حل جمل المعادلات الخطية

لابد لنا من أن نقدم كيف لنا حل المعادلات الخطية وحلها.

تعريف المعادلة الخطية: هي المعادلة التي تحوي مجهولاً واحداً أو أكثر (لا يزيد) ولا يزيد عدد درجة المجهول (أو المجاهيل) على الواحد فقط.

أمثلة: (1) المعادلة $2x=5$ هي خطية (لأن درجة المجهول الأول) مجهول واحد هو x (أو متغير)

(2) المعادلة $3x-2y=7$ هي خطية مجهولين هما x, y (أو متغيرين)

(3) $6x+5y-3z=0$ هي خطية ثلاثة مجاهيل هما x, y, z (أو متغيرات)

(4) بينما المعادلة: $2x+y\cdot z=0$ هي ليست خطية ثلاثة مجاهيل (أو متغيرات)

حل المعادلة الخطية: يعني إيجاد قيم المجاهيل (أو المتغيرات) التي تحقق المعادلة

*) إذا قلنا أبسط المعادلة الخطية هي: $ax=b$ (أو $ax-b=0$)

حل خطية بمجهول واحد هو: $x=\frac{b}{a}$ $(a\neq 0)$ وهو وحيد

مثال: حل المعادلة الآتية:

$$6x-3=0 \Rightarrow 6x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

وهي قيمة المجهول التي تحقق المعادلة المعطاة

*) والمعادلة مجهولين: $ax+by=c$; $a,b\neq 0$ (أو $ax+by-c=0$)

حل المعادلة تعني عدة مجاهيل، أي حل المعادلة يعني إيجاد قيم

لأحد المجهولين بدلالة المجهول الآخر

نتيجة: كل معادلة خطية بأكثر من مجهول لها عدد لا نهائي من الحلول.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(2) حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

تمرين 1 ① أوجد مجموعة حلول المعادلة: $2x-3y-5=0$ ثم أكتب ثلاث حلول.

الحل: لهذه المعادلة عدد لا نهائي من الحلول لأنها معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين.

لإيجاد مجموعة الحلول:

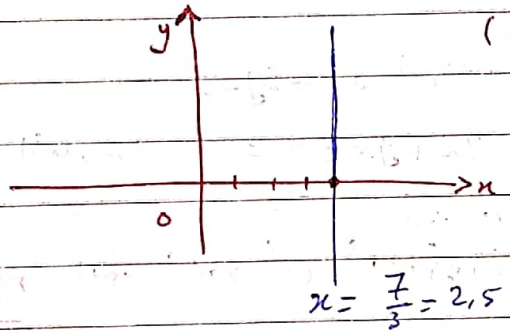
$$y=\frac{2x-5}{3}$$

ومنه مجموعة الحلول هي:

$$S=\left\{\left(x, \frac{2x-5}{3}\right) ; x\in\mathbb{R}\right\}$$

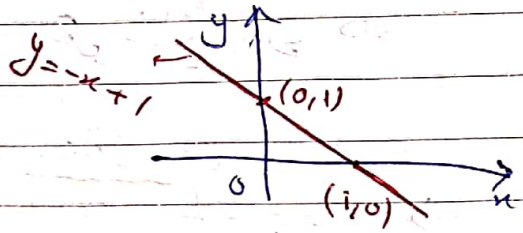
ثلاث حلول: $x=1$ نجد $y=\frac{2(1)-5}{3}=-1$ وهكذا...

لتمثيل المجموعة السابقة للمعادلة: نمثل المستقيم الذي معادلته $x=\frac{7}{3}$ أي $3x=7$ (موازي لمحور التراتيب) (أنظر الشكل الأول)



② نمثل المعادلة $x+y=1$ أي $y=-x+1$

نمثل مستقيم يقطع محوري الإحداثيات.



* **ما هي الحلول المشتركة لجملة معادلتين؟**

هي مجموعة الثنائيات التي تحقق كل المعادلات في الجملة.

* **كيف نحل جملة معادلتين؟** نقول عن جملة معادلتين أنها متكافئة إذا كانت كل حلول إحدى المعادلتين هي حلول المعادلة الأخرى.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حلقة بحث

* نظام المعادلات الخطية: لتكن المعادلات الخطية التي عددها m وذات المجاهيل

$x_1, x_2, \dots, x_n$

والتي تأخذ الشكل:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \quad \dots \quad (*)$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

حيث $a_{ij} \in \mathbb{R}, \ b_i \in \mathbb{R}$ $\quad (1 \le i \le m, \ 1 \le j \le n)$

نسمي أي حل للمعادلات $(*)$ في $\mathbb{R}$ أي مجموعة من الأعداد الحقيقية n تحقق $(*)$.

ملاحظة: هناك ثلاث إمكانيات: 1) تقبل الجملة $(*)$ حلا وحيدا
2) تقبل حلولا لا نهائية
3) لا تقبل أي حل.

نشرح الجملة:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

في معادلات خطية مجهولين x, y.

الآن إلى المثال الأول:

مثال: أكتب الشكل الصفوفي لجملة المعادلات الخطية الآتية:

$$x + 2y + 3z = 1$$
$$2x + y + 3z = 2 \quad \dots (1)$$
$$3x + y + z = 1$$

ثم حلها بطريقة جاوس.

الحل: كتابة الجملة (1) بالشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حلقة بحث

أي المعادلات على الشكل:

$$A \cdot X = B$$

حيث A: مصفوفة الأمثال للجهول (1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

X: مصفوفة المجاهيل لـ (1) (أو المجهول)

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

B: مصفوفة الحد الثابت لـ (1) (أو الثوابت)

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

* طرائق حل جملة المعادلات الخطية: سنقوم في هذه الدراسة بعرض جملة المعادلات الخطية بطريقتين هما:

أ) الطريقة المصفوفية (اعتماداً على مقلوب مصفوفة)

ب) طريقة كرامر (اعتماداً على المحددات)

ونبدأ بها على التوالي:

عدد المعادلات = عدد المجاهيل
وعندما يكون لجملة المعادلات حل وحيد

ونشرح طريقة حل هذه الأنظمة من خلال مثال محلول.

أ) الطريقة المصفوفية:

مثال (1) (الطريقة المصفوفية): حل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$2x + y = 5 \quad \dots (1)$$

$$x - y = -2 \quad \dots (2)$$

باستخدام الطريقة المصفوفية.

الحل: عند استخدام هذه الطريقة نتبع ما يلي:

* نكتب المعادلات بالشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{أي بالشكل} \quad A \cdot X = B$$

* إذا كان $\det A \neq 0$ (حيث محدد مصفوفة الأمثال) عندئذ يكون للجملة حل وحيد وهو:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$$

وللجملة حل وحيد

$$X = A^{-1} \cdot B$$

حيث A مصفوفة الأمثال للجهول، X مصفوفة المجاهيل، B مصفوفة الحد الثابت (أو الثوابت)

(البقاء والخير)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حلقة بحث

* لإيجاد الحل (أي قيم المجاهيل x, y) نوجد مقلوب المصفوفة A ونكتب بالصورة:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-3}\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{Adj\,A}$$

Adj A: المصفوفة المرافقة

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(ملاحظة: نوجد المصفوفة $Adj\,A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ المصفوفة المرافقة لـ A)

لدينا: $AX = B$ ومنه $X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5-2 \\ 5+4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$x = 1,\ y = 3$$

وهذا هو الحل الوحيد لهذه الجملة.

نلاحظ أنه سنواجه الحل بالشكل التالي إما وحيد أو لا نهائي.

ج) طريقة كرامر:

مثال (2 طريقة كرامر): أوجد بطريقة كرامر الحل الوحيد لجملة المعادلتين.

$$x + 2y = 3 \quad ...(1)$$
$$2x + y = 3 \quad ...(2)$$

الحل: للبحث عن الحل الوحيد نتبع ما يلي.

1) نحسب محدد المثال:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

وهذا يعني أن الجملة لها حل وحيد.

2) نحسب المحدد المرتبط بـ x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حلقة بحث

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3$$

ثم نحسب المحدد المتبقي لـ y،

ثم نجد x، y

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1$$

إذاً فالحل المرضي هو،

$$(x,y) = (1,1) \quad \text{or} \quad x=1, y=1$$

مثال إضافي: أوجد الحل المرضي لجملة المعادلتين،

$$x + 2y = -2 \quad ,\ldots(1)$$
$$2x + 4y = -4 \quad ,\ldots(2)$$

وذلك بالطريقة السابقة

x) لتكن لدينا المعادلة الخطية التالية، ذات المتغيرات الثلاثة،

$$ax + by + cz = 0$$

هل هذه المعادلة متجانسة، وما درجة تجانسها؟

$$ax + by = 0 \quad ,\ldots(1)$$
$$cx + dy = 0 \quad ,\ldots(2)$$

الحل البديهي لهذه المعادلة

-) كل معادلة خطية متجانسة لها دائماً حل بديهي هو الصفر

كل جملة معادلات خطية متجانسة تقبل الحل البديهي

إذا كان عدد المعادلات = عدد المجاهيل وكان محدد المصفوفة المرافقة $\Delta \neq 0$ فإن الحل البديهي وحيداً.

إذا كان محدد المصفوفة المرافقة $\Delta = 0$ فإن جملة المعادلات تقبل عدداً لا نهائياً من الحلول

مثال: عين مجموعة الحلول لجملة المعادلات الخطية التالية

$$\begin{cases} 2x + \frac{3}{4}y = 0 \quad ,\ldots(1) \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}y = 0 \quad ,\ldots(2) \end{cases}$$

الحل: المجموعة تكتب بالشكل

$$\begin{cases} 8x + 3y = 0 \\ 10x - 3y = 0 \end{cases}$$

نحسب محدد المصفوفة المرافقة للجملة،

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 10 & -3 \end{vmatrix} = -24 - 30 = -54 \neq 0$$

فإن الحل وحيد.

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ