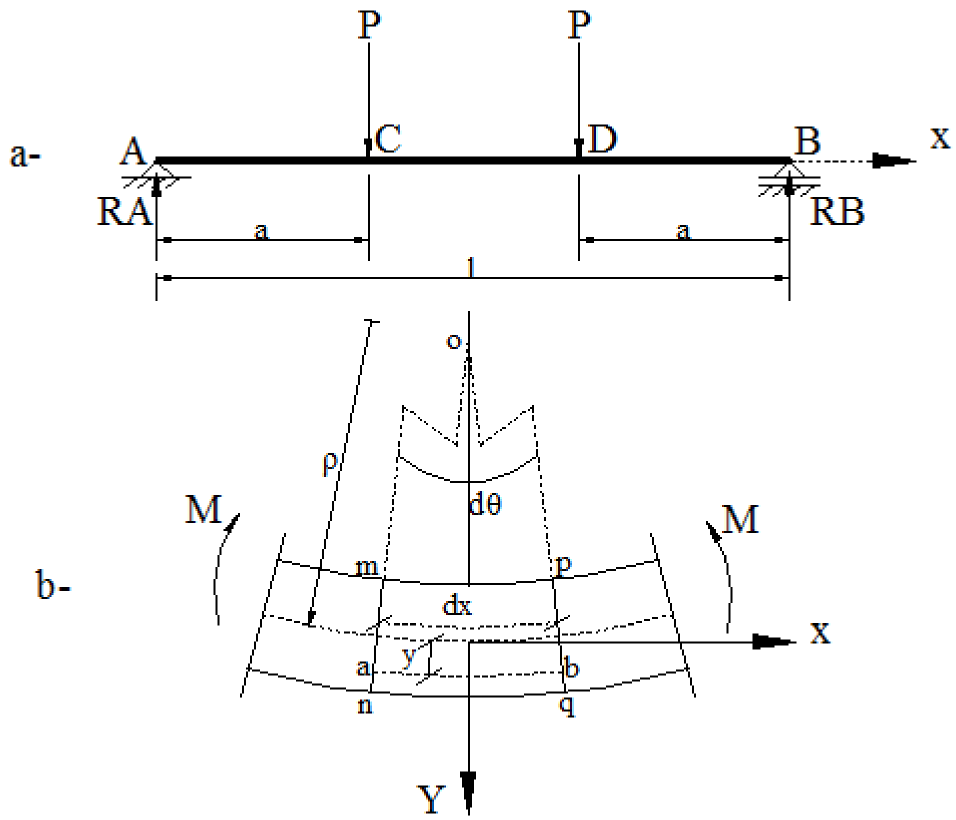
ومخططات الجهد القاطع وعزم الانعطاف مبينة على الشكل.



الشكل (4-10)

4-4 الاجهادات الناظميةالمتولدة عن عزم الانعطاف

في هذه الفقرة ستتم دراسة الاجهادات المتولدة في ألياف الجائز المحمل بالانعطاف الذي لايكون مصحوباً بالجهد القاطع كما في القسم CD المبين في الشكل (4-11 $a-$). والذي يتعرض إلى عزم انعطاف مجرد أو دائري قدره $P.a$ وكائن في المستوي xy الذي هو مستوي تناظر للجائز.



الشكل (4-11)

لإيجاد توزيع الاجهادات الناظمية على مقطع الجائز لابد من أخذ تغيرات الجائز بعين الاعتبار. فالتجربة تثبت أن الجائز المستقيم في الحالة البدائية سيصبح قوساً دائرياً بعد تطبيق عزم الانعطاف عليه. كما تثبت التجربة وكذلك نتائج نظرية المرونة أن المقاطع العمودية على محور الجائز كالمقطع mn أو pq المستوية في الحالة البدائية ستبقى مستوية بعد التغير ومتعامدة على الألياف الطولية للجائز.

المقطعان mn و pq المتوازيان في الحالة البدائية والكائنان على بعد dx سيدوران بالنسبة لبعضهما بزاوية قدرها $d\theta$ وذلك حول المحور Z المتعامد مع المستوي XY . فألياف الجائز الواقعة في الطرف المحدب تتطاول وتتعرض للشد. وبين هاتين المنطقتين يوجد سطح لا تعاني أليافه من أي تغير الطول ، وبالتالي لا تتعرض لأي اجهادات. هذا السطح يدعى بالسطح المحايد وتقاطعه مع المقطع العمودي يدعى بالمحور المحايد للمقطع المعتبر.

إن نصف قطر الانحناء ρ لليف المحايد يعطى بالعلاقة:

$$\rho = \frac{dx}{d\theta}$$

ويكون الانحناء :

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

إن الليف ab الكائن على بعد y من السطح المحايد والذي طوله البدائي dx سيصبح بعد التحميل l' حيث:

$$l' = (\rho + y).d\theta = \left(1 + \frac{y}{\rho}\right).\rho.d\theta = \left(1 + \frac{y}{\rho}\right).dx$$

ويكون تغير طوله:

$$\left(1 + \frac{y}{\rho}\right).dx - dx = \frac{y}{\rho}.dx$$

ويكون الانفعال الذي يعانيه هذا الليف ε_x معطياً بالعلاقة:

$$\varepsilon_x = \frac{y.dx}{\rho.dx} = \frac{y}{\rho} = K.y$$

حين يكون الليف المحايد تحت المحور المحايد ، حيث y موجبة يكون الانفعال ε_x موجباً وبالتالي يكون الليف مشدوداً. وحين يكون الليف فوق المحور المحايد ، أي أن y سالبة يكون الانفعال سالباً. وبالتالي يكون الليف مضغوطاَ. إن العلاقة السابقة لا علاقة لها إلا بالشكل الهندسي للقطعة بعد التغير، ولم تأخذ بعين الاعتبار تركيب المادة أو خواصها في أثناء استنتاجها.

من أجل المواد المرنة التي تتبع قانون هوك ، وفي مجال المرونة الخطية يكون:

$$\sigma_x = E.\varepsilon_x$$

فالليف المعتبر يتعرض إلى اجهاد ناظمي قدره:

$$\sigma_x = E.\frac{y}{\rho} = K.E.y$$

فالإجهاد يتناسب خطياً مع البعد عن المحور المحايد كما في الشكل (4− 12). حيث أن هناك اجهادات شد تحت المحور المحايد واجهادات ضغط فوقه. بفرض أن مساحة المقطع لليف المعتبر هي dA فتكون القوة الناظمية المؤثرة على ذلك الليف هي:

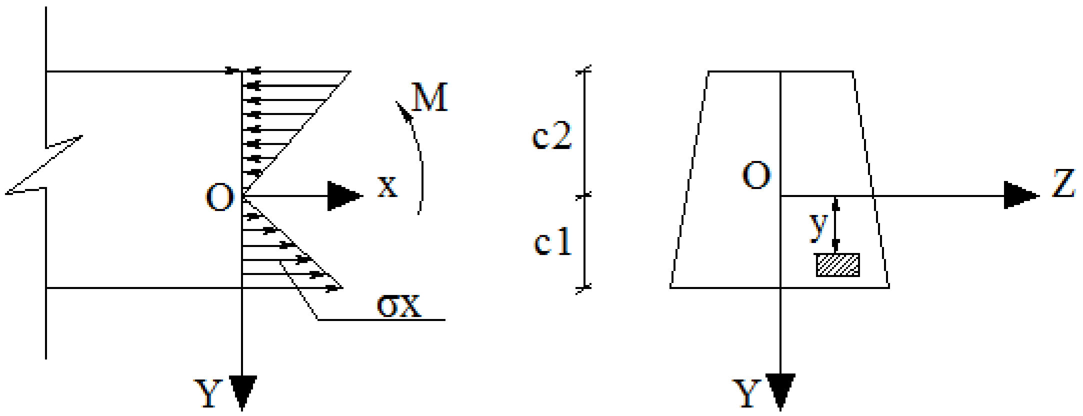
$$P_x = \sigma_x.dA$$

من معادلات التوازن وحيث أن محصلة القوى الخارجية الناظمية المطبقة على المقطع المعتبر تكون معدومة فإنه يجب أن يكون :

$$P_x = \int_A \sigma_x . dA = 0$$
$$= \int_A K.E.y = 0$$

وبما أن عامل المرونة E والانحناء K ثابتين فيجب أن يكون:

$$\int_A y.dA = 0$$



الشكل (4-12)

وهذا يستلزم أن يكون المحور المحايد Z ماراً من مركز ثقل المقطع ، لأن العزم الستاتيكي للمقطع بالنسبة لهذا المحور معدوم. وبكتابة $\sum M_Y = 0$ لأن العزم الخارجي حول المحور Y معدوم أيضاً ، نحصل على:

$$K.E.\int_A y.z.dA = 0$$

وبالتالي

$$I_{YZ} = \int_A y.z.d\,A = 0$$

وهذا يعني أن المحورين Y و Z محوران أساسيان للعطالة. وبهذا تسهل عملية تحديد لمحور المحايد Z الذي يمر من مركز ثقل المقطع من جهة وهو محور أساسي للعطالة من جهة أخرى.

أما المعادلة الثالثة للتوازن فهي:

$$\int_A y.\sigma_x .dA = M \Rightarrow K.E.\int_A y^2 dA = M$$

$$\Rightarrow M = K.E.I_Z$$

أو :

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I_Z}$$

لأن

$$I_Z = \int_A y^2 \, dA$$

هو عبارة عن عزم العطالة للمقطع بالنسبة للمحور المحايد Z

بالتعويض عن K بقيمتها المعطاة في العلاقة:

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{M_Z}{E.I_Z} = \frac{\sigma_X}{E.y}$$
$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{M_Z.y}{I_Z}$$

في هذه العلاقة يكون M_Z موجباً حين يعمل على توليد شد في الألياف السفلى وضغط في الألياف العليا، و y موجباً من الجهة السفلى من المحور المحايد.

فالإجهاد الناظمي الأعظمي يؤثر على الألياف الأكثر بعداً عن المحور المحايد ويكون:

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{M.C_1}{I} = \frac{M}{I/C_1} = \frac{M}{W_1}$$
$$(\sigma_x)\min = -\frac{M.C_2}{I} = -\frac{M}{I/C_2} = -\frac{M}{W_2}$$

حيث W_1 , W_2 تدعى موديل المقطع . كما تدعى بدالة المقطع. فحينما يكون المقطع متناظراً بالنسبة للمحور السليم يكون:

$$C_1 = C_2 = C \Rightarrow W_1 = W_2 = W$$

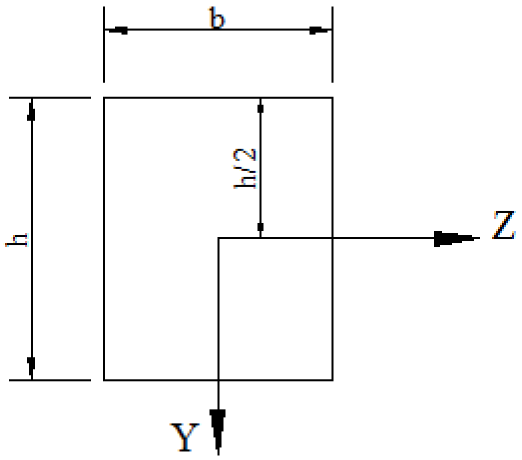
وعليه فإن:

$$\left|(\sigma_X)_{\max}\right| = \left|(\sigma_x)_{\min}\right| = \frac{M}{W}$$

فمن أجل المقطع المستطيل ، الشكل (4−13) يكون:

$$I_Z = \frac{bh^3}{12} \quad ; \qquad C = \frac{h}{2}$$

$$W = \frac{I}{C} = \frac{bh^2}{6}$$



الشكل (4−13)

4−5− توزيع الاجهادات في الانعطاف المنحرف:

إذا كان المقطع المعتبر يخضع إلى مركبتي عزم $M_Y \; ; \; M_Z$ فإنه اعتماداً على علاقة الانعطاف البسيط وبتطبيق قانون التنضد ، يكون الاجهاد الناظمي σ_x في أي نقطة من المقطع احداثياتها y, z معطى بالعلاقة:

$$\sigma_x = \frac{M_Z}{I_Z}.y + \frac{M_Y}{I_Y}.z$$

ويقال عن المقطع أنه في حالة انعطاف منحرف.

4−6 – توزيع الاجهادات في الانعطاف المركب:

إذا كان المقطع المعتبر يخضع إلى مركبتي عزم $M_Y \; ; \; M_Z$ وقوة ناظمية P_X فإن الاجهاد الناظمي σ_X في أي نقطة من المقطع احداثياتها y, z وبتطبيق قانون التنضد يعطى بالعلاقة :

$$\sigma_x = \frac{P_X}{A} + \frac{M_Z}{I_Z}.y + \frac{M_Y}{I_Y}.z$$

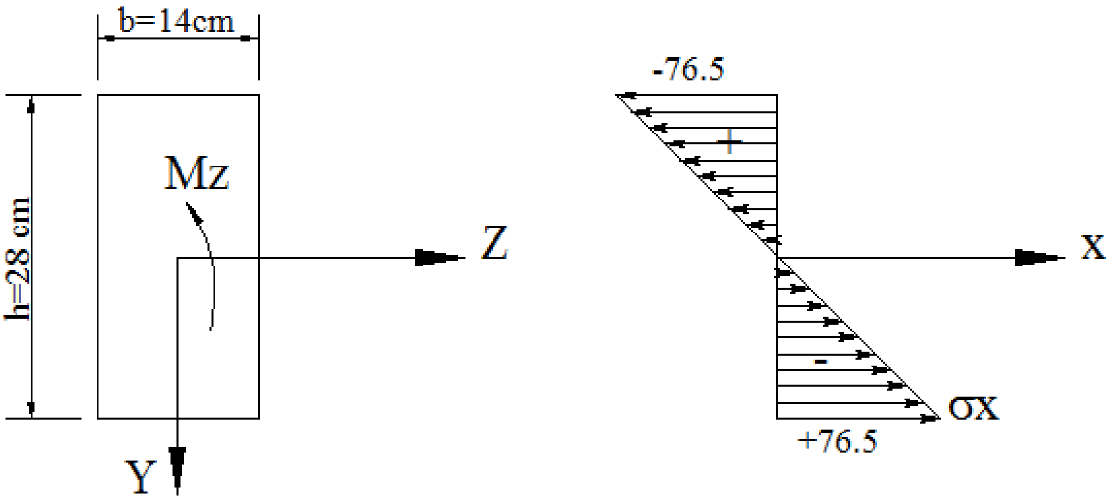
ويقال عن المقطع أنه في حالة الانعطاف المركب.

4-7 أمثلة:

مثال (1):

مقطع عرضي مستطيل الشكل. يخضع إلى عزم انعطاف *M=1.4 t.m* . وأبعاده *b=14 cm* و *h= 28 cm* ، الشكل (*14-4*) . والمطلوب حساب الاجهادات الناظمية على حواف المقطع العرضي ورسم مخططها.

الشكل



الشكل (4-14)

الحل:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_Z}.y$$

$$I_z = \frac{b.h^3}{12} = \frac{14\times 28^3}{12} = 25611 \ \ cm^4$$

$$\sigma_{x\left(y=\frac{h}{2}\right)} = \frac{1.4 \times 10^5}{25611} \times \frac{28}{2} = 67.5 \ \ kg/cm^2$$

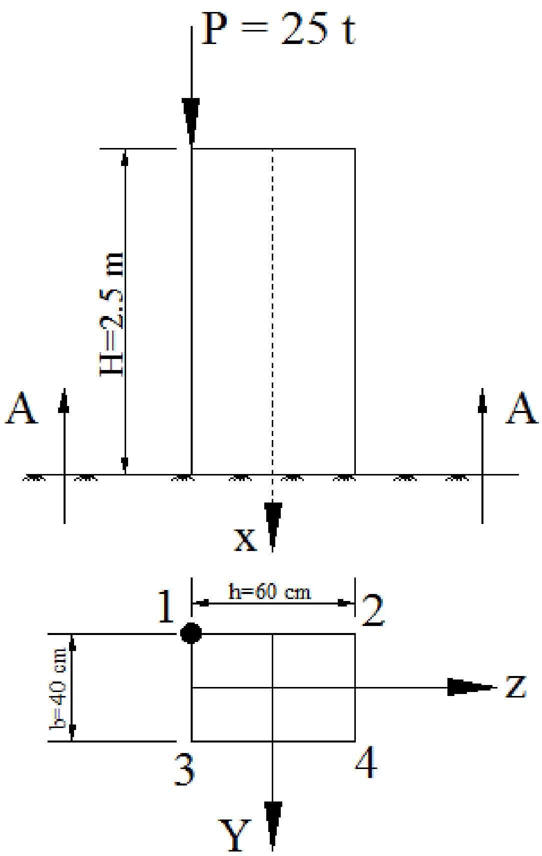
وهو اجهاد شد.

$$\sigma_{x\left(y=\frac{-h}{2}\right)}=\frac{1.4\times10^{5}}{25611}\times\left(\frac{-28}{2}\right)=-67.5\ \ kg/cm^{2}$$

وهو اجهاد ضغط.

مثال (2):

عمود بيتوني موثوق في نهايته السفلى، مقطعه العرضي مستطيل أبعاده مبينة في الشكل (4−15) محمل بحمولة لامركزية قدرها P=25 t تؤثر في الحافة رقم (1) من المقطع العرضي. فإذا علمت أن الوزن النوعي للبيتون $\gamma=2.5t/m^{3}$. والمطلوب: حساب الاجهادات الناظمية المتشكلة في نقاط الزوايا للمقطع العرضي A−A. الكائن عند الوثاقة.



المقطع A−A

الشكل (4−15)

الحل:

بما أن المقطع يخضع لقوة لامركزية سوف يكون لدينا انعطاف مركب و معادلة الاجهاد الناظمي في حال كون المقطع خاضع للانعطاف المركب هي التالية:

$$\sigma_x = \frac{P_x}{A} + \frac{M_y}{I_y}.z + \frac{M_z}{I_z}.y$$

$$A = 0.4 \times 0.6 = 0.24 cm^2$$

الحمولة الكلية مع الوزن الذاتي :

$$P_x = -[25 + 2.4 .(2.5 \times 0.24)] = -26.44 \quad ton$$

$$I_y = \frac{b.h^3}{12} = \frac{0.4 \times 0.6^3}{12} = 0.0072 \quad cm^4$$

$$I_z = \frac{h.b^3}{12} = \frac{0.6 \times 0.4^3}{12} = 0.0032 \quad cm^4$$

$$M_y = P . \frac{h}{2} = 25 \times \frac{0.6}{2} = 7.5 \quad t.m$$

$$M_z = P. \frac{b}{2} = 25 \times \frac{0.4}{2} = 5 \, t.m$$

$$\sigma_x = \frac{-26.44}{0.24} + \frac{7.5}{0.0072} \times z + \frac{5}{0.0032} \times y$$

$$\sigma_x = -110.17 + 1041.67 \times z + 1562.5 \times y$$

$$\sigma_1 = -110.17 + 1041.67 \times (-0.3) + 1562.5 \times (-0.2) = -735.2 \, t/m^2$$ ضغط

$$\sigma_2 = -110.17 + 1041.67 \times (0.3) + 1562.5 \times (-0.2) = -110.2 \quad t/m^2$$ ضغط

$$\sigma_3 = -110.17 + 1041.67 \times (-0.3) + 1562.5 \times (0.2) = -110.2 \, t/m^2$$ ضغط

$$\sigma_4 = -110.17 + 1041.67 \times (0.3) + 1562.5 \times (0.2) = 514.8 \, t/m^2$$ شد

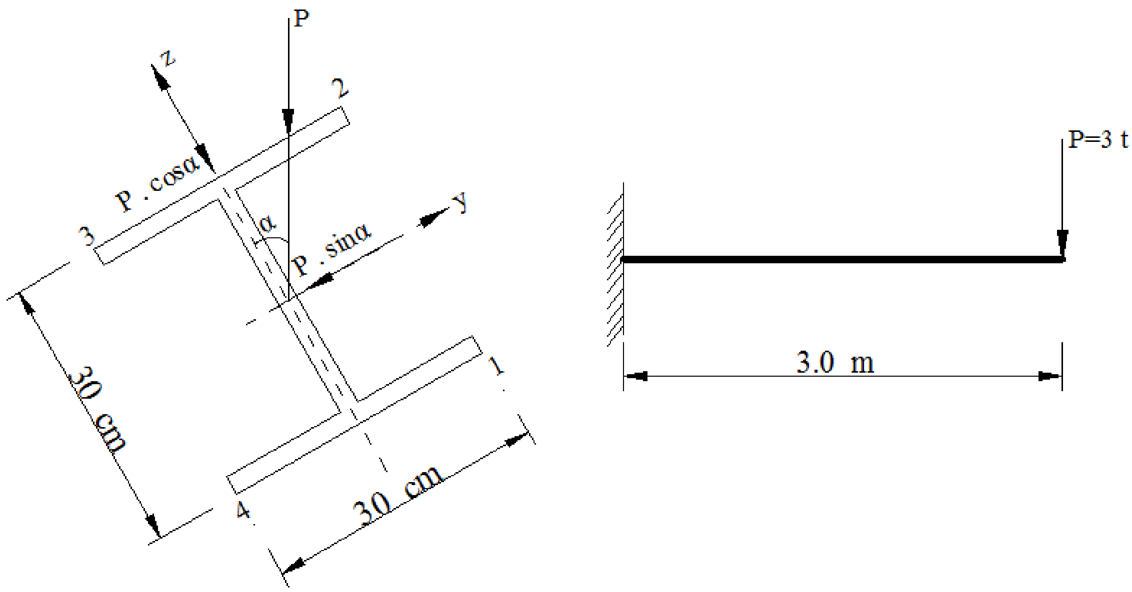
مثال (3):

الجائز المبين في الشكل(16-4) الموثوق من جهة وله نهاية حرة من الجهة الأخرى يتألف مقطعه العرضي من بروفيل فولاذي . يميل المقطع العرضي على طول محور الجائز ليشكل مع حامل القوة P الزاوية α فإذا علمت أن :

$P = 3 ton \quad , \quad \alpha = 30^{\circ} \quad , \quad L = 3\ m$

$I_y = 25760\ cm^4 \quad , \quad I_z = 9010\ cm^4$

والمطلوب : حساب الاجهادات الناظمية المتشكلة في نقاط زوايا المقطع العرضي الكائن عند نقطة الوثاقة.



الشكل (16-4).

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} . z + \frac{M_z}{I_z} . y$$

$$M_y = P . \cos\alpha . L$$

$$M_z = P . \sin\alpha . L$$

$$\sigma_x = \frac{P . \cos\alpha . L}{I_y} z + \frac{P . \sin\alpha . L}{I_z} . y$$

$$\sigma_x = \frac{3000 \times 0.866 \times 300}{25760} . z + \frac{3000 \times 0.5 \times 300}{9010} . y$$

$$= 30.256 .\ z \quad + \ 49.944\ .\ y$$

$$\sigma_1 = 30.256 \times (-15) + 49.944 \times (+15) = +295\ kg / cm^2$$ شد

$$\sigma_2 = 30.256 \times (+15) + 49.944 \times (+15) = +1203\ kg / cm^2$$ شد

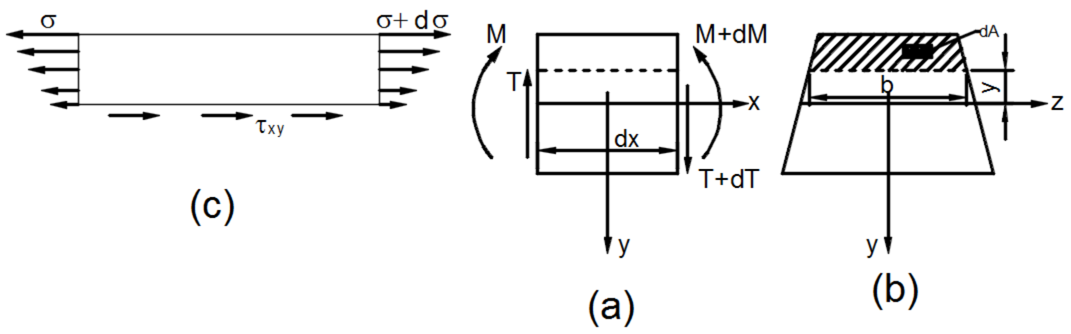
$$\sigma_3 = 30.256 \times (+15) + 49.944 \times (-15) = -295\ kg / cm^2$$ ضغط

$$\sigma_4 = 30.256 \times (-15) + 49.944 \times (-15) = -1203\ kg / cm^2$$ ضغط

8-4 – إجهادات القص المرافقة للانعطاف

لقد رأينا أنه حينما يكون الجائز محملاً بمجموعة من القوى المتعامدة على محوره تنشأ في المقاطع العمودية للجائز قوى القص (T) إلى جانب عزم الانعطاف (M). ورأينا أيضاً كيفية حساب الإجهادات الناظمية الناشئة في مقطع الجائز نتيجة تأثير عزم الانعطاف (M). أما في هذه الفقرة فسنرى كيفية حساب إجهادات القص الناشئة في مقطع الجائز نتيجة تأثير الجهد القاطع (T).

لنقطع من الجائز المعتبر عنصراً طولياً طوله dx، في حالة الانعطاف العرضي المعتبرة لا يكون عزم الانعطاف المؤثر على المقطع اليساري مساوياً لعزم الانعطاف المؤثر على المقطع اليميني وإنما يختلف عنه بمقدار (dM) كما في الشكل (4–17)



الشكل (4–17)

لنقسم هذا العنصر المعتبر إلى جزأين بواسطة مستو أفقي يبعد بمقدار (y) عن المستوي المحايد كما في الشكل (4–17). ولنعتبر توازن الجزء الأعلى من العنصر الذي مساحة مقطعه (A^*)، إن محصلة القوى الناظمية المؤثرة على جزء المقطع A^* الأيسر الذي مساحته A^* تعطى بالعلاقة:

$$P_x^* = \int_{A^*} \sigma_x \, dA = \int_{A^*} \frac{M\, y}{I_Z} \cdot dA = \frac{M}{I_Z} \cdot S_Z^*$$

حيث: $S_Z^* = \int_{A^*} y \cdot dA$ هو عبارة عن العزم الستاتيكي لجزء المقطع الواقع على بعد (y) من المحور المحايد وذلك بالنسبة للمحور المحايد (Z).

على جزء المقطع الأيمن المقابل للمقطع السابق تؤثر محصلة القوى الناظمية التالية:

$$P_x^* + dP_x^* = \frac{(M + dM)}{I_Z} \cdot S_Z^*$$

ويكون الفرق بين القوة المؤثرة على المقطع الأيمن والقوة المؤثرة على المقطع الأيسر هو:

$$dP_x^* = \frac{dM}{I_Z} \cdot S_Z^*$$

هذا الفرق يجب أن يوازن بالقوة المماسية المؤثرة على المقطع الطولي المعتبر بافتراض أن إجهادات القص $\tau = \tau_{xy}$ المؤثرة على هذا المقطع موزعة بانتظام على عرض المقطع الطولي b فتكون قيمة قوى القص المؤثرة على المقطع $\tau \cdot b \cdot dx$ وبالتالي:

$$\frac{dM}{I_Z} \cdot S_Z^* = \tau \cdot b \cdot dx$$

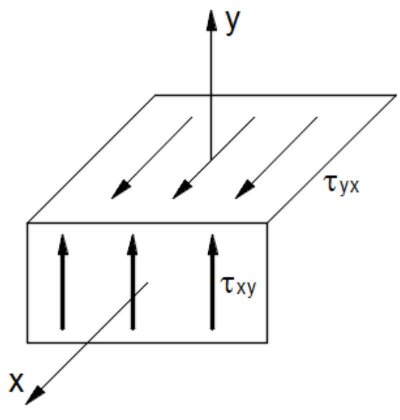
أو:

$$\tau = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{S_Z^*}{b \cdot I_Z}$$

إلا أن: $\frac{dM}{dx} = T$ وعليه يصبح:

$$\tau = \frac{T \cdot S_Z^*}{b \cdot I_Z} \qquad (a-8-4)$$

إن هذه العلاقة τ_{yx} تعطي وهي عبارة عن إجهاد القص المؤثر على المقطع الطولي، إلا أن إجهاد القص هذا مساو للإجهاد τ_{yx} المؤثر على المقطع العرضي للجائز والكائن في اتجاه الجهد القاطع المؤثر (T) وذلك حسب قانون تبادل الإجهادات المماسية كما هو مبين في الشكل (18−4).



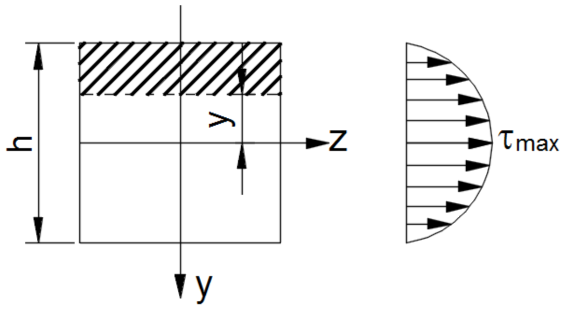
الشكل (18−4)

إن العلاقة $(a-8-4)$ تبين أنه من أجل الطرف العلوي للجائز يكون $S_Z^*=0$ وبالتالي $\tau=0$ لأن المساحة المحصورة فوق y مساوية للصفر. ومن أجل الطرف السفلي للجائز تكون المساحة المحصورة فوق المستوي y هي كامل مساحة المقطع، وبالتالي $S_Z^*=0$ لأن المحور Z يمر من مركز ثقل المقطع المعتبر.

من أجل المقطع المستطيل، الشكل (4−19) يكون:

$$S_Z=b\left(\frac{h}{2}-y\right)*\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+y\right)=\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$

$$\tau=\frac{T}{b\cdot\frac{bh^3}{12}}\cdot\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)=\frac{6T}{bh^3}\cdot\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right) \qquad (b-8-4)$$



الشكل (4−19)

فتغير إجهاد القص بالنسبة لـ y هو بشكل قطع مكافئ كما في الشكل (4−19). حيث نجد من أجل:

$$y=\frac{h}{2} \qquad \rightarrow \qquad \tau_{xy}=0$$

$$y=\frac{-h}{2} \qquad \rightarrow \qquad \tau_{xy}=0$$

$$y=0 \qquad \rightarrow \qquad \tau_{xy}=\frac{3}{2}\cdot\frac{T}{bh}=\tau_{\max}$$

وبالتالي يحصل إجهاد القص الأعظمي عند مستوي المحور السليم للمقطع ويساوي:

$$\tau_{\max}=1.5\tau_{av}$$

حيث: $\tau_{av}=\dfrac{T}{bh}$ الإجهاد المماسي الوسطي.

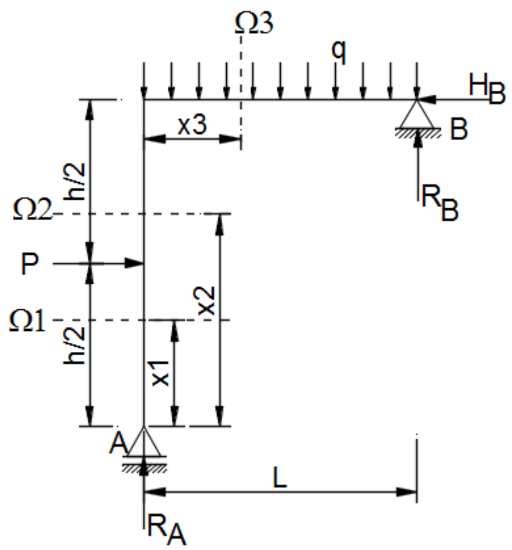
4-9 –الهياكل (الإطارات) المقررة:

الهياكل المقررة هي جمل إنشائية ردود أفعالها تعين بتطبيق قوانين التوازن. وهي عبارة عن أجسام إنشائية مكونة من وصل عدة قضبان مستقيمة وأحياناً منحنية في نقاط وصل تعرف بالعقد الصلبة. والعقدة الصلبة تتصف بأن المماسات للخطوط المرنة الملتقية في هذه العقدة تعاني نفس الدوران دون حصول فرق زاوي نسبي بينها. فالعقدة الصلبة تؤمن خاصية الاستمرار الهندسية بين أعضاء المنشأ بشكل كامل.

4-9-1 أمثلة محلولة

مثال (1):

هيكل إنشائي موضح في الشكل (4−20). والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ومعادلات ومخططات القوى المحورية والقوى القاطعة وعزوم الانعطاف.



الشكل (4−20)

الحل:

$$\sum Fx=0 \;\Rightarrow H_B-P=0 \quad\Rightarrow\; H_B=P$$

$$\sum M_B=0 \;\Rightarrow\; R_A\cdot l-P\cdot\frac{h}{2}-q\cdot\frac{l^2}{2}=0$$

$$\Rightarrow \qquad R_A=\frac{Ph}{2l}+\frac{ql}{2}$$

$$\sum Fy=0 \qquad\Rightarrow\; R_A+R_B-ql=0$$

$$\Rightarrow \qquad R_B=q\cdot l-\frac{Ph}{2l}-\frac{ql}{2}=\frac{ql}{2}-\frac{Ph}{2l}$$

القوى المحورية:

$$N_{\Omega 1}=N_{\Omega 2}=-R_A=-\frac{Ph}{2l}-\frac{ql}{2}$$

$$N_{\Omega 3}=-H_B=-P$$

القوى القاطعة:

$$0\le x_1\le\frac{h}{2} \quad\Rightarrow\quad T_{\Omega 1}=0$$

$$0\le x_2\le h \quad\Rightarrow\quad T_{\Omega 2}=-P$$

$$0\le x_3\le l \quad\Rightarrow\quad T_{\Omega 3}=R_A-qx_3=\frac{Ph}{2l}+\frac{ql}{2}-qx_3$$

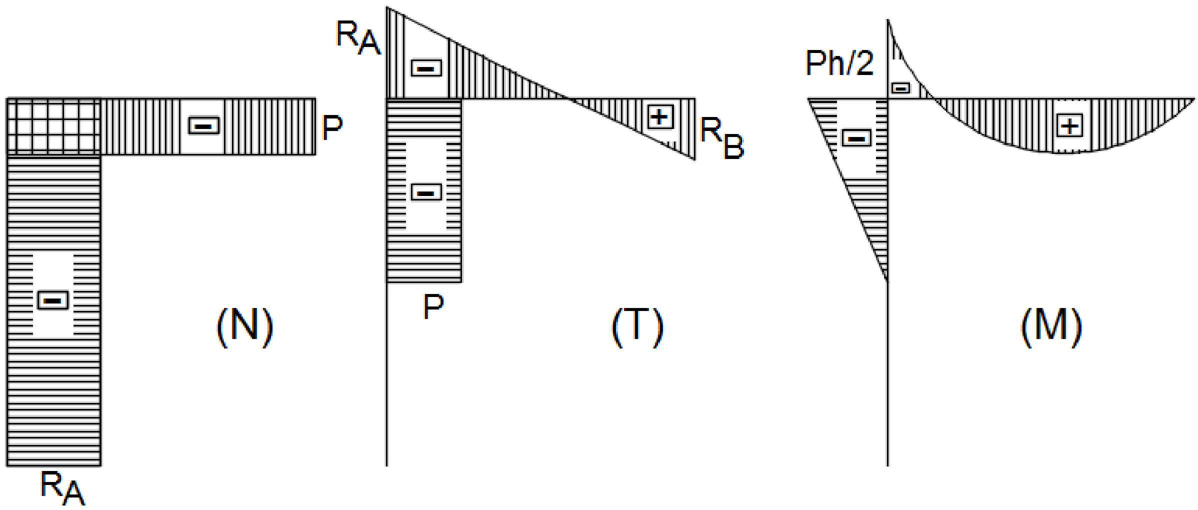
عزوم الانعطاف:

$$0\le x_1\le\frac{h}{2} \quad\Rightarrow\quad M_{\Omega 1}=0$$

$$0\le x_2\le h \quad\Rightarrow\quad M_{\Omega 2}=-P\left(x_2-\frac{h}{2}\right)$$

$$0\le x_3\le l \quad\Rightarrow\quad M_{\Omega 3}=R_A\cdot x_3-P\cdot\frac{h}{2}-q\frac{x_3^2}{2}$$

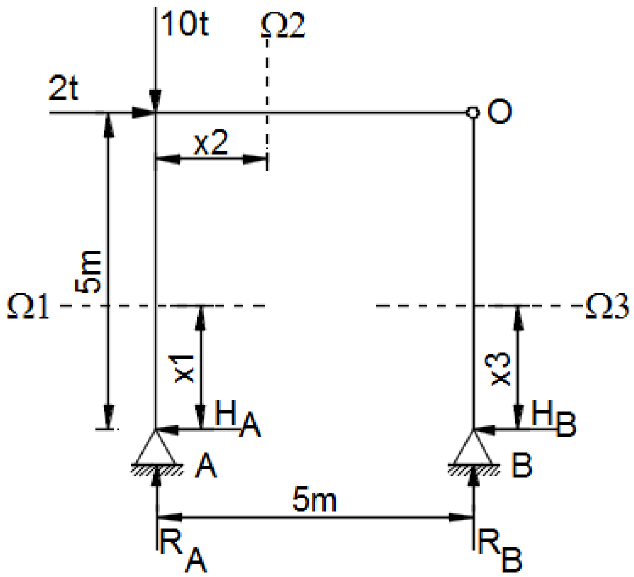
ومخططات (N , T , M) مبينة على الشكل (4−21).



الشكل (4−21)

مثال (2):

جائز إطاري ثلاثي المفصل موضح في الشكل (4−22). والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ومعادلات ومخططات القوى المحورية والقاطعة وعزوم الانعطاف.



الشكل (4−22)

الحل:

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow H_B * 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_B = 0$$
$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B * 5 - 2*5 = 0$$
$$\Rightarrow \qquad R_B = 2 \ t$$
$$\sum Fy = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_A + 2 - 10 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_A = 8 \ t$$
$$\sum Fx = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_A - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_A = 2 \ \ t$$

القوى المحورية:

$$N_{\Omega 1} = -8 \ t \qquad , \qquad N_{\Omega 2} = 0 \qquad , \qquad N_{\Omega 3} = -2 \ t$$

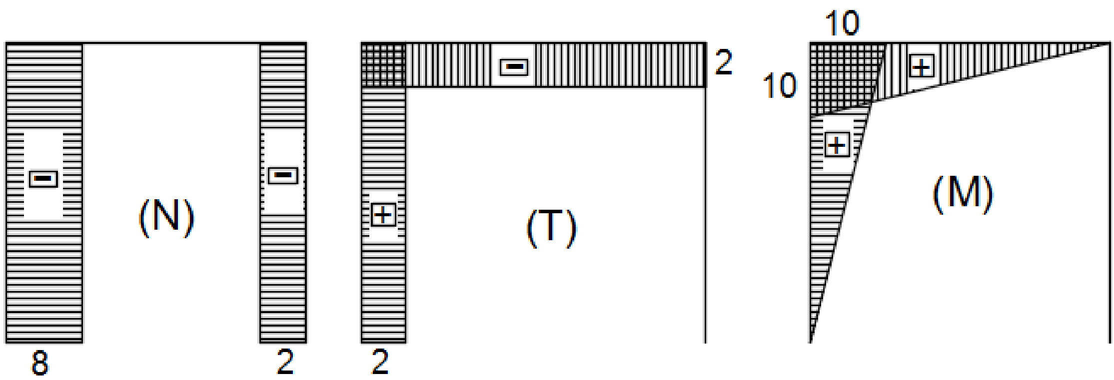
القوى القاطعة:

$$T_{\Omega 1} = 2 \ t \qquad , \qquad T_{\Omega 2} = 8 - 10 = -2 \, t \qquad , \qquad T_{\Omega 3} = 0$$

عزوم الانعطاف:

$$0 \le x_1 \le 5 \ m \quad \Rightarrow \quad M_{\Omega 1} = H_A \cdot x_1 = 2x_1$$
$$0 \le x_2 \le 5 \ m \quad \Rightarrow \quad M_{\Omega 2} = H_A \cdot 5 + 8 \cdot x_2 - 10 \cdot x_2 = 10 - 2x_2$$
$$0 \le x_3 \le 5 \ m \quad \Rightarrow \quad M_{\Omega 3} = 0$$

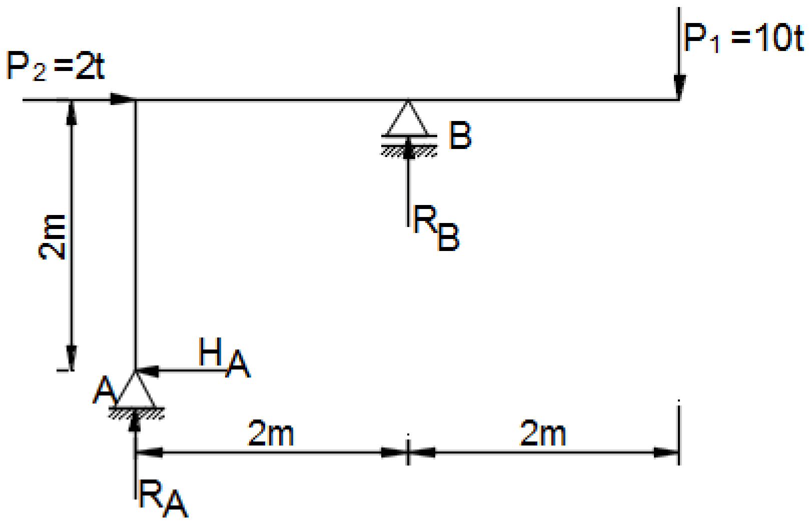
ومخططات (M , T , N) مبينة على الشكل (4-23).



الشكل (4-23)

مثال (3):

هيكل إنشائي موضح في الشكل (4−24). والمطلوب إيجاد ردود الأفعال ومعادلات ومخططات القوى المحورية والقاطعة وعزوم الانعطاف.



الشكل (4−24)

الحل:

$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow R_B * 2 - 1*4 - 2* = 0 \;\Rightarrow\; R_B = 4\ t$$
$$\sum Fy = 0 \;\Rightarrow\; R_A + R_B - P_1 = 0 \;\Rightarrow\; R_A = -4 + 1 = -3\ t$$

وهو بعكس الاتجاه المفروض.

$$\sum Fx = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_A = 2\ \ t$$

القوى المحورية:

$$N_{\Omega 1} = 3\ t \quad , \quad N_{\Omega 2} = 0 \quad , \quad N_{\Omega 3} = 0$$

القوى القاطعة:

$$T_{\Omega 1} = 2\ t \quad , \quad T_{\Omega 2} = -3\, t \quad , \quad T_{\Omega 3} = 1\ t$$

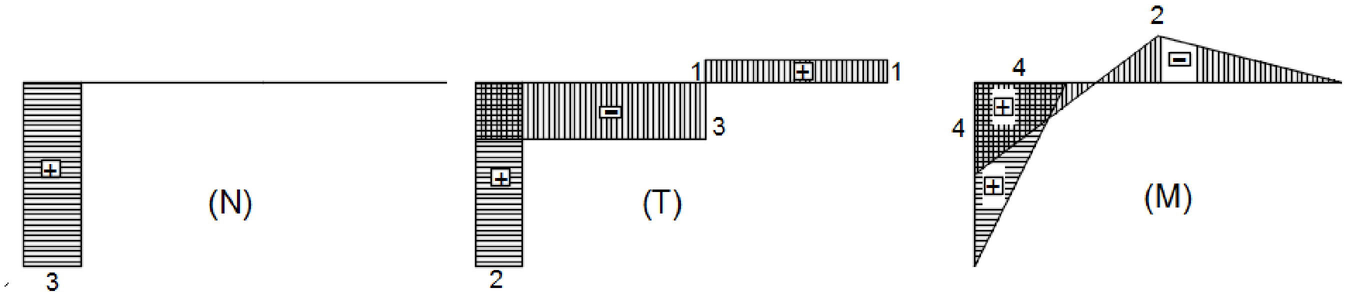
عزوم الانعطاف:

$$0 \le x_1 \le 2\ m \quad \Rightarrow \quad M_{\Omega 1} = 2x_1$$

$$0 \le x_2 \le 2\ m \quad \Rightarrow \quad M_{\Omega 2} = 2*2 - 3 \cdot x_2 = 4 - 3x_2$$

$$0 \le x_3 \le 2\ m \quad \Rightarrow \quad M_{\Omega 3} = -1*x_3 = -x_3$$

ومخططات (N , T , M) مبينة على الشكل (4−25).

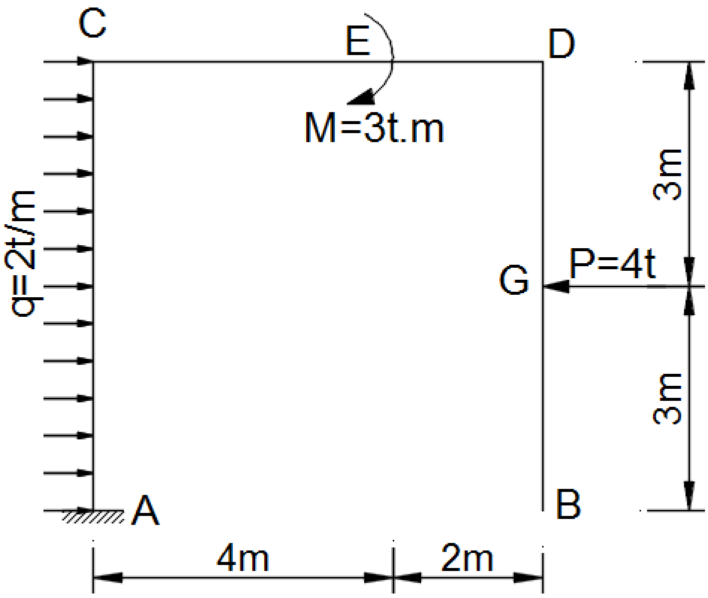


الشكل (4−25)

4-9 -2 أمثلة غير محلولة:

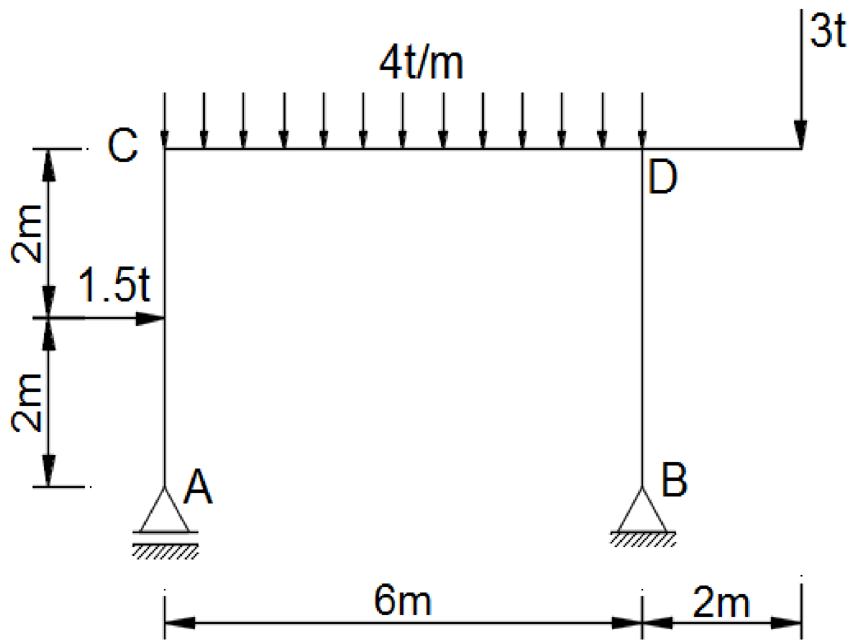
مثال (1)

المطلوب تعيين ردود الأفعال ورسم مخططات القوى المحورية والقوى القاطعة وعزوم الانعطاف للاطار المبين



مثال (2)

المطلوب تعيين ردود الأفعال ورسم مخططات القوى المحورية والقوى القاطعة وعزوم الانعطاف للاطار المبين



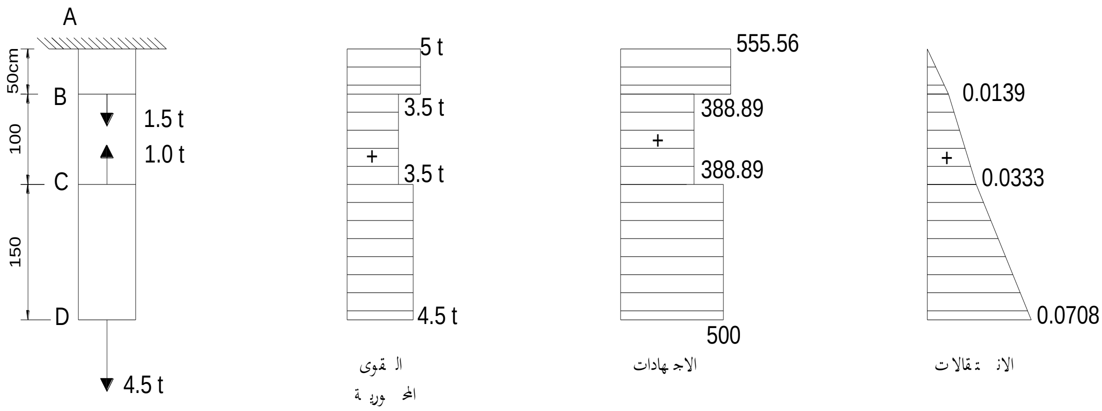
مسائل محلولة

أولا : الشد والانضغاط

المسألة الأولى

ارسم مخططات القوى المحورية والاجهادات الناظمية والانتقالات للعنصر المبين في الشكل علماً أن:

$A = 9cm^2$ $\quad E = 2.1\times10^6 kg/cm^2$ (يهمل الوزن الذاتي).



– : **حساب رد الفعل في الوثاقة:**

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow R_a + -1.5 + 1 - 4.5 = 0 \Rightarrow R_a = 5t$$

– **يقسم العمود المدروس إلى 3 مجالات وفقاً للقوى المطبقة:**

المجال AB : $0 \le x_1 \le 0.5m$

$N_X = R_a = +5t$ (شد)

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} = \frac{5.10^3}{9} = 555.55 kg/cm^2$$

$$\Delta L_{AB} = \frac{N_X.L}{EA} = \frac{5.10^3 \times 50}{2.10^6 \times 9} = 0.0139cm$$

$$\lambda_B = \Delta L_{AB} + \lambda_A$$

$$\lambda_B = 0.0139 + \lambda_A = 0.0139cm$$

المجال BC: $0 \le x_1 \le 1.0m$

$N_X = R_a - 1.5 = +5 - 1.5 = 3.5t$ **(شد)**

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} = \frac{3.5.10^3}{9} = 388.89kg/cm^2$$

$$\Delta L_{BC} = \frac{N_X.L}{EA} = \frac{3.5.10^3 \times 100}{2.10^6 \times 9} = 0.0198cm$$

$$\lambda_C = \Delta L_{BC} + \lambda_B$$

$$\lambda_C = 0.0198 + 0.0139 = 0.0333cm$$

المجال CD : $0 \le x_1 \le 1.5m$

(شد) $N_X = R_a - 1.5 + 1 = +5 - 1.5 + 1 = 4.5t$

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} = \frac{4.5.10^3}{9} = 500kg/cm^2$$

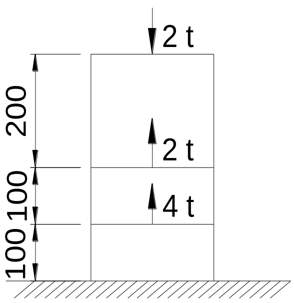
$$\Delta L_{CD} = \frac{N_X.L}{EA} = \frac{4.5.10^3 \times 150}{2.10^6 \times 9} = 0.0375cm$$

$$\lambda_D = \Delta L_{CD} + \lambda_C$$

$$\lambda_D = 0.0375 + 0.0333 = 0.0708cm$$

المسألة الثانية:

المطلوب رسم مخططات القوى الناظمية و الاجهادات والانتقالات للعنصر المبين في الشكل وذلك بإهمال الوزن الذاتي للعنصر (الابعاد بــ cm). $A = 10cm^2$ $E = 2.1\times10^6 kg/cm^2$



– حساب رد الفعل عند المسند A

$$\sum x = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 + 2 + 4 - R_A = 0 \qquad R_A = 4\ t$$

نقسم العنصر إلى ثلاثة مجالات:

1− $0 \le x \le 100$:

$$N_x = +4t \quad \Rightarrow \quad N_A = N_C = 4t$$

$$\sigma_A = \sigma_C = \frac{4000}{10} = 400 \quad kg/cm^2$$

$$\Delta L_x = \frac{Nx}{EA} = \frac{4000\,x}{2\cdot 10^6 \cdot 10} = 0.0002\,x$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_A = 0$$

$$x = 100 \quad \Rightarrow \quad \Delta L_{AD} = 0.02 \quad cm$$

$$\lambda_C = \lambda_A + \Delta L_{AC} = 0 + 0.02 = 0.02$$

2- $100 \le x \le 200$:

$$N_x = 4 - 4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_D = \sigma_C = \frac{0}{10} = 0$$

$$\Delta L_{CD} = \frac{N.(x-100)}{EA} = \frac{0.(x-100)}{E.A} = 0$$

$$\lambda_D = \lambda_C + \Delta L_{CD} = 0.02 + 0 = 0.02$$

3- $200 \le x \le 400$

$$N_x = 4 - 4 - 2 = -2\ t \quad \Rightarrow \quad N_D = N_B = -2t$$

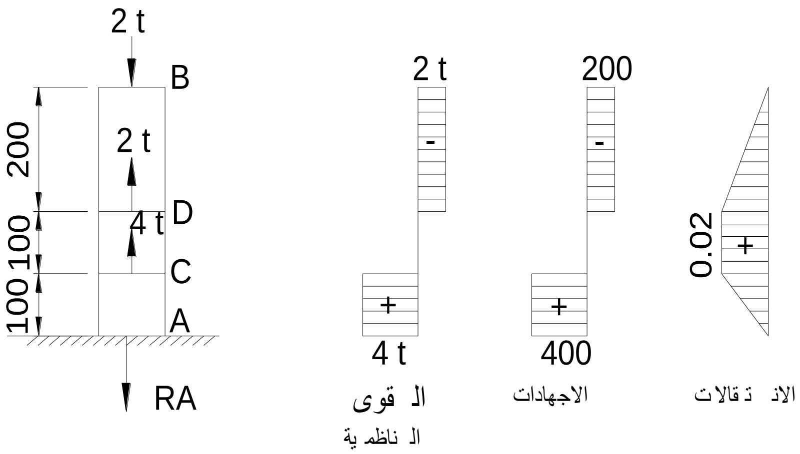
$$\sigma_B = \sigma_D = \frac{-2000}{10} = -200 \quad kg/cm^2$$

$$\Delta L_{DB} = -\frac{N\cdot(x-200)}{EA} = -\frac{2000\cdot(x-200)}{2\cdot 10^6 \cdot 10} = -0.0001\cdot(x-200)$$

$$x = 400 \quad \Rightarrow \quad \Delta L_{DB} = -0.02$$

$$\lambda_B = \lambda_D + \Delta L_{DB} = 0.02 - 0.02 = 0$$

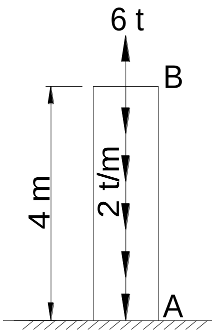
رسم المخططات:



المسألة الثالثة:

المطلوب حساب قيم ورسم مخططات القوى الناظمية والاجهادات والانتقالات للعنصر المبين في الشكل

علماً أن: $A=100 \quad cm^2 \quad , \quad E=2\cdot 10^5 \quad kg/cm^2$



- **حساب رد الفعل:**

$$\sum y=0 \quad \Rightarrow \quad 6-2\cdot 4+R_A=0 \quad \Rightarrow \quad R_A=2\ t$$

نعتبر مبدأ الإحداثيات عند النقطة A :

- **حساب القوى الناظمية:**

$$0\le x\le 4$$
$$N_x=-2+2x$$
$$x=0 \quad \Rightarrow \quad N_A=-2t \quad , \quad x=4 \quad \Rightarrow \quad N_B=-2+2\cdot 4=+6\ t$$
$$N=0 \quad \Rightarrow x=1$$

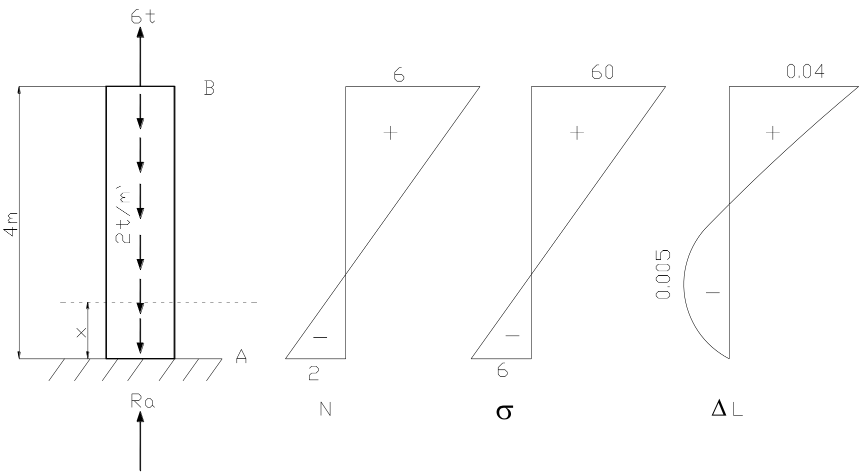
- **حساب الاجهادات:**

$$\sigma_B=\frac{6000}{100}=60 \quad kg/cm^2 \quad , \quad \sigma_A=\frac{-2000}{100}=-20 \quad kg/cm^2$$
$$\sigma=0\Rightarrow x=1$$

- **حساب الانتقالات :**

$$\Delta L_x=-\frac{R_A x}{EA}+\frac{qx^2}{2EA} \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad \Rightarrow \Delta_A=0$$
$$x=4 \quad \Rightarrow \quad \Lambda_B=-\frac{2000\cdot 400}{2\cdot 10^5\cdot 100}+\frac{20\cdot 400^2}{2\cdot 2\cdot 10^5\cdot 100}=0.04 \quad cm$$
$$x=1 \quad \Rightarrow \quad \Delta=-\frac{2000\cdot 100}{2\cdot 10^5\cdot 100}+\frac{20\cdot 100^2}{2\cdot 2\cdot 10^5\cdot 100}=-.0.005 \quad cm$$

- **رسم المخططات:**



المسألة الرابعة:

المطلوب حساب قيم ورسم مخططات القوى الناظمية والاجهادات والانتقالات للعنصر المبين في الشكل

علماً أن: $A_1 = 45 \ \ cm^2 \ , \ A_2 = 30 \ cm^2 \quad , \quad E = 2 \cdot 10^5 \quad kg/cm^2$

- **حساب رد الفعل في الوثاقة:**

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow$$

$$R_A - 8 - 3 \times 3 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = \ +1$$

- **دراسة القوى والاجهادات الناظمية والانتقالات:**

المجال AB:

$0 \le X \le 2m$

$$N_X = -R_A = \ -1 \ \ ton$$

$$\sigma_X = \frac{-1 \times 10^3}{45} = \ -22.22 \quad kg/cm^2$$

$$\Delta L_{AB} = \frac{N_X \ .L}{E \ \ . A} = \frac{-1 \times 10^3 \times 200}{2 \times 10^5 \times 45} = -0.022 \ cm$$

$$\lambda_B = \lambda_A + \Delta L_{AB}$$

$$\lambda_B = 0 - 0.022 = \ -0.022 \quad cm$$

المجال BC:

$0 \le X \le 3m$

$$N_X = -1+8 = +7\ t$$

$$\sigma_X = \frac{7\times10^3}{45} = 155.56\ kg/cm^2$$

$$\Delta L_{BC} = \frac{7\times10^3\times300}{2\times10^5\times45} = +0.233\ cm$$

$$\lambda_C = \lambda_B + \Delta L_{AB}$$

$$\lambda_C = -0.022+0.233 = +0.211\ cm$$

<u>المجال CD:</u>

$$0 \le X \le 3m$$

$$N_X = -1+8+3.X = 7+3X$$

$$X=0 \Rightarrow N_C = 7\ t.\ ,\ \sigma_c = \frac{7\times10^3}{30} = 233.33\ kg/cm^2$$

$$X=3 \Rightarrow N_D = 7+3\times3 = 16\ t.\ ,\ \sigma_D = \frac{16\times10^3}{30} = 533.33\ kg/cm^2$$

$$\Delta L_{CD} = \frac{7\times10^3\times X}{2\times10^5\times30} + \frac{3\times10\times X^2}{2\times2\times10^5\times30}$$

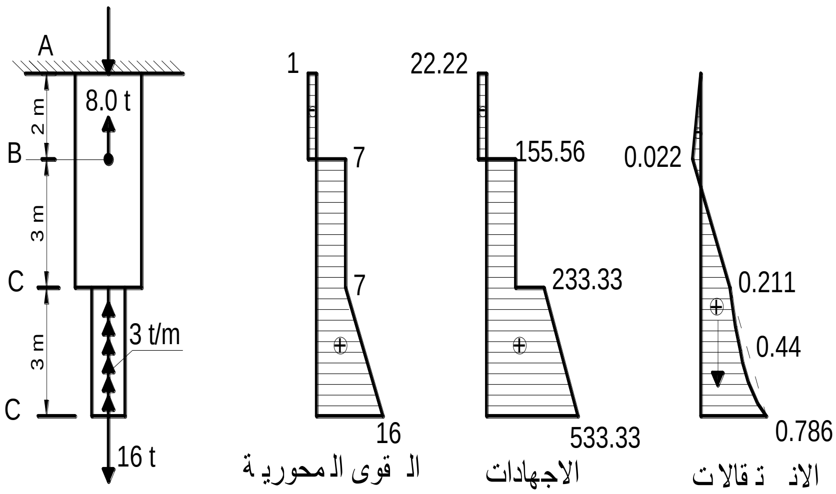
$$\Delta L_{CD} = \frac{7\times10^3\times300}{2\times10^5\times30} + \frac{30\times300^2}{2\times2\times10^5\times300} = 0.575\ cm$$

$$\lambda_D = \lambda_C + \Delta L_{CD} \Rightarrow \lambda_D = 0.211+0.575 = +0.786\ cm$$

<u>الانتقال في منتصف المجال CD (لتسهيل الرسم فقط):</u>

$$\Delta L_{CD} = \frac{7\times10^3\times150}{2\times10^5\times30} + \frac{3\times10\ \ \times150^2}{2\times2\times10^5\times30} = 0.231\ cm$$

$$\lambda_D = \lambda_C + \Delta L_{CD} \Rightarrow \lambda_D = 0.211+0.231 = +0.442\ cm$$



ثانياً : الانعطاف

المسألةالأولى

جائز بسيط يتعرض للحمولات المبينة في الشكل والمطلوب:

1–حساب ردود الأفعال عند المساند.

2 – ايجاد معادلات ورسم مخططات الجهد القاطع وعزم الانعطاف.

3 – حساب عزم الانعطاف الأعظمي والاجهاد الناظمي الأعظمي وإجهاد القص عند المسند A وذلك باعتبار أن المقطع العرضي للجائز مستطيل عرضه 30cm وارتفاعه 50cm.

- **حساب ردود الأفعال:**

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad R_b \times 5 - 2\times 5\times 2.5 - 4\times 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_b = 8.2 \ t$$
$$\sum y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_a + 8.2 - 2\times 5 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_a = 5.8 \ t$$

- **معادلات الجهد القاطع:**

$$0 \le x \le 4 \quad \Rightarrow \quad T_x = 5.8 - 2\times x \quad \Rightarrow$$
$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A = 5.80 \ t \quad , \quad x = 4 \quad \Rightarrow \quad T_C = 5.8 - 2\times 4 = -2.20 \ t$$
$$4 \le x \le 5 \quad \Rightarrow \quad T_x = 5.8 - 2\times x - 4 \quad \Rightarrow$$
$$x = 4 \quad \Rightarrow \quad T_C = 5.8 - 2\times 4 - 4 = -6.20 \quad t$$
$$x = 5 \quad \Rightarrow \quad T_b = 5.8 - 2\times 5 - 4 = -8.20 \quad t$$

- **معادلات عزم الانعطاف:**

$$0 \le x \le 4 \quad \Rightarrow \quad M_x = 5.8\times x - 2\times \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow$$
$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = 0 \quad , \quad x = 4 \quad \Rightarrow \quad M_C = 5.8\times 4 - 2\times \frac{4^2}{2} = 7.2 \quad t.m$$
$$4 \le x \le 5 \quad \Rightarrow \quad M_x = 5.8\times x - 2\times \frac{x^2}{2} - 4\left(x-4\right) \quad \Rightarrow$$
$$x = 4 \quad \Rightarrow \quad M_c = 7.2 tm \quad , \quad x = 5 \quad \Rightarrow \quad M_b = 5.8\times 5 - 2\times \frac{5^2}{2} - 4\times\left(5-4\right) = 0$$

- **حساب العزم الأعظمي:**

يكون العزم الأعظمي عند المقطع الذي ينعدم فيه الجهد القاطع وبالتالي يكون:

$$0 \le x \le 4 \quad \Rightarrow \quad T_x = 5.8 - 2 \times x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x = 2.9 \quad \Rightarrow \quad M_{\max} = 5.8 \times x - 2 \times \frac{x^2}{2} = 5.8 \times 2.90 - 2 \cdot \frac{2.90^2}{2} = 8.41 \;\; t.m$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot}{I_Z} y = \frac{8.41 \times 10^5}{312500} .25 = 67.28 kg / cm^2$$

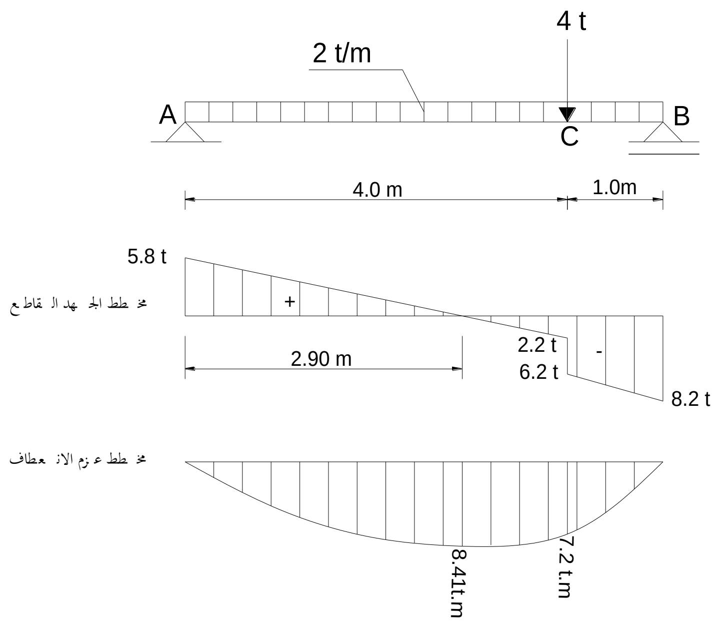
$$y = h / 2 = 50 / 2 = 25 cm$$

$$I_Z = \frac{bh^3}{12} = \frac{30 \times 50^3}{12} = 312500 cm^4$$

- **حساب اجهاد القص الأعظمي عند المسند A:**

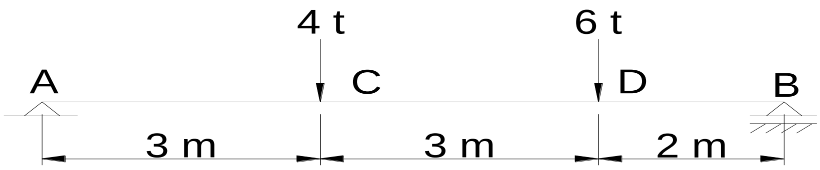
$$\tau = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} = \frac{3}{2} \frac{5.8 \times 10^3}{30 \times 50} = 5.8 kg / cm^2$$

- **رسم المخططات :**



المسألة الثانية

جائز بسيط يتعرض للحمولات المبينة في الشكل. والمطلوب حساب ردود الأفعال للمساند وايجاد معادلات ورسم مخططات الجهد القاطع وعزم الانعطاف وحساب قيمة اجهاد الانعطاف الاعظمي مع العلم أن المقطع العرضي للجائز مستطيل عرضه 30cm وارتفاعه 60cm.



- **حساب ردود الأفعال:**

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B \cdot 8 - 6 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = 6 \ \ ton$$
$$\sum y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A + R_B - 6 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = 6 + 4 - 6 = 4 \ \ ton$$

- **معادلات الجهد القاطع:**

$$0 \le x \le 3 \quad \Rightarrow \quad T = R_A = 4 \ \ ton \ \Rightarrow T_A = T_C = 4 \ \ t$$
$$3 \le x \le 6 \quad \Rightarrow \quad T = 4 - 4 = 0 \Rightarrow T_C = T_D = 0$$
$$6 \le x \le 8 \quad \Rightarrow \quad T = 4 - 4 - 6 = -6 \ \ ton \Rightarrow T_D = T_B = -6t$$

- **معادلات عزم الانعطاف:**

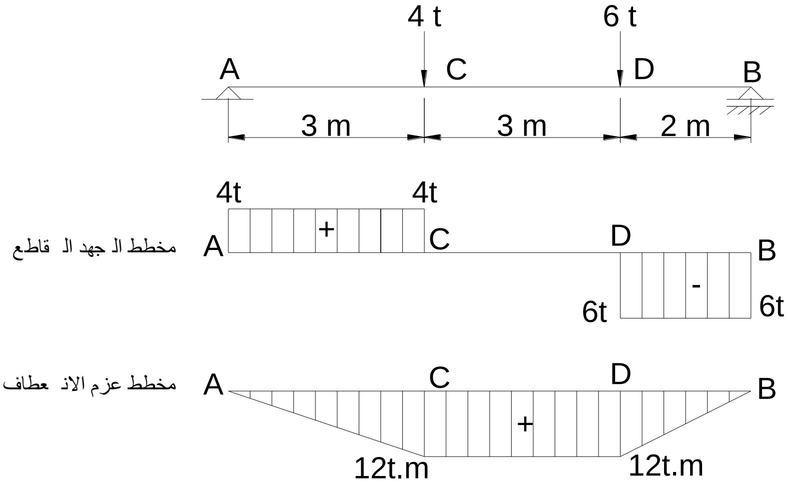
$$0 \le x \le 3 \quad \Rightarrow \quad M_x = 4 \cdot x \quad \Rightarrow$$
$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = 0 \quad , \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad M_B = 12 \ \ t.m$$
$$3 \le x \le 6 \quad \Rightarrow \quad M_x = 4 \cdot x - 4 \cdot (x - 3) \quad \Rightarrow$$
$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad M_c = 12 \ \ t.m \ , \quad x = 6 \quad \Rightarrow \quad M_D = 4 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 12 \quad t.m$$

$$6 \le x \le 8 \quad \Rightarrow \quad M_x = 4 \cdot x - 4 \cdot (x - 3) - 6.(x - 6) \quad \Rightarrow$$
$$x = 6 \quad \Rightarrow \quad M_D = 12 \quad , \quad x = 8 \quad \Rightarrow \quad M_B = 0$$

- **حساب اجهاد الانعطاف الأعظمي:**

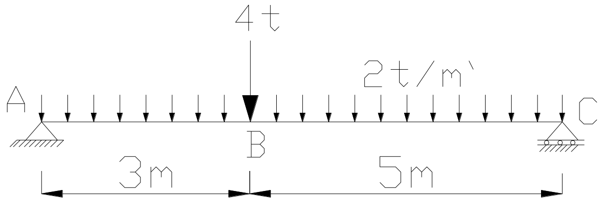
$$M_{\max} = 12 t.m$$
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_Z} y$$
$$y = \frac{h}{2} = \frac{60}{2} = 30 cm$$
$$I_Z = \frac{bh^3}{12} = \frac{30.60^3}{12} = 540000 \ cm^4$$
$$\sigma_{\max} = \frac{12.10^5}{540000} .30 = 66.67 kg / cm^2$$

- **رسم المخططات**



المسألة الثالثة

المطلوب حساب قيم و رسم مخططات الجهد القاطع وعزم الانعطاف للجائز المبين بالشكل. وحساب الإجهاد الناظمي الناتج عن العزم الأعظمي علماً أن مقطع الجائز مستطيل أبعاده هي: h=60 cm ، b=30 cm



- **إيجاد ردود الأفعال:**

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad R_C \cdot 8 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{8}{2} - 4 \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_C = 9.5 \ t$$

$$\sum y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_a + 9.5 - 2 \cdot 8 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_a = 10.5 \ t$$

- **معادلات الجهد القاطع:**

$$0 \le x \le 3 \quad \Rightarrow \quad T_x = 10.5 - 2 \cdot x \quad \Rightarrow$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A = 10.5 \ t \quad , \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad T_B = 4.5 \ t$$

$$3 \le x \le 8 \quad \Rightarrow \quad T_x = 10.5 - 2 \cdot x - 4 \quad \Rightarrow$$

$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad T_B = 0.5 \ t \quad , \quad x = 8 \quad \Rightarrow \quad T_C = -9.5 \ t$$

- **معادلات عزم الانعطاف:**

$$0 \le x \le 3 \;\Rightarrow\; M_x = 10.5 \cdot x - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \qquad \Rightarrow$$

$$x = 0 \;\Rightarrow\; M_A = 0 \;\;,\;\; x = 3 \;\Rightarrow\; M_B = 10.5 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{3^2}{2} = 22.5 \quad t.m$$

$$3 \le x \le 8 \;\Rightarrow\; M_x = 10.5 \cdot x - 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 4(x-3) \qquad \Rightarrow$$

$$x = 3 \;\Rightarrow\; M_B = 22.5 \;\;,\;\; x = 8 \;\Rightarrow\; M_C = 0$$

- **حساب الإجهاد الناتج عن العزم الأعظمي:**

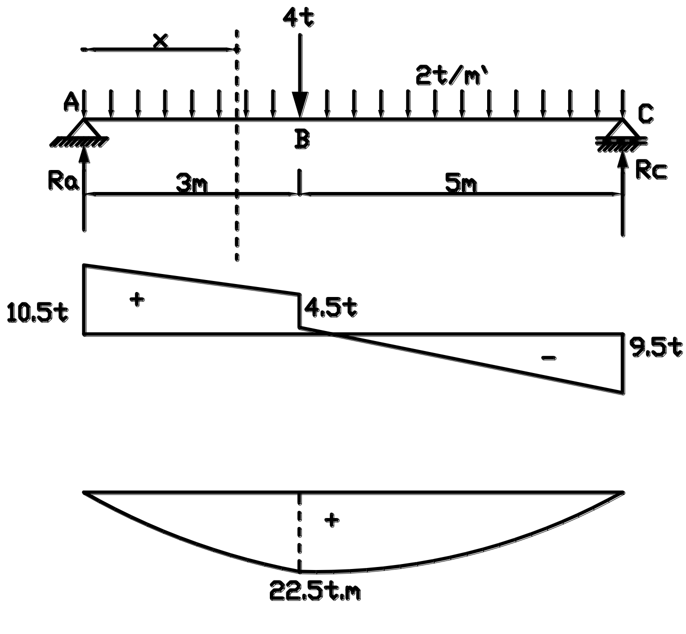
يكون العزم الأعظمي عند المقطع الذي ينعدم فيه القص وبالتالي يكون:

$$M_{max} = 22.5 \quad t.m \qquad , \qquad \sigma = \frac{M_{max}}{I_x}\, y$$

$$I_x = \frac{b\,h^3}{12} = \frac{30 \cdot 60^3}{12} = 540000 \quad cm^4 \qquad , \qquad y = \frac{h}{2} = \frac{60}{2} = 30 \quad cm$$

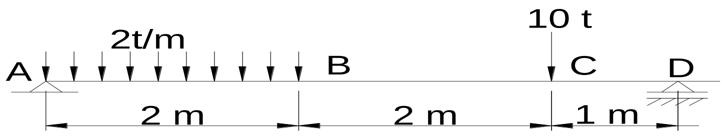
$$\sigma = \frac{22.5 \cdot 10^5}{540000} \cdot 30 = 125 \qquad kg/cm^2$$

- **رسم المخططات :**



المسألة الرابعة :

جائز بسيط يتعرض للحمولات المبينة في الشكل. والمطلوب ايجاد معادلات وقيم ورسم مخططات الجهد القاطع وعزم الانعطاف. وحساب الاجهاد الناظمي الناتج عن العزم الأعظمي علما أن المقطع العرضي للجائز مستطيل أبعاده . h=60 cm ، b=30 cm



- **ردود الأفعال:**

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad R_D \cdot 5 - 2\cdot 2\cdot 1 - 10\cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_D = 8.8\ t$$
$$\sum y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_a + 8.8 - 2\cdot 2 - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_a = 5.2\ t$$

- **معادلات الجهد القاطع:**

$$0 \le x \le 2 \quad \Rightarrow \quad T_x = 5.2 - 2\cdot x \quad \Rightarrow$$
$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A = 5.2\ t \quad , \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad T_B = 1.2\ t$$
$$2 \le x \le 4 \quad \Rightarrow \quad T_x = 5.2 - 2\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad T_B = T_C = 1.2\ t$$
$$4 \le x \le 5 \quad \Rightarrow \quad T_x = 5.2 - 2\cdot 2 - 10 \quad \Rightarrow \quad T_C = T_D = -8.8\ t$$

- **معادلات عزم الانعطاف:**

$$0 \le x \le 2 \quad \Rightarrow \quad M_x = 5.2\cdot x - 2\cdot \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow$$
$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = 0 \quad , \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad M_B = 5.2\cdot 2 - 2\cdot \frac{2^2}{2} = 6.4\ \ t.m$$
$$2 \le x \le 4 \quad \Rightarrow \quad M_x = 5.2\cdot x - 2\cdot 2\cdot (x-1) \quad \Rightarrow$$
$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad M_B = 6.4 \quad , \quad x = 4 \quad \Rightarrow \quad M_C = 5.2\cdot 4 - 2\cdot 2\cdot (4-1) = 8.8\ \ t.m$$
$$4 \le x \le 5 \quad \Rightarrow \quad M_x = 5.2\cdot x - 2\cdot 2\cdot (x-1) - 10\cdot (x-4) \quad \Rightarrow$$
$$x = 4 \quad \Rightarrow \quad M_C = 8.8 \quad , \quad x = 5 \quad \Rightarrow \quad M_D = 0$$

حساب الإجهاد الناتج عن العزم الأعظمي:

يكون العزم الأعظمي عند المقطع الذي ينعدم فيه القص وبالتالي يكون:

$$M_{\max} = 8.8 \quad t.m \qquad , \qquad \sigma = \frac{M_{\max}}{I_x}\, y$$

$$I_x = \frac{b\,h^3}{12} = \frac{30\cdot 60^3}{12} = 540000 \quad cm^4 \qquad , \qquad y = \frac{h}{2} = \frac{60}{2} = 30 \quad cm$$

$$\sigma = \frac{8.8\cdot 10^5}{540000}\cdot 30 = 48.9 \qquad kg/cm^2$$

- **رسم المخططات:**