رياضيات (2)

المحاضرة (5)

AU SYRIA
Al Andalus University

2018
2019

المحددات والمصفوفات

ثانياً: المحددات

درسنا في المحاضرات السابقة التوابع ومشتقاتها وتكاملاتها غير المحدودة والمحدودة وسنتابع في هذه المحاضرة التعرف على بعض المواضيع الرياضية الأخرى كالمعينات وأنواعها والمصفوفات وأنواعها ثم نقوم بدراسة بعض خواصها والعمليات الجبرية المعرفة عليها مع إعطاء بعض الأمثلة.

1. المعينات (المحددات)

المحدد (المعين) من الدرجة (المرتبة) n هو $n\times n$ عنصرا مرتبة في n سطر و n عمود وموضوعة بين خطين متوازيين من الشكل:

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ويرمز له بشكل مختزل: $\det A = \Delta = \left|a_{ij}\right|_n$

حيث أنه في a_{ij} يرمز الدليل الأول لرقم السطر والدليل الثاني لرقم العمود الذي يقع فيه العنصر a_{ij}.

وتسمى العناصر الواقعة على القطعة المستقيمة الواصلة بين الزاوية العليا اليسرى والزاوية السفلى اليمنى عناصر **القطر الرئيسي** بينما تسمى العناصر الواقعة على القطعة المستقيمة الواصلة بين الزاوية العليا اليمنى والزاوية السفلى اليسرى عناصر **القطر الثانوي**.

أمثلة:

$$|3| \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

محدد من الدرجة الأولى — محدد من الدرجة الثانية — محدد من الدرجة الثالثة

1- بعض أنواع المعينات (أو المحددات):

1- المعين المثلثي العلوي: هو معين تكون جميع العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي مساوية للصفر

أ/ المحدد

مثل
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

2- المعين المثلثي السفلي: هو معين تكون جميع العناصر الواقعة أعلى القطر الرئيسي مساوية للصفر مثل

أ/ المحدد

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

3- المعين القطري: هو معين تكون جميع العناصر غير الواقعة على القطر الرئيسي مساوية للصفر مثل

أ/ المحدد

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

4- المعين الواحدي:

المحدد

وهو معين قطري جميع العناصر القطرية فيه مساوية للواحد.

2- قيمة معين: (أو المحدد)

1- حساب قيمة معين من الدرجة الأولى:

محدد

$$\det A = \Delta = |a_{11}| = a_{11}$$

2- حساب قيمة معين من الدرجة الثانية:

محدد

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3- حساب قيمة معين من الدرجة الثالثة:

محدد

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

AU SYRIA
Al Andalus University

بحسب عناصر السطر الأول نجد:

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(a_{22}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{32})+a_{12}(a_{23}\cdot a_{31}-a_{21}\cdot a_{33})$$

$$+a_{13}(a_{21}\cdot a_{32}-a_{22}\cdot a_{31})$$

هذه القيمة لا تتغير بتغير السطر أو العمود وتسمى **بصيغة سيروس** لحساب قيمة معين من الدرجة الثالثة.

ملاحظة: قيمة معين **مثلثي علوي** أو **مثلثي سفلي** أو **قطري** تساوي جداء العناصر الواقعة على القطر الرئيسي مثل:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 6\end{vmatrix}=1\times 4\times 6=24$$

4- خواص المعينات (أو المحددات):

1- إذا كان أحد الأسطر (أو أحد الأعمدة) في معين مساوٍ للصفر فإن قيمة المعين تساوي الصفر.

2- المبادلة بين سطرين أو عمودين تغير إشارة قيمة المعين فقط.

3- إذا تساوى سطران (أو عمودان) في معين فإن قيمة المعين تساوي الصفر.

4- إذا ضرب أحد الأسطر (أو أحد الأعمدة) بعدد λ فإن قيمة المعين بعد الضرب تساوي جداء العدد λ في قيمته قبل الضرب.

مثال 1:

$$\begin{vmatrix}4 & 8 & 12\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=4.\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$$

5- إذا تناسب سطران (أو عمودان) في معين فإن قيمة المعين تساوي الصفر.

4- اشتقاق المعينات (أو المحددات)

ليكن المعين:

$$\Delta=|a_{ij}|_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

حيث عناصر المعين $i=1,2,...,n\,,\,j=1,2,...,n$ توابع لمتحول واحد ما x وبالتالي فإن قيمة المعين هذا تكون تابعة للعنصر x ويمكن حساب مشتقتها Δ' إن Δ' يعطى بالدستور

$$\Delta' = \Delta'_1 + \Delta'_2 + ... + \Delta'_n$$

حيث $i = 1,2,...,n$ ، Δ'_i هو معين أسطره (أعمدته) نفس أسطر (أعمدة) Δ ما عدا السطر i (العمود) عناصره هي مشتقات عناصر السطر i (العمود) في المعين Δ أي أن:

مثال 5: إذا فرضنا أن:
$$\Delta = \begin{vmatrix} x & \cos x \\ x^2 & 2x \end{vmatrix}$$

نجد أن:
$$\Delta = 2x^2 - x^2\cos x$$
$$\Delta' = 4x - 2x\cos x + x^2\sin x$$

ونجد بتطبيق الدستور أعلاه في اشتقاق معين أن:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & -\sin x \\ x^2 & 2x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & \cos x \\ 2x & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta' = 2x + x^2\sin x + 2x - 2x\cos x$$
$$\Delta' = 4x - 2x\cos x + x^2\sin x$$

أو

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & \cos x \\ 2x & 2x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & -\sin x \\ x^2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta' = (2x - 2x\cos x) + (2x + x^2\sin x)$$
$$\Delta' = 4x - 2x\cos x + x^2\sin x$$

2. المصفوفات

غير مطلوب

تعريف المصفوفة

المصفوفة من الدرجة $n \times m$ هي $n.m$ عنصر مرتبة في n سطراً و m عموداً فإذا رمزنا لهذه المصفوفة بـ A عندئذ تكتب بالشكل: