§ – 2 الوسط الحسابي

يعرف الوسط الحسابي ويقال أيضاً المتوسط الحسابي (The arithmetic mean) سواء لبيانات مفردة أو لبيانات مجمعة في فئات بمجموع قيم التوزيع مقسوما على عدد هذه القيم . يرمز عادة للوسط الحسابي المحسوب لقيم عينة مسحوبة من المجتمع الإحصائي بالرمز $\bar{x}$ ويقرأ (x bar) ويرمز لحجم العينة بالرمز n ، كما يرمز للوسط الحسابي لقيم المجتمع الإحصائي بالرمز μ ويقرأ (ميو) بينما يرمز لحجم المجتمع الإحصائي بالرمز N . ندرس هنا الوسط الحسابي لبيانات مفردة ويسمى في هذه الحالة الوسط الحسابي البسيط وندرسه في حالة التوزيعات التكرارية كما ندرس أيضا هذا الوسط في حالة التثقيل ويسمى في هذه الحالة الوسط الحسابي المرجح أو المثقل .

1 – الوسط الحسابي لقيم مفردة :

لتكن لدينا مجموعة القيم المفردة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ لعينة إحصائية حجمها n نعرّف الوسط الحسابي للعينة كما رأينا بحاصل قسمة مجموع هذه القيم على عددها ، أي :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

وينتج عن هذا التعريف أن مجموع القيم يساوي إلى عددها مضروبا بالوسط الحسابي :

$$\sum x_i = n\,\bar{x}$$

مثـــال 1 :

لتكن لديك الكميات التالية لإنتاج الحليب باللتر لأبقار مزرعة :

20	24	18	20	20	23	22	17	20	20
20	18	21	23	22	15	19	19	24	16

المطلوب : حساب الوسط الحسابي لإنتاج الحليب بالرأس .

الحـــل :

نلاحظ أن البيانات الإحصائية تتعلق بمجتمع إحصائي وعددها $N = 20$:

$$\mu = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\overset{٤٠١}{\cancel{4001}}}{20} = 20.05$$

لاحظ أن : $\sum x_i = \mu \,.\, N = 20.05\,(20) = 401$

من المهم عند تفسير الظاهرة المدروسة أن لا نحمّل الوسط الحســـابي تفســـيراً للظاهرة أكثر مما يستطيع أن يحمله . ففي مثالنا عن كميات إنتاج الحليب نجد أن قيمة الوسط الحسابي $\mu = 20.05$ غير موجودة أصلا في قيم التوزيع الحقيقية المعطاة ، كما نجد أن هناك قيماً بعيدة عن هذا المتوسط مثل الكمية 15 لتراً وأن هناك 13 قيمة أصغر من هذا الوسط بينما هناك 7 قيم فقط أكبر منه .

4 – الوسط الحسابي لتوزيع تكراري

لحساب الوسط الحسابي لتوزيع تكراري سنستعين بجدول التوزيع التكراري للأجور اليومية لعينة حجمها خمسون عاملا مفترضين أن متغير الأجر مستمر .

جدول رقم – 1 –

توزيع الأجور اليومية للعينة

التكرار f_i	فئات الأجور	i
5	[100 – 110[	1
12	[110 – 120[	2
20	[120 – 130[	3
10	[130 – 140[	4
3	[140 – 150]	5
50		$\sum$

المصدر : فرضي .

في توزيع تكراري كما مبين في المثال السابق لا تظهر الأجور الفردية للعمال بحيث نجمع هذه الأجور ونقسمها على عددها لنحصل على الوسط الحسابي . من أجل القيام بحساب الوسط الحسابي نبدأ بالفئة الأولى ونجد أنها تحوي على خمسة أجور لا نعرف قيمها الفعلية ولكننا يمكن أن نفترض أن هؤلاء العمال يتوزعون على طول الفئة بشكل متساو بحيث يصبح مركز الفئة في هذه الحالة كمتوسط الأجر لهؤلاء العمال ، مما يعني بنتيجة الأمر افتراض أن مركز الفئة الأولى x_1 يمثل الوسط الحسابي لأجور العمال الخمسة والذي يساوي في حالة مثالنا إلى :

$$x_1 \cdot f_1 = 105\,(5) = 525 \quad \text{ليرة سورية}$$

بتعميم هذا النظرة للفئة الأولى على بقية الفئات نحصل على جدول الحسابات المساعد التالي : حيث أن :

$$\text{مركز الفئة } x_i = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة} + \text{الحد الأعلى للفئة}}{2}$$

جدول رقم – 2 –

الجدول المساعد لحساب الوسط الحسابي للأجور

i	الفئات	f_i	x_i	$x_i \cdot f_i$
1	[100 – 110[	5	105	525
2	[110 – 120[	12	115	1380
3	[120 – 130[	20	125	2500
4	[130 – 140[	10	135	1350
5	[140 – 150]	3	145	435
Σ		50		6190

وسيعطى مجموع القيم التقديري للعينة بالمقدار $\sum x_i \cdot f_i$ وحيث أن حجم العينة $\sum f_i$ يصبح قانون الوسط الحسابي لتوزيع تكراري :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i}$$

يسمح لنا هذا القانون بتقدير قيمة الوسط الحسابي من توزيع تكراري ، وفي مثالنا نقدر الوسط الحسابي للأجور بـــ :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{6190}{50} = 123.8$$

§ - 6 الوسيط

بشكل عام يعرّف الوسيط (THE MEDIAN) لمجموعة بيانات بأنه القيمة التي تقسم القيم المعطاة إلى قسمين متساويين ، نصف هذه البيانات قيمها أصغر من قيمة الوسيط وقيم النصف الآخر أكبر منه ، ويرمز له بالرمز Me . فالوسيط إذن مقياس موضعي مركزي لأنه يفصل مجموعة البيانات إلى قسمين متساويين . فمثلا ، العمر الوسيط للسكان هو العمر الذي يقسم السكان إلى قسمين متساويين أعمار القسم الأول أصغر منه وأعمار القسم الثاني أكبر منه .

1 – حساب الوسيط لمعلومات مفردة :

بشكل دقيق يعرف وسيط مجموعة بيانات بأنه القيمة التي تقع تماما في قائمتها المرتبة تصاعدياً أو تنازلياً إذا كان عدد هذه البيانات فردياً . أما إذا كان عدد هذه البيانات زوجياً فيعرّف الوسيط بأنه الوسط الحسابي للقيمتين الواقعتين في وسط قائمة البيانات المرتبة تصاعدياً أو تنازلياً .

إذا كانت لدينا البيانات العددية المفردة والمرتبة تصاعديا أو تنازليا التالية :

$$x_1 , x_2 , \ldots , x_n$$

وعددها n فردي فالوسيط Me هو قيمة الحد الذي ترتيبه $\dfrac{n+1}{2}$.

مثـــال 12 :

أوجد وسيط العلامات لمجموعة قيم العلامات المفردة التالية :

7 ، 6 ، 10 ، 2 ، 4 ، 3 ، 5

الحـــل :

لحساب الوسيط لا بدّ لنا أولا من ترتيب القيم تصاعديا (أو تنازليا إن شئنا ذلك) :

2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 10

ثمّ نحسب ترتيب الوسيط ، أي رقم تسلسل الحد الوسيط ، وذلك بعلاقة الترتيب فنجد :

$$\frac{n+1}{2}=\frac{7+1}{2}=4$$

إذن الوسيط هو قيمة الحد الرابع (الحد ذو الترتيب الرابع) ، فنكتب $Me=5$. قيمة الوسيط هذه تتوسط مجموعة بيانات المثال فتقسمها إلى قسمين متساويين ، ثلاث أصغر منها وثلاث أكبر .

أما إذا كانت لدينا البيانات العددية المفردة والمرتبة تصاعديا أو تنازليا التالية :

$$x_1 , x_2 , \dots , x_n$$

وعددها n زوجي فالوسيط Me هو الوسط الحسابي لقيمتي الحـــدين الـــواقعين في وسط البيانات المرتبة حول الترتيب $\frac{n+1}{2}$.

مثـــال 13 :

أوجد الأجر اليومي الوسيط للأجور المبينة فيما يلي :

200 ، 950 ، 200 ، 200 ، 300 ، 300 ، 350 ، 840 ، 200 ، 200

الحـــل :

نقوم بترتيب الأجور تصاعدياً :

200 ، 200 ، 200 ، 200 ، 200 ، 300 ، 300 ، 350 ، 840 ، 950

نحسب الآن ترتيب الأجر الوسيط :

$$\frac{n+1}{2}=\frac{10+1}{2}=5.5$$

ونجد الترتيب 5.5 يفصل خمسة حدود عن يساره وخمسة حدود عن يمينه وليس هناك من قيمة تقابل الترتيب 5.5 ، ولمّا كان الترتيب 5.5 يقع بين الترتيبين الخامس والسادس فإنّ قيمة الوسيط هي قيمة الوسط الحسابي للقيمتين المقابلتين لهذين الترتيبين

$$Me=\frac{200+300}{2}=250$$

أي أن الأجر 250 يقسم أجور العمال إلى قسمين متساويين ، فهناك خمسة أجور أقل منه وخمسة أجور أكبر منه .

لاحظ في هذا المثال أن الأجر الوسيط هو $Me=250$ وهو يختلف عن الوسط الحسابي لهذه الأجور الذي نجده بالحساب $\bar{x}=374$ ، وهذا بسبب تأثر الوسط الحسابي بالقيم المتطرفة (950 و 840) بينما لم يتأثر الوسيط بذلك مما يجعلنا نذكّر بما قلناه سابقا إن كل مقياس من مقاييس النزعة المركزية له مفهوم مختلف نسبيا عن المقاييس الأخرى فيفسّر القيمة المركزية من وجهة نظر معينة .

2 – حساب الوسيط لبيانات مجمعة : مطلوب

إذا جمّعت البيانات في فئات نقطية كما يمكن أن ترد الأجور المعطاة في المثال (12) على شكل جدول كالتالي :

جدول رقم – 16 –

البيانات المجمّعة للأجور

الأجر	التكرار f_i
200	5
300	2
350	1
840	1
950	1

المصدر : بيانات الجدول (12)

فيمكننا في هذه الحالة العودة إلى طريقة إيجاد الوسيط المتبعة في حالة القيم المفردة .

أما في حالة التوزيع التكراري في فئات غير نقطية فلحساب قيمة الوسيط يجب أن تتحقق القاعدة : "إن نسبة بعد الوسيط ضمن فئة الوسيط عن حديها الأدنى والأعلى يجب أن تساوي إلى نسبة بعد ترتيب الوسيط عن التكرارات التجميعية السابقة واللاحقة له" . وهذا يمكن أن يعرض بمفهوم النسب على الشكل :

$$\frac{Me-L}{r}=\frac{\frac{n}{2}-f_{i-1}\uparrow}{f_i}$$

ومنه :

$$\boxed{Me=L+\frac{\frac{n}{2}-f_{i-1}\uparrow}{f_i}r}$$

هام

وهو القانون المستخدم في حساب قيمة الوسيط لتوزيع تكراري ، حيث :

L : الحد الأدنى لفئة الوسيط .

$\frac{n}{2}$: ترتيب الوسط (المقصود به قسمة التكرارات إلى قسمين متساويين) .

f_i : تكرار فئة الوسيط .

r : مدى الفئة . (الحد الأعلى للفئة - الحد الأدنى للفئة)

$f_{i-1}\uparrow$: مجموع التكرارات السابقة لفئة الوسيط .

ملاحظة : المقصود بفئة الوسيط الفئة التي تحتوي على قيمة الوسيط .

مثـــال 13 :

قام أحد الأطباء بتسجيل الفترة الزمنية التي خصصها للكشف على كل مريض زار العيادة خلال أحد الأسابيع وشكّل جدولا للتوزيع التكراري فرّغ فيه البيانات على خمس فئات طول كل فئة منها عشر دقائق ، مراعياً أن متغير الزمن متغيرا مستمر، وحصل على الجدول التالي :

جدول رقم - 17 -

التوزيع التكراري للمرضى حسب فئات الزمن

i	الفئات	التكرارات f
1	[0 – 10[	6
2	[10 – 20[	9
3	[20 – 30[	15
4	[30 – 40[	12
5	[40 – 50]	8
Σ		50

المصدر : فرضي .

المطلوب حساب الزمن الوسيط الذي يقضيه المريض في غرفة المعاينة وتفسير الناتج .

الحـــل :

بالعودة إلى القانون الرياضي لحساب الوسيط :

$$Me = L + \frac{\frac{n}{2} - f_{i-1}\uparrow}{f_i} r$$

ومن أجل تطبيقه علينا هنا معرفة القيم اللازمة لتعويضها في القانون للحصول على الوسيط ، ولمعرفة L قيمة الحد الأدنى لفئة الوسيط و f_i تكرار فئة الوسيط وكذلك

جدول رقم - 18 -

الجدول المساعد لحساب الوسيط

i	الفئات	التكرارات f	$f_i \uparrow$
1	[0 – 10[	6	6
2	[10 – 20[	9	15
3	[20 – 30[	15	30
4	[30 – 40[	12	42
5	[40 – 50]	8	50
Σ		50	

المصدر بيانات الجدول (17)

$f_{i-1}\uparrow$ التكرار التجميعي الصاعد السابق لفئة الوسيط لا بد من تحديد أي فئة من الفئات الخمس هي فئة الوسيط ، أي الفئة التي تضم قيمة الوسيط . ولتحديد فئة الوسيط نحسب في بادئ الأمر التكرار التجميعي الصاعد والذي يظهر في الجدول المساعد لحساب الوسيط رقم (18) .

نقوم الآن بما يلي :

- نبدأ أولاً بحساب ترتيب الوسيط فنجد : $\frac{n}{2}=\frac{\sum f_i}{2}=\frac{50}{2}=25$

- نبحث الآن عن المقدار 25 وهو ترتيب الوسيط لمعرفة أين يدخل أول مرة في التكرارات التجميعية الصاعدة بدءاً من الفئة الأولى ، فنجد أنه لا يدخل في الفئة الأولى لأن تكرارها التجميعي الصاعد 6 أصغر منه ، وكذلك الترتيب 25 لا يدخل في التكرار التجميعي الصاعد للفئة الثانية للسبب نفسه حيث أن 15 أصغر منه ، بينما نجد أنه يدخل في التكرار التجميعي للفئة الثالثة ذلك أن 30 أكبر من 25 ترتيب الوسيط، فنتوقف ونسمي الفئة الثالثة فئة الوسيط ، أي أننا نتوقف عن البحث عندما نجد $\frac{n}{2}\leq f_i\uparrow$ ونسمي الفئة i فئة الوسط .

- ولمّا كانت الفئة الثالثة في مثالنا هي فئة الوسيط وباعتماد بيانات الجدول المساعد، تكون قيمة حدها الأدنى $L=20$ ويكون تكرارها $f_3=15$ والتكرار التجميعي الصاعد السابق لفئة الوسيط $f_{3-1}\uparrow=f_2\uparrow=15$ كما أن طول الفئة $r=10$.

- نقوم الآن بتعويض هذه القيم في قانون الوسيط ونجد :

$$Me=L+\frac{\frac{n}{2}-f_{i-1}\uparrow}{f_i}\times r=20+\frac{\frac{50}{2}-15}{15}\times 10=26.67$$

5 – الانحراف المعياري والتباين :

للانحراف المعياري (Standard Deviation) أهمية كبيرة جداً في علم الإحصاء وذلك لاستخدامه الواسع في مجال التحليل الإحصائي وقابلية استخدامه الرياضي . لذلك نستعرضه هنا بتفصيل مناسب . يعرّف الانحراف المعياري (SD) بشكل مختلف قليلاً في حالة العينة عن حالة المجتمع الإحصائي ، فيكون في :

- حالة القيم المفردة للمجتمع الإحصائي : $$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}}$$
- حالة القيم المفردة للعينة : $$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$
- حالة التوزيع التكراري للمجتمع : $$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2 f_i}{\sum f_i}}$$
- حالة التوزيع التكراري للعينة : $$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i - 1}}$$

وتصاغ هذا القوانين بشكل مختلف يتم الحصول عليها بمعالجة الصيغ السابقة رياضيا بحيث يصبح التطبيق اليدوي أسرع وأسهل على الطالب :

❖ حالة القيم المفردة للمجتمع : $$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \mu^2}$$

مثـــال 3 :

لتكن لديك فترة خدمة بالشهر لعينة من مدّخرات السيارات التي ينتجها مصنع:

40 ، 40 ، 41 ، 39 ، 37 ، 43 ، 45 ، 35

يرغب المصنع بمعرفة الوسط الحسابي لفترة خدمة المدخرات المنتجة ومدى تشتت فترة الخدمة حول الوسط الحسابي .

المطلوب :

حساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري بالطريقتين التعريفية والتطبيقية .

الحـــل :

المثال يتناول المعالجة الإحصائية لقيم مفردة ، إذن فالقوانين المناسبة لحساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري هي :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

كما يمكن حساب الانحراف المعياري باستخدام الصيغة التالية :

$$S = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / n}{n-1}}$$

نشكل جدولاً مساعداً لإجراء الحسابات .

جدول رقم - 2 - .

الجدول المساعد لإجراء الحسابات

المشاهدة i	العمر x_i	$(x_i-\bar{x})^2$	x_i^2
1	40	0	1600
2	40	0	1600
3	41	1	1681
4	39	1	1521
5	37	9	1369
6	43	9	1849
7	45	25	2025
8	35	25	1225
$\sum$	320	70	12870

- الوسط الحسابي :

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{320}{8}=40$$

- الانحراف المعياري للعينة بالطريقة التعريفية :

$$S=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{70}{7}}=3.16228$$

- الانحراف المعياري للعينة بالطريقة التطبيقية :

$$S=\sqrt{\frac{\sum x_i^2-(\sum x_i)^2/n}{n-1}}=\sqrt{\frac{12870-(320)^2/8}{7}}=3.16228$$

د. محمد عامر

الاحتمالات

1.1.1 مفاهيم اساسية في الاحتمالات :

❖ الاختبار: هو تجربة يمكن إجراؤها أو استعراض لظاهرة طبيعية أو اجتماعية نعلم مسبقا مجموعة نتائجها الممكنة، لكننا لا نعلم النتيجة التي سنحصل عليها عند إجراء التجربة .

❖ فضاء العينة : هو مجموعة النتائج الممكنة للاختبار نرمز لها بالرمز Ω ويحددها الغرض من الاختبار ففي تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة فإن فضاء العينة هو $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

❖ الحدث : هو أي مجموعة جزئية من فضاء العينة Ω ونرمز للأحداث بأحرف كبيرة .... A,B,C . ونرمز بالرمز $p(\Omega)$ إلى مجموعة جميع الأحداث أي جميع أجزاء Ω ونسميه فضاء الأحداث ، مثلا الحدث A هو ظهور عدد زوجي على الوجه العلوي $A=\{2,4,6\}$

❖ الحدث الأكيد : هو فضاء العينة Ω

❖ الحدث المستحيل : (∅) هو الحدث الذي لا يحتوي على أي عنصر.

❖ الحدث البسيط : هو حدث وحيد العنصر، مثلا : الحدث B هو ظهور عدد زوجي وأولي أي : $B = \{2\}$.

❖ الحدثان المتنافيان : هما حدثان يقتضي وقوع أحدهما عدم وقوع الآخر (يستحيل تحققهما في آن معا) مثلا

A : ظهور العدد (1) و B : ظهور عدد زوجي ⇔ $A \cap B = \emptyset$

❖ الحدثان المتتامان (المتضادان): هما حدثان وقوع احدهما يكافئ عدم وقوع الآخر (أي هما حدثان متعاكسان) مثلا ظهور اللون الأحمر وعدم ظهور اللون الأحمر . ونرمز للحدث المعاكس بالرمز A'.

A : ظهور عدد زوجي {2,4,6} و B : ظهور عدد فردي {1,3,5} ⇔ $A \cap B = \emptyset$

$A \cup B = \Omega$

❖ دالة الاحتمال : كل دالة منطلقها فضاء الأحداث $\mathcal{P}(\Omega)$ وتأخذ قيمها في المجال {0,1} وتحقق الشرطين:

١- $\mathcal{P}(\Omega)=1$

٢- إذا كان $(B \cap A = \emptyset)$ كان $P(B \cup A) = P(B) + P(A)$ وعندئذ نسمي الثلاثية :

$(\Omega، \mathcal{P}(\Omega)، P)$ فضاء احتماليا منتهيا .

❖ في الفضاء الاحتمالي : تتحقق الخواص الآتية أيا كان الحدثين A , B :

١- $P(\emptyset) = 0$

٢- $p(A') = 1 - P(A)$

٣- $p(\Omega) = 1$

1.1.2 العمليات على الأحداث :

لتكن Ω فضاء العينة المرتبطة بتجربة ما ، وليكن $\mathcal{P}(\Omega)$ فضاء الأحداث، نعرف العمليات على الأحداث كما يلي :

- اجتماع حدثين : هو الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا وقع احد الحدثين أو كلاهما رمزه ($\cup$) .
- تقاطع حدثيــن : هو الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا وقع الحدثان في آن معاً ورمزه ($\cap$) .
- فرق حدثيـــن : هو الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا وقع الحدث الأول ولم يقع الحدث الثاني ورمزه ($\setminus$).

المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي :

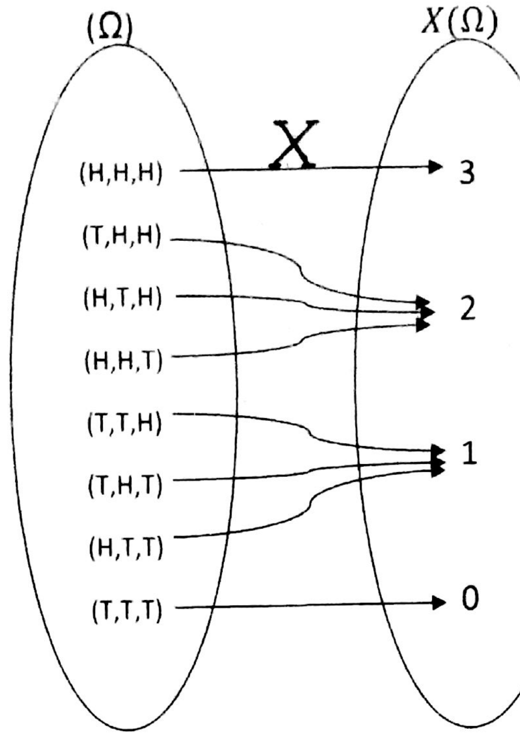
2.1.1 المتغير العشوائي :

تزودنا التجربة الإحصائية بمجموعة بيانات (كيفية أو كمية) فمثلا عند رمي قطعة نقود معدنية ثلاث مرات متتالية نحصل على البيانات (فضاء العينة) الآتية :

$$\Omega=\{(H,H,H),(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T),(T,H,T),(T,T,H),(H,T,T),(T,T,T)\}$$

يساعد رد هذه البيانات الكيفية إلى بيانات كمية (عددية) في تسهيل الدراسة واستقراء النتائج ، فمثلا إذا قابلنا كل عنصر من المجموعة Ω بعدد مرات ظهور الصورة (H) في كل تجربة فإننا نحصل على مجموعة القيم التالية : $\{0,1,2,3\}$ ونكون بذلك قد عرفنا على فضاء العينة Ω دالة عددية X ، تقرن بكل تجربة نلقي فيها قطعة نقود ثلاث مرات متتالية عدد مرات ظهور الصورة (H) .

- تأخذ X القيمة 3 فقط عند وقوع الحدث البسيط $A = \{(H,H,H)\}$ نرمز إلى هذا الحدث بالرمز $\{X = 3\}$.
- تأخذ X القيمة 2 فقط عند وقوع الحدث $A=\{(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T)\}$ نرمز إلى هذا الحدث بالرمز $\{X = 2\}$.
- تاخذ X القيمة 1 فقط عند وقوع الحدث $A=\{(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T)\}$ نرمز إلى هذا الحدث بالرمز $\{X = 1\}$.
- تأخذ X القيمة 0 فقط عند وقوع الحدث $A=\{(T,T,T)\}$ نرمز إلى هذا الحدث بالرمز $\{X = 0\}$.



نسمي الدالة X متغيراً عشوائياً ونسمي المجموعة $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$ مجموعة قيم المتغير العشوائي X .

ومنه التعريف الآتي :

تعريف : ليكن $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ فضاء احتمالياً منتهياً . نعرف المتغير العشوائي بأنه دالة منطلقها فضاء العينة Ω ، ومستقرها مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، وإذا رمزنا إلى هذه الدالة بالرمز X ، رمزنا إلى مجموعة القيم التي تأخذها بالرمز $X(\Omega)$ ، وأسميناها مجموعة قيم المتغير العشوائي X وإذا كانت r إحدى القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X ، أي $r \in X(\Omega)$ ، عرّفنا الحدث $\{X = r\}$ بأنه مجموعة الأحداث البسيطة التي يأخذ عندها المتغير العشوائي X القيمة r .

مثال :

في تجربة رمي حجري نرد مرة واحدة . ليكن X المتغير العشوائي الذي يدل على مجموع نقط الوجهين الظاهرين .

١- اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X

٢- ما الحدث $\{X = 3\}$ ؟ وما احتمال وقوع هذا الحدث ؟

٣- ما الحدث $\{X = 7\}$ ؟ وما احتمال وقوع هذا الحدث ؟

الحل :

١- $X(\Omega) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

٢- يأخذ المتغير العشوائي X القيمة 3 عندما يظهر وجهان مجموع نقاطهما يساوي 3 أي :

$\{X = 3\} = \{(1,2),(2,1)\}$

واحتمال وقوع هذا الحدث يساوي $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

٣-يأخذ المتغير العشوائي X القيمة 7 عندما يساوي مجموع نقاط الوجهين الظاهرين العدد 7 أي :

$\{X = 7\} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ واحتمال وقوع هذا الحدث يساوي $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

2.1.2 القانون الاحتمالي لمتغير العشوائي :

لنرجع إلى تجربة رمي قطعة نقود معدنية عادلة ثلاث مرات متتالية . وليكن X المتغير العشوائي الذي يعطي عدد المرات التي تظهر فيها الصورة H في كل تجربة . لقد رأينا أنّ $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ وأنّ الأحداث $\{X = r\}$ حيث $r \in \{0,1,2,3\}$ هي أحداث مميزة فلننظم جدولا باحتمالاتها :

r	0	1	2	3
$p(X = r)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

لاحظ أننا رمزنا $P(X = r)$ بدلا من الرمز الصحيح $P(\{X = r\})$ ، وذلك بهدف تبسيط الكتابة .
في هذا الجدول نقرن بكل قيمة r من $X(\Omega)$ عددا $P(X = r)$ يساوي احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X القيمة r . اذن نعرف على المجموعة $X(\Omega)$ دالة عددية : $r \mapsto P(X = r)$ نسمي هذه الدالة القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي . وبوجه عام لدينا التعريف الآتي :

تعريف : ليكن $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ فضاء احتماليا منتهيا . وليكن X متغيرا عشوائيا على Ω مجموعة قيمه $X(\Omega) = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ نسمي الدالة :

$$f_x : X(\Omega) \to \mathbb{R} : r \mapsto f_x(r) = P(X = r)$$

القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

وفي الحالة التي يكون فيها عدد عناصر المجموعة $X(\Omega)$ صغيرا فاننا نمثل f_X في جدول يحوي سطره الاول عناصر $X(\Omega)$ أي $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ونضع في السطر الثاني تحت كل عنصر r_k قيمة $f_X\ (r_k)$ أي احتمال ان يأخذ المتغير العشوائي X القيمة r_k . كما فعلنا في المثال السابق :

r_r	....	r_2	r_1	r_i
$f_X\ (r_r)$	....	$f_X\ (r_2)$	$f_X\ (r_1)$	$f_X\ (r_i)$

2.1.3 التوقع الرياضي (أو الأمل الرياضي) للمتغير العشوائي :.

ليكن (Ω، $\mathcal{P}(\Omega)$، P) فضاء احتماليا منتهيا . وليكن X متغيرا عشوائيا على Ω مجموعة قيمه $X(\Omega) = \{ r_1, r_2, \ldots\ldots\ldots, r_n \}$ وقانونه الاحتمالي f_X عندئذ نسمي العدد :

$$\sum_{k=1}^{n} r_k\ .\ p(X = r_k) = r_1 \cdot f_x\ (r_1) + r_2 \cdot f_x\ (r_2) + \quad \ldots\ldots\ldots + r_n \cdot f_x\ (r_n)$$

التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X ونرمز إليه بالرمز $E(X)$. أي :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n=i} r_k \quad \cdot f_x\ (r_k)$$

مثال :

يحوي صندوق 5 كرات متماثلة ثلاث منها بيضاء اللون واثنتان سوداوان . نسحب من الصندوق عشوائيا ثلاث كرات معا . وليكن X المتغير العشوائي الذي يدل على عدد الكرات السوداء المسحوبة . اكتب مجموعة قيم المتغير العشوائي X وجدول قانونه الاحتمالي ثم احسب توقعه الرياضي .

الحل :

$$X(\Omega) = \{0,1,2\}$$

الحدث : $\{X = 0\}$ **هو** حدث سحب ثلاث كرات بيضاء . إذن :

$$f(0) = \frac{C(3,3)}{C(5,3)} = \frac{1}{10}$$

الحدث : $\{X = 1\}$ **هو** حدث سحب كرتين بيضاوين وكرة سوداء . إذن :

$$f(1) = \frac{C(3.2).C(2,1)}{C(5,3)} = \frac{6}{10}$$

الحدث : $\{X = 2\}$ هو حدث سحب كرة بيضاء وكرتين سوداوين . إذن : $f(2) = \frac{C(3,1).C(2,2)}{C(5,3)} = \frac{3}{10}$

ومنه جدول القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

r_k	0	1	2
$f(r_k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

اما التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X فيحسب كما يلي :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n=i} r_k \ .f_x\ (r_k) = 0 + \frac{6}{10} + \frac{6}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

مثال :

يطلق رام طلقتين على هدف . احتمال إصابته للهدف بالطلقة الأولى $\frac{6}{10}$ ، واحتمال إصابته للهدف بالطلقة الثانية $\frac{8}{10}$. يربح الرامي 5 نقط إذا أصاب الهدف بالطلقة الأولى ويربح 3 نقط إذا أصاب الهدف بالطلقة الثانية . يخسر الرامي 4 نقط إذا لم يصب الهدف بالطلقة الأولى ويخسر 5 نقط إذا لم يصب الهدف بالطلقة الثانية . ليكن X المتغير العشوائي الذي يدل على عدد النقط التي ينالها الرامي في نهاية المباراة ، اكتب قيم المتغير العشوائي X ، واكتب جدول قانونه الاحتمالي ، ثم احسب توقعه الرياضي .

الحل :

اذا أصاب الرامي في الرميتين نال : 5+3=8 نقاط .

وإذا لم يصب في الرمية الأولي ، وأصاب في الرمية الثانية نال : 1- = 4+3 - نقطة .

وإذا أصاب في الرمية الأولي ، ولم يصب في الرمية الثانية نال : 0 = 5 – 5 نقطة .

وأخيرا إذا لم يصب الرامي بالطلقتين نال : 9 - = 5 – 4 - نقاط .

إذن مجموعة قيم المتحول العشوائي هي : $X(\Omega) = \{-9, -1, 0, 8\}$.

لنعرف الحدثين A وB كما يأتي :

A : اصابة الهدف بالرمية الأولى .

B : اصابة الهدف بالرمية الثانية .

الحدثان A و B مستقلان احتمالياً ولدينا :

$$f(-9) = P(X = -9) = P(A' \cap B')$$

$$= P(A').P(B') = \frac{4}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{8}{100}$$

$$f(-1) = P(X = -1) = P(A' \cap B)$$

$$= P(A').P(B) = \frac{4}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{32}{100}$$

$$f(0) = P(X = 0) = P(A \cap B')$$

$$= P(A).P(B') = \frac{6}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{12}{100}$$

$$f(8) = P(X = 8) = P(A \cap B)$$

$$= P(A).P(B) = \frac{6}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{48}{100}$$

وبذلك نحصل على جدول القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

r_k	-9	-1	0	8
$f(r_k)$	$\frac{8}{100}$	$\frac{32}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{48}{100}$

أما التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X فيحسب كما يلي :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n=i} r_k \cdot f_x(r_k)$$

$$= \frac{-72}{100} + \frac{-32}{100} + 0 + \frac{384}{100} = \frac{280}{100} = 2,8$$