أ) المصفوفات

تعريف المصفوفة:

المصفوفة هي كائن رياضي يتألف من عناصر مرتّبة ضمن جدول مستطيل ذي m سطر و n عمود، وتكتب بالشكل:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

☆ تسمى المقادير a_{ij} عناصر المصفوفة A، حيث:

$(i=1,2,\dots,m)$
$(j=1,2,\dots,n)$

☆ المقدار a_{ij} يقع في السطر i والعمود j.

حيث:

الدليل الأيسر (i) يدل على رقم السطر.

الدليل الأيمن (j) يدل على رقم العمود.

☆ مثلاً:

a_{23} يقع في السطر الثاني والعمود الثالث.

a_{32} يقع في السطر الثالث والعمود الثاني.

☆ نرمز للمصفوفة السابقة بالرمز $A=(a_{ij})$ أو بالرمز $A_{m\times n}=(a_{ij})$

ونقول إن المصفوفة السابقة من المرتبة $m\times n$.

المصفوفة المربعة:

هي مصفوفة يكون فيها:

عدد الأسطر = عدد الأعمدة

أي أنّ: $m=n$

حيث:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_n$$

☆ نرمز للمصفوفة السابقة بالرمز $A_n=(a_{ij})$ ونقول أنها مصفوفة مربعة من المرتبة n.

☆ تُسمى العناصر:

$a_{11},a_{22},a_{33},\dots,a_{nn}$

القطر الرئيسي للمصفوفة أو قطر المصفوفة.

ملاحظة:

إذا كان $m\neq n$ نسمي المصفوفة: مصفوفة مستطيلة.

ونُسمي m بعدها الشاقولي ونسمي n بعدها الأفقي.

مثال إضافي:

1) المصفوفة: $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة مربعة من المرتبة الثانية، أي من النمط 2×2 (أ ر 2)

2) المصفوفة: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة مربعة من المرتبة الثالثة، أي من النمط 3×3 (أ ر 3)

3) المصفوفة: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة مستطيلة من المرتبة 2×3.

الواسع في الرياضيات - (الجبر) - المدرّس: محمد أحمد (جطّور)

4) المصفوفة: $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$ هي مصفوفة مستطيلة من المرتبة 2×4 .

أنواع المصفوفات:

1) **المصفوفة السطرية (وحيدة السطر):**
هي مصفوفة مستطيلة ذات المرتبة $(1\times n)$ أي أن هذه المصفوفة تحوي سطراً واحداً و n عمود .
وتكتب بالشكل:

$$A=[a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \;\; .... \;\; a_n]$$

مثال: المصفوفة $A=[2 \;\; 1 \;\; 5]$ هي مصفوفة سطرية من المرتبة 1×3 .

---

2) **المصفوفة العمودية (وحيدة العمود):**
هي مصفوفة مستطيلة ذات المرتبة $(n\times 1)$ أي أن هذه المصفوفة تحوي n سطر و عمود واحد .
وتكتب بالشكل:

$$A=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$$

مثال: المصفوفة $A=\begin{bmatrix}5\\ 7\\ 1\\ 3\end{bmatrix}$ هي مصفوفة عمودية من المرتبة 4×1 .

---

3) **المصفوفة وحيدة العنصر:**
هي مصفوفة A تتألف من سطر واحد و عمود واحد أي: تتألف من عنصر واحد فقط .
وتكتب بالشكل $A=(a_{11})$.

مثال: المصفوفة $A=(5)$ هي مصفوفة وحيدة العنصر أي من المرتبة 1×1 .

---

4) **المصفوفة الصفرية:**
هي مصفوفة تكون جميع عناصرها أصفار .

$$0_{m\times n}=\begin{bmatrix}0 & 0 & ..... & 0\\ 0 & 0 & ..... & 0\\ & & ..... & \\ 0 & 0 & ..... & 0\end{bmatrix}$$

مثال:

$$0_{2\times 3}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$0_{3\times 2}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$0_{2\times 2}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

---

5) **المصفوفة القطرية:**
هي مصفوفة مربعة من المرتبة n عناصرها التي خارج القطر الرئيسي أصفار .
وتكتب بالشكل:

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_n\end{bmatrix}_n$$

أو للسهولة تكتب:

$$\boxed{A=diag(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)}$$

مثال: المصفوفة المربعة:

$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$ هي مصفوفة قطرية

وتكتب بالشكل: $A=diag(2,3,-5)$

الواسع في الرياضيات - (الجبر) - المدرس محمد أحمد (حطور)
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

6) **المصفوفة السلّمية:**
هي مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها الرئيسي تساوي عدداً ثابتاً أمّا باقي عناصرها أصفار. وتكتب بالشكل:

$$A=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}_n$$

مثال: المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_3$ هي مصفوفة سلّمية وتكتب بالشكل:

$$A = diag(2,2,2)$$

ملاحظة:
المصفوفة السلّمية هي حالة خاصة من المصفوفة القطرية.

---

7) المصفوفة الواحدية (I_n):
المصفوفة الواحدية من المرتبة n هي مصفوفة مربعة من المرتبة n بحيث جميع عناصر القطر الرئيسي فيها تساوي (1)، أمّا بقية العناصر فتساوي أصفار.
وتكتب بالشكل:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_n$$

مثال: المصفوفة الواحدية من المرتبة الثانية هي:

$$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_2$$

مثال: المصفوفة الواحدية من المرتبة الثالثة هي:

$$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:
المصفوفة الواحدية هي حالة خاصة من المصفوفة السلّمية وهي حالة خاصة أيضاً من المصفوفة القطرية.

---

8) المصفوفة المثلثية:
هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي (أو تحته) أصفار.
مثال: المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة مثلثية (عليا) من المرتبة الرابعة.
مثال: المصفوفة:

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة مثلثية (دنيا) من المرتبة الثالثة.

---

9) المصفوفة المتناظرة:
هي مصفوفة مربعة $A=(a_{ij})$ تحقّق الشرط: $\boxed{a_{ij}=a_{ji}}$ وذلك أيا كان:

$$i,j \in \{1,2,\dots,n\}$$

أي أن:
$a_{12}=a_{21}$
$a_{25}=a_{52}$
وهكذا.

الواسع في الرياضيات - (الجبر) - المدرّس: محمد أحمد (جنّود)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال:

المصفوفة: $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 3 & 2 & 7\\ -1 & 7 & -1\end{bmatrix}$

هي مصفوفة متناظرة، لأنّ:

$a_{12}=a_{21}=3$

$a_{13}=a_{31}=-1$

$a_{23}=a_{32}=7$

تساوي مصفوفتين:

تتساوى مصفوفتان لهما نفس المرتبة، إذا تساوى كل عنصر من إحداهما مع العنصر المقابل له في المصفوفة الأخرى.

أي أنّ:

$$\begin{bmatrix}a_1 & c_1\\ b_1 & d_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2 & c_2\\ b_2 & d_2\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\boxed{a_1=a_2, b_1=b_2, c_1=c_2, d_1=d_2}$$

مثال:

لتكن المصفوفتان:

$$A=\begin{bmatrix}x+y & y-x\\ 2x & 2x+y\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

أوجد x,y مع العلم أنّ $A=B$.

الحل:

ما أن $A=B$ فرضاً فإن العناصر المتقابلة في المصفوفتين تكون متساوية.

منه:

$$\begin{cases}x+y=3 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\ y-x=1 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)\\ 2x=2 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)\\ 2x+y=4 \ldots\ldots\ldots\ldots(4)\end{cases}$$

من (3) نجد: $\boxed{x=1}$

نعوّض في (4) فنجد: $\boxed{y=2}$

فالجملة $\{(3),(4)\}$ لها حل وحيد هو:

$(x,y)=(1,2)$

☆ نعوّض الحل في (1)، فنجد:

$3=2+1$ محققة.

☆ نعوّض الحل في (2)، فنجد:

$1=1-2$ محققة.

☆ ومنه: $(x,y)=(1,2)$ حل مشترك وحيد لمجموعة المعادلات الأربعة.

العمليات على المصفوفات

أولاً جمع المصفوفات:

مجموع مصفوفتين $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ لهما نفس المرتبة هو مصفوفة $C=(c_{ij})$ لها نفس المرتبة، وعناصرها:

$$\boxed{c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}}$$

والجمع لا يكون معرفاً إذا اختلفت مرتبتا المصفوفتين.

خواص عملية جمع المصفوفات:

1) جمع المصفوفات عملية تبديلية.
أي أنّ: $\boxed{A+B=B+A}$

2) جمع المصفوفات عملية تجميعية.
أي أنّ:

$$\boxed{(A+B)+C=A+(B+C)}$$

3) المصفوفة الصفرية التي لها نفس المرتبة هي عنصر حيادي بالنسبة لجمع المصفوفات. أي أنّ:

الواسع في الرياضيات - الجبر - المدرّس: محمد أحمد (جلّور)
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$0_{m\times n}+A_{m\times n}=A_{m\times n}+0_{m\times n}=A_{m\times n}$$

4) لكل مصفوفة $A=(a_{ij})$ نظير بالنسبة لعملية جمع المصفوفات وهي $-A=(-a_{ij})$. حيث:

$$A_{m\times n}+(-A_{m\times n})=(-A_{m\times n})+A_{m\times n}=0_{m\times n}$$

ثانياً الضرب بعدد حقيقي:

ضرب عدد حقيقي بمصفوفة نضرب العدد بجميع عناصر المصفوفة .

مثال إضافي:

ليكن: $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}$

عندئذٍ: $\lambda.A=\begin{bmatrix}2\lambda & 3\lambda\\ 5\lambda & 7\lambda\end{bmatrix}$

مثال إضافي:

ليكن المصفوفتان:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

أوجد $A+2B$

الحل:

$$2B=\begin{bmatrix}4 & 8 & 10\\ 4 & 10 & 12\end{bmatrix}$$

$$A+2B=\begin{bmatrix}1+4 & 2+8 & 3+10\\ 3+4 & 2+10 & 1+12\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A+2B=\begin{bmatrix}5 & 10 & 13\\ 7 & 12 & 13\end{bmatrix}$$

ثالثاً ضرب المصفوفات:

لتكن المصفوفتين:

$$A=(a_{ij})\ ,\ B=(b_{ij})$$

★ يكون $A.B$ معرفاً إذا تحقق الشرط:

عدد أعمدة المصفوفة الأولى A = عدد أسطر المصفوفة الثانية B

★ إذا كانت A,B مصفوفتان مربعتان من نفس المرتبة فإنّ $A.B$ يكون معرّفاً .

★ إنّ جداء المصفوفة $A_{m\times r}$ بالمصفوفة $B_{r\times n}$ هو المصفوفة $C_{m\times n}$ وعناصرها c_{ij} معرفة بالشكل:

1) العنصر c_{11} هو مجموع حواصل ضرب عناصر السطر الأول من المصفوفة A في مقابلاتها من عناصر العمود الأول من المصفوفة B. أي أنّ:

$$c_{11}=a_{11}.b_{11}+a_{12}.b_{21}+....+a_{1r}.b_{r1}$$

2) العنصر c_{12} هو مجموع حواصل ضرب عناصر السطر الأول من المصفوفة A في عناصر العمود الثاني من المصفوفة B. أي أنّ:

$$c_{12}=a_{11}.b_{12}+a_{12}.b_{22}+....+a_{1r}.b_{r2}$$

3) بشكل عام:

العنصر c_{ij} هو مجموع حواصل ضرب عناصر السطر (i) من المصفوفة A في عناصر العمود (j) من المصفوفة B .

أي أنّ:

$$c_{ij}=a_{i1}.b_{1j}+a_{i2}.b_{2j}+....+a_{ir}.b_{rj}$$

الواسع في الرياضيات - (الجبر) - المدرّس: محمد أحمد (حجّور)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال: أوجد $A.B$ إذا كان:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

الحل:

☆ نفرض $A.B=C=(c_{ij})$

☆ بما أن A من المرتبة 2×3

و B من المرتبة 3×3

فإنّ C من المرتبة 2×3

☆

$$c_{11}=2\times 2-1\times 0+1\times 0=4$$
$$c_{12}=2\times 1-1\times 1+1\times 1=2$$
$$c_{13}=2\times(-1)-1\times 3+1\times 2=-3$$
$$c_{21}=1\times 2+0\times 0-1\times 0=2$$
$$c_{22}=1\times 1+0\times 1-1\times 1=0$$
$$c_{23}=1\times(-1)+0\times 3-1\times 2=-3$$

ومنه:

$$A.B=\begin{bmatrix}4 & 2 & -3\\ 2 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

خواص عملية ضرب المصفوفات:

1) في الحالة العامة: ضرب المصفوفات عملية ليست تبديلية.

أي أنّ: $\boxed{A.B\neq B.A}$

2) قد يكون جداء مصفوفتين مساوياً مصفوفة صفرية دون أن تكون أيّاً منهما صفرية.

3) إن ضرب المصفوفات القطرية من المرتبة نفسها هي عملية تبديلية والناتج مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي هي $a_i.b_i$ حيث $(i=1,2,....,n)$.

أي أنّ:

إذا كانت:

$$A=diag(a_1,a_2,...,a_n)$$
$$B=diag(b_1,b_2,....,b_n)$$

فإن:

$$A.B=diag(a_1.b_1,a_2.b_2,...,a_n.b_n)$$

4) إن ضرب مصفوفة سطرية في مصفوفة عمودية يكون معرّفاً فقط عندما يكون:

عدد عناصر المصفوفة السطرية مساوياً لعدد عناصر المصفوفة العمودية.

ويكون الجداء مصفوفة وحيدة العنصر

ملاحظة:

في الحالة الخاصة: إذا كان $A.B=B.A$، فإننا نقول أنّ: A,B متبادلتان.

مثال: أوجد $A.B$ مع العلم أنّ:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}_3$$

$$B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_3$$

الحل:

نلاحظ:

$$A=diag(3,-3,5)$$
$$B=diag(-2,3,1)$$

فتكون:

$$A.B=diag(3\times -2,-3\times 3,5\times 1)$$
$$=diag(-6,-9,5)$$

أي أنّ:

$$A.B=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & -9 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}_3$$

الواسع في الرياضيات - (الجبر) - المدرّس: محمد أحمد (جنّور)
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال إضافي:

لتكن: $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\end{bmatrix}_{1\times3}$, $B=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}_{3\times1}$

أوجد A.B , B.A ثم وازن بينهما ماذا تستنتج؟

الحل:

☆ نلاحظ: عدد عناصر المصفوفة السطرية مساوياً عدد عناصر المصفوفة العمودية، وبالتالي A.B يكون معرفاً:

$$A.B=[2\times4+1\times5+3\times6]$$
$$\Rightarrow A.B=[31]_{1}$$

☆
$$B.A=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}_{3\times1}.\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\end{bmatrix}_{1\times3}$$
$$B.A=\begin{bmatrix}4\times2 & 4\times1 & 4\times3\\5\times2 & 5\times1 & 5\times3\\6\times2 & 6\times1 & 6\times3\end{bmatrix}$$
$$B.A=\begin{bmatrix}8 & 4 & 12\\10 & 5 & 15\\12 & 6 & 18\end{bmatrix}_{3}$$

☆ بالموازنة: $A.B\neq B.A$

نستنتج أن: جداء المصفوفات عملية ليست تبدلية بالحالة العامة .

منقول مصفوفة:

منقول المصفوفة A هي مصفوفة A^T تنتج عن A بأن نبدل الأسطر بالأعمدة والأعمدة بالأسطر بالترتيب ذاته .

مثال إضافي:

☆ منقول $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}$ هي: $A^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 5\\2 & 3 & 7\end{bmatrix}$

☆ منقول $B=[1\ \ 2\ \ 3]$ هي: $B^T=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

☆ منقول $C=\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}$ هي: $C^T=[a\ \ b\ \ c\ \ d]$

مثال:

☆ منقول $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\-1 & 0 & 4\\1 & 3 & -1\end{bmatrix}$ هي: $A^T=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\2 & 0 & 3\\-1 & 4 & -1\end{bmatrix}$

☆ منقول $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\-1 & 4\\3 & 1\end{bmatrix}$ هي: $A^T=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\5 & 4 & 1\end{bmatrix}$

نتائج:

1) منقول مصفوفة سطرية هي مصفوفة عمودية .

2) منقول مصفوفة عمودية هي مصفوفة سطرية .

الواسع في الرياضيات - (الجبر) - المدرّس: محمد أحمد (جنّور)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

3) إذا كانت A, B مصفوفتين مربعتين من المرتبة n. عندئذٍ:

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(A.B)^T = B^T.A^T$$

مثال إضافي:

لتكن المصفوفتان:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

تحقّق أنّ:

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$

2) $(A.B)^T = B^T.A^T$

الحل:

1)

★ $A+B = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+0 \\ 1+2 & 4+6 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A+B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (A+B)^T = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$

★ $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$B^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

ومنه:

$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 2+5 & 1+2 \\ 3+0 & 4+6 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^T + B^T = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$

★ بالموازنة نجد:

$(A+B)^T = A^T + B^T$

2)

★ $A.B = \begin{bmatrix} 2\times5+3\times2 & 2\times0+3\times6 \\ 1\times5+4\times2 & 1\times0+4\times6 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A.B = \begin{bmatrix} 16 & 18 \\ 13 & 24 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow (A.B)^T = \begin{bmatrix} 16 & 13 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$

★ نحسب $B^T.A^T$:

$B^T.A^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$B^T.A^T = \begin{bmatrix} 5\times2+2\times3 & 5\times1+2\times4 \\ 0\times2+6\times3 & 0\times1+6\times4 \end{bmatrix}$

$B^T.A^T = \begin{bmatrix} 16 & 13 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$

★ بالموازنة نجد:

$(A.B)^T = B^T.A^T$

محدّد مصفوفة مربعة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n.

إنّ قيمة محدّد المصفوفة A ويُرمز له بالرمز $det(A)$ هو مجموع جداءات كل عنصر من أي سطر (أو عمود) من A بالمحدّد الأصغري المرافق له.

مثال إضافي:

احسب محدّد المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

الواسع في الرياضيات - (الجبر) - المدرّس: محمد أحمد (خطّور)
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$= 1\times\begin{vmatrix}1 & 5\\ 1 & 6\end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 6\end{vmatrix} + 4\times\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$det(A) = 1 - 2\times 8 + 4\times 1$$

$$\Rightarrow \boxed{det(A) = -11}$$

المصفوفة الشاذة أو المنفردة:

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n.

عندئذٍ:

* نقول أن A شاذة أو منفردة إذا كان $det(A) = 0$.
* نقول أن A غير شاذة أو منتظمة إذا كان $det(A) \neq 0$.

مثال إضافي:

لتكن المصفوفة: $A = \begin{bmatrix}\lambda+1 & 1\\ 2 & \lambda\end{bmatrix}$

1) أوجد مجموعة قيم λ كي تكون A مصفوفة منفردة.

2) أوجد مجموعة قيم λ كي تكون A مصفوفة منتظمة.

الحل:

نحسب محدّد المصفوفة:

$$det(A) = \begin{vmatrix}\lambda+1 & 1\\ 2 & \lambda\end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$det(A) = \lambda^2 + \lambda - 2$$

1) تكون A مصفوفة منفردة عندما:

$$det(A) = 0$$

ومنه:

$$(\lambda+2)(\lambda-1) = 0$$

إما: $\lambda = -2$

أو: $\lambda = 1$

أي أنّ: A مصفوفة منفردة عندما $\lambda \in \{1,-2\}$

2) تكون A مصفوفة منتظمة عندما:

$$det(A) \neq 0$$

ومنه:

$$\lambda \neq -2 \quad \boxed{\text{و}} \quad \lambda \neq 1$$

أي أنّ: A مصفوفة منتظمة عندما $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{1,-2\}$.

مثال: لتكن المصفوفتان:

$$A = \begin{bmatrix}3 & 6\\ -2 & -4\end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

أثبت أنّ A منفردة و B منتظمة.

الحل:

* $$det(A) = \begin{vmatrix}3 & 6\\ -2 & -4\end{vmatrix} = -24 + 24 = 0$$

ومنه: A مصفوفة منفردة.

* $$det(B) = \begin{vmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}$$

$$= 2\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} - 3\times\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} + 2\times\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$= 2\times 1 - 3\times(-1) + 2\times(-3)$$

$$\Rightarrow det(B) = -1 \neq 0$$

ومنه: B مصفوفة منتظمة.

المصفوفة المساعدة لمصفوفة مربعة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n، فإنّ:

المصفوفة المساعدة للمصفوفة A ويُرمز لها بالرمز $adj(A)$ هي منقول المصفوفة

الجبر - الواسع في الرياضيات - المدرّس محمد أحمد (حلّوز)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التي عناصرها المحددات الصغرى المرافقة لعناصر المصفوفة A .

مثال:

أوجد المصفوفة المساعدة للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

الحل:

☆ نجد مصفوفة المحددات الصغرى المرافقة لعناصر المصفوفة A ولتكن A_1 :

$$A_1=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & -3\\ -2 & -2 & 5\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

☆ نجد المصفوفة المساعدة للمصفوفة A وهي منقول A_1 :

$$adj(A)=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 1 & -2 & 0\\ -3 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

قضايا أساسية:

1) إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n عندئذٍ يكون:

$$\boxed{A.(adj\,A)=(adj\,A).A=det(A).I_n}$$

2) إذا كانت A مصفوفة مربعة منفردة من المرتبة n ، فإنّ:

$$\boxed{A.(adj\,A)=(adj\,A).A=0.I_n=0_{n\times n}}$$

3) إن محدّد جداء مصفوفتين مربعتين من المرتبة n يساوي جداء محدّديهما.

أي أنّ:

$$\boxed{det(A.B)=det(A).det(B)}$$

وتعمّم هذه الخاصة على أي عدد منتهٍ من المصفوفات المربعة من نفس المرتبة.

4) إذا تساوى سطران (أو عمودان) في مصفوفة مربعة A، فإنّ:

$$\boxed{det(A)=0}$$

5) إذا تناسب سطران (أو عمودان) في مصفوفة مربعة A، فإنّ:

$$\boxed{det(A)=0}$$

6) إذا بادلنا بين سطرين (أو عمودين) في مصفوفة مربعة A، فإنّ محدّد المصفوفة يغير إشارته .

7) إنّ محدّد مصفوفة مثلثية A يساوي جداء عناصر القطر الرئيسي .

أي أنّ:

$$\boxed{det(A)=a_{11}.a_{22}.a_{33}.....a_{nn}}$$

8) إنّ محدّد مصفوفة A يساوي محدّد منقولها A^T .

أي أنّ:

$$\boxed{det(A)=det(A^T)}$$

مثال إضافي:

لتكن المصفوفتان:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix}$$

1) أثبت أنّ A منتظمة و B منفردة.

2) أوجد A.B

الواسع في الرياضيات - المدرّس: محمد أحمد (جنّور)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

3) تحقّق أنّ:
$$det(A.B) = det(A).det(B)$$
4) أوجد المصفوفة المساعدة للمصفوفة A والمصفوفة المساعدة للمصفوفة B.
5) تحقّق أنّ:
$$A.(adj\,A)=(adj\,A).A=det(A).I_2$$
6) تحقّق أنّ:
$$B.(adj\,B)=(adj\,B).B.=0_{2\times2}$$
7) تحقّق أنّ:
$$det(A)=det(A^T)$$

الحل:

1) ☆
$$det(A)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}$$
$$=8-3=5$$
بما أنّ $det(A)\neq 0$، فإنّ: A مصفوفة منتظمة.

☆
$$det(B)=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}=0$$
لأنّ عناصر السطرين الأول والثاني متناسبة.
بما أنّ $det(B)=0$، فإنّ: B مصفوفة منفردة (شاذة).

---

2)
$$A.B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix}$$
$$A.B=\begin{bmatrix}2+2 & 6+6\\ 3+8 & 9+24\end{bmatrix}$$
$$A.B=\begin{bmatrix}4 & 12\\ 11 & 33\end{bmatrix}$$

---

3) ☆
$$det(A.B)=\begin{vmatrix}4 & 12\\ 11 & 33\end{vmatrix}$$
$$=132-132\Rightarrow$$
$$det(A.B)=0$$

☆ $det(A).det(B)=5\times0=0$
☆ بالموازنة نجد:
$$\boxed{det(A.B)=det(A).det(B)}$$

---

4) إيجاد $adj(A)$:
☆ نجد مصفوفة المحدّدات الصغرى المرافقة لعناصر المصفوفة A ولتكن A_1:
$$A_1=\begin{bmatrix}+4 & -3\\ -1 & +2\end{bmatrix}$$
☆ نجد المصفوفة المساعدة للمصفوفة A وهي منقول A_1:
$$adj(A)=\begin{bmatrix}4 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

إيجاد $adj(B)$:
☆ نجد مصفوفة المحدّدات الصغرى المرافقة لعناصر المصفوفة B ولتكن B_1:
$$B_1=\begin{bmatrix}+6 & -2\\ -3 & +1\end{bmatrix}$$
☆ نجد المصفوفة المساعدة للمصفوفة B وهي منقول B_1:
$$adj(B)=\begin{bmatrix}6 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

---

5)
☆ نجد $A.(adj\,A)$:
$$A.(adj\,A)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}8-3 & -2+2\\ 12-12 & -3+8\end{bmatrix}\Rightarrow$$
$$A.(adj\,A)=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}\Rightarrow$$
$$A.(adj\,A)=5\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

الواسع في الرياضيات - (الجبر) - المدرّس: محمد أحمد (جلّود)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$A.(adj\,A) = det(A).I_2 \quad \dots ①$$

★ نجد $(adj\,A).A$:

$$(adj\,A).A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-3 & 4-4 \\ -6+6 & -3+8 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(adj\,A).A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(adj\,A).A = 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(adj\,A).A = det(A).I_2 \quad \dots ②$$

★ من ① و ② نجد:

$$A.(adj\,A) = (adj\,A).A = det(A).I_2$$

---

6)

★ نجد $B.(adj\,B)$:

$$B.(adj\,B) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-6 & -3+3 \\ 12-12 & -6+6 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$B.(adj\,B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B.(adj\,B) = 0_{2\times 2} \quad \dots ③$$

★ نجد $(adj\,B).B$:

$$(adj\,B).B = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(adj\,B).B = \begin{bmatrix} 6-6 & 18-18 \\ -2+2 & -6+6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (adj\,B).B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (adj\,B).B = 0_{2\times 2} \quad \dots ④$$

★ من ③ و ④ نجد:

$$B.(adj\,B) = (adj\,B).B = 0_{2\times 2}$$

7)

★ وجدنا: $det(A) = 5$

★ لدينا: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

فتكون منقول A هي:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$det(A^T) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 8-3 \Rightarrow det(A^T) = 5$$

★ بالموازنة نجد:

$$det(A) = det(A^T)$$

المصفوفة المعاكسة (المقلوب) لمصفوفة مربعة:

تعريف:

إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n.

نعرّف المصفوفة المعاكسة (أو مقلوب) للمصفوفة A بأنها مصفوفة مربعة من المرتبة n ونرمز لها بالرمز A^{-1} والتي تحقق:

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

حيث: I_n هي المصفوفة الواحدية من المرتبة n.

ويُعطى مقلوب مصفوفة مربعة غير منفردة بالعلاقة:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}.(adj\,A)$$

مبرهنة:

الشرط اللازم والكافي ليكون للمصفوفة المربعة A مصفوفة معاكسة (مقلوب) هو

الواسع في الرياضيات - (الجبر) - المدرّس: محمد أحمد (حلّور)
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أن يكون محدّد هذه المصفوفة لا يساوي الصفر .

أي أنّ:

$$\boxed{A \Leftrightarrow det(A) \neq 0 \text{ لها مقلوب}}$$

مقلوب مصفوفة مربعة غير منفردة من المرتبة الثانية:

لإيجاد مقلوب المصفوفة غير المنفردة:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

نتبع ما يلي:

☆ نبادل عناصر القطر الرئيسي .

☆ نغيّر إشارات القطر الثانوي .

☆ نضرب المصفوفة الناتجة بالعدد $\frac{1}{det(A)}$ ، فنحصل على A^{-1} .

أي أنّ:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

مقلوب مصفوفة قطرية غير منفردة:

إنّ مقلوب مصفوفة قطرية غير منفردة هي مصفوفة قطرية أيضاً، عناصر قطرها الرئيسي هي مقلوبات العناصر المقابلة لها في المصفوفة المفروضة .

أي أنّ:

$$\boxed{\begin{array}{l} A = diag(a_1, a_2, ..., a_n) \Rightarrow \\ A^{-1} = diag\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_n}\right) \end{array}}$$

أو بتعبير مكافئ:

إذا كان:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & ... & 0 \\ \hline 0 & 0 & ... & a_n \end{bmatrix}$$

فإنّ:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & ... & 0 \\ \hline 0 & 0 & ... & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$$

بعض خواص المصفوفة المعاكسة: أ. التلعب

1) محدّد المصفوفة المعاكسة يساوي مقلوب محدّد المصفوفة الأصلية .

أي أنّ: $\boxed{det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}}$

البرهان:

لدينا حسب تعريف المصفوفة المعاكسة:

$$A.A^{-1} = I$$

ومنه:

$$det(A.A^{-1}) = det(I)$$

$$\Rightarrow det(A).det(A^{-1}) = 1$$

$$\Rightarrow det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

2) إذا كانت A مصفوفة غير منفردة، فإنّ: $\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$

3) إذا كانت A, B مصفوفتين غير منفردتين ولهما نفس المرتبة. فإن:

$$\boxed{(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}}$$

4) يمكن تعميم الخاصة السابقة على عدد منته من المصفوفات غير المنفردة والتي لها نفس المرتبة:

$$\boxed{(A.B.C.D)^{-1} = D^{-1}.C^{-1}.B^{-1}.A^{-1}}$$

الواسع في الرياضيات - (الجبر) - المدرّس: محمد أحمد (جلّود)
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمرين إضافي:

أوجد مقلوب كلٍّ من المصفوفات الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&5&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}$$

الحل:

إيجاد مقلوب A:

$$det(A)=\begin{vmatrix}1&2\\3&5\end{vmatrix}=5-6$$

$$\Rightarrow det(A)=-1\neq 0$$

ومنه A ليست منفردة فيكون لها مقلوب:

$$A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\cdot\begin{bmatrix}5&-2\\-3&1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}5&-2\\-3&1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-5&2\\3&-1\end{bmatrix}$$

إيجاد مقلوب B:

$$B=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&5&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

نلاحظ:

$$B=diag(3,5,-1)$$

ونلاحظ:

$$det(B)=3\times5\times-1=-15\neq0$$

فتكون B ليست منفردة فلها مقلوب:

$$B^{-1}=diag\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{-1}\right)\Rightarrow$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{5}&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

إيجاد مقلوب C:

$$C=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}$$

★ نحسب محدّد C:

$$det(C)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}$$

ننشر حسب السطر الأول:

$$det(C)=1\times\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}$$

$$det(C)=-1-1\times1+1$$

$$\Rightarrow det(C)=-1\neq0$$

ومنه: C لها مقلوب .

★ نجد مصفوفة المحددات الصغرى المرافقة لعناصر C ولتكن C_1:

$$C_1=\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$C_1=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

★ نجد المصفوفة المساعدة للمصفوفة C وهي منقول C_1:

الواسع في الرياضيات - الجبر - المدرّس: محمد أحمد (جلّود)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$adj(C)=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

☆ نجد مقلوب C:

$$C^{-1}=\frac{1}{det(C)}.adj(C)\Rightarrow$$

$$C^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$C^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

تمرين إضافي:

لتكن المصفوفة: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix}$

تحقّق أنّ:

1) $det(A^{-1})=\frac{1}{det(A)}$

2) $(A^{-1})^{-1}=A$

الحل:

1)

$det(A)=3-10\Rightarrow det(A)=-7\neq 0$

ومنه: A لها مقلوب.

$$A^{-1}=\frac{1}{-7}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -5 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{-3}{7} & \frac{2}{7}\\ \frac{5}{7} & \frac{-1}{7}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

ومنه:

$$det(A^{-1})=\frac{3}{49}-\frac{10}{49}$$

$$\Rightarrow det(A^{-1})=\frac{-1}{7}$$

بالموازنة نجد: $\boxed{det(A^{-1})=\frac{1}{det(A)}}$

---

2) نجد مقلوب A^{-1}:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{-3}{7} & \frac{2}{7}\\ \frac{5}{7} & \frac{-1}{7}\end{bmatrix}$$

بما أنّ:

$$det(A^{-1})=\frac{-1}{7}\neq 0$$

فإن A^{-1} لها مقلوب:

$$(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{\frac{-1}{7}}\begin{bmatrix}\frac{-1}{7} & \frac{-2}{7}\\ \frac{-5}{7} & \frac{-3}{7}\end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^{-1}=-7.\begin{bmatrix}\frac{-1}{7} & \frac{-2}{7}\\ \frac{-5}{7} & \frac{-3}{7}\end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$\boxed{(A^{-1})^{-1}=A}$

تمرين إضافي:

لتكن:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

تحقّق أنّ: $(A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$

الحل:

☆ نجد A.B:

الواسع في الرياضيات - الجبر - المدرّس: محمد أحمد (جلّود)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$A.B=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$A.B=\begin{bmatrix}1+2&1+1\\1+4&1+2\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$A.B=\begin{bmatrix}3&2\\5&3\end{bmatrix}$$

★ نجد مقلوب $A.B$:

$$det(A.B)=9-10\Rightarrow$$

$$det(A.B)=-1\neq 0$$

ومنه $A.B$ لها مقلوب:

$$(A.B)^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}3&-2\\-5&3\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$(A.B)^{-1}=\begin{bmatrix}-3&2\\5&-3\end{bmatrix}$$

★ نجد B^{-1}:

$$det(B)=1-2=-1\neq 0$$

ومنه B لها مقلوب:

$$B^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}1&-1\\-2&1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1\\2&-1\end{bmatrix}$$

★ نجد A^{-1}:

$$det(A)=2-1=1\neq 0$$

ومنه A لها مقلوب:

$$A^{-1}=\frac{1}{1}.\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$$

★ نجد $B^{-1}.A^{-1}$:

$$B^{-1}.A^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}.A^{-1}=\begin{bmatrix}-2-1&1+1\\4+1&-2-1\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}.A^{-1}=\begin{bmatrix}-3&2\\5&-3\end{bmatrix}$$

★ بالموازنة نجد: $\boxed{(A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}}$

تدريب صفحة 86

1/86 لتكن المصفوفات:

$$A=\begin{bmatrix}3&-6\\-1&2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-2&3\\1&0\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}0&1\\2&-1\end{bmatrix}$$

برهن أن $A.B=A.C$

الحل:

★

$$A.B=\begin{bmatrix}3&-6\\-1&2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-2&3\\1&0\end{bmatrix}$$

$$A.B=\begin{bmatrix}3\times(-2)-6\times1&3\times3-6\times0\\-1\times(-2)+2\times1&-1\times3+2\times0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A.B=\begin{bmatrix}-12&9\\4&-3\end{bmatrix}$$

نضيف أثر مصفوفة هي مجموع عناصر القطر الأساسي TRACE A

الجبر - المدرس: محمد أحمد (حلّور) - الواسع في الرياضيات

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner