سنة أولى (تقنيات الحاسوب)
2018-2019

المحاضرة (5)

I) مشتقة دالة عددية لمتغير حقيقي

تعريف المشتقة: لتكن f دالة معرفة على مجال D من $\mathbb{R}$ و x عنصر من D (أي x ينتمي إلى D).

نسمي النسبة $\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ حيث $h \neq 0$ و $x+h \in D$.

إذا كانت هذه النسبة تؤول إلى عدد حقيقي ℓ عندما h يؤول إلى 0، فإننا نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق عند x ونكتب:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$$

ونكتب إذن:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

شرط وجود النهاية: (وهي نهاية وحيدة)

- نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في x إذا كانت f معرفة على $[x, x+\alpha[$ حيث $\alpha > 0$ وكانت النهاية $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ موجودة ومنتهية.

مثال: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = x^2 + 1$. أثبت أن f قابلة للاشتقاق عند كل x من $\mathbb{R}$ ثم احسب $f'(x)$.

الحل: لنبين أن f قابلة للاشتقاق عند x من $\mathbb{R}$ ولنحسب $f'(x)$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 + 1 - x^2 - 1}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

$\Rightarrow$ عندما $h \to 0$ فإن $2x + h \to 2x$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

تمرين: أدرس قابلية اشتقاق الدوال التالية:

1) $y = f(x) = 2x + 7$ 2) $y = g(x) = \frac{1}{x}$ 3) $y = h(x) = x^3$

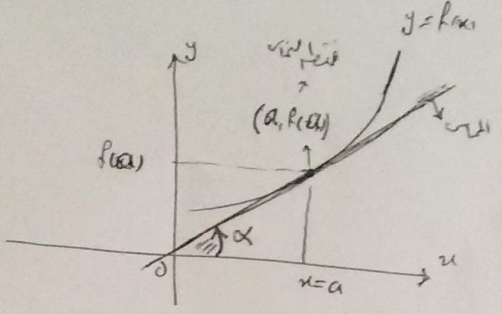
II) التفسير الهندسي للمشتقة

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق عند a من D. المستقيم المار من النقطة $A(a, f(a))$ والذي معامل توجيهه $f'(a)$ هو المماس لمنحنى f عند النقطة A.

معادلة المماس: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

$\tan \alpha = f'(a)$

أما في الشكل التالي:



- إذا كان منحنى التابع f موجوداً في النقطة $x=a$، فإن ذلك يعني أن مماس المنحنى التابع في النقطة $M_0(a, f(a))$ تأخذ المعادلة:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x-a)} \longrightarrow (*)$$

مثال: أوجد معادلة المماس للقطع المكافئ: $y = x^2$ في النقطة $(2,4)$

الحل: نلاحظ أن $(a, f(a)) = (2,4)$ ؛ وبالتالي نجد معادلة المماس المطلوب:

$$y' = 2x \rightarrow y'_{|x=2} = 2 \times 2 = 4$$

$$y - 4 = 4(x-2)$$

$$\boxed{y = 4x + 2 = 2(2x+1)}$$

المعادلة المطلوبة.

*) المشتقة الأولى للتابع سالمية والسار: باستخدام مفهوم النهاية اليمنى واليسرى نعلم أن المشتقة سالمية والسار للتابع $y=f(x)$ في النقطة x هي:

تعريف المشتقة سالمية اليمنى واليسرى للتابع $(y=f(x))$ في النقطة x:

$$f'(x+) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$f'(x-) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- نقول عن التابع إنه مشتق (أو قابل للاشتقاق) في النقطة x، إذا كان مشتقه التابع سالمية والسار متساويين في تلك النقطة، وبذلك يكون التابع ليس مشتقاً عندها.

مثال توضيحي: لتكن الدالة: $y=|x|=\begin{cases} x & ; x>0 \\ 0 & ; x=0 \\ -x & ; x<0 \end{cases}$ الدالة معرفة على $\mathbb{R}$،

أثبت أن الدالة قابلة للاشتقاق عند النقطة $x=0$ ثم:

المشتقة اليمنى للدالة عند $x=0$ هي:

$$f'(0+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1,$$

المشتقة اليسرى عند $x=0$ هي:

$$f'(0-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

ب) $f'(0+)\neq f'(0-)$ فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $x=0$

الخلاصة: الدالة $y=|x|$ غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $x=0$

ملاحظة: العلاقة بين الاشتقاق والاستمرارية:

نظرية: إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق (اشتقاقية) في نقطة ما مثل $x=a$ فإنها تكون مستمرة في a.

ملاحظة: إن عكس النظرية ليس صحيحاً بشكل عام فقد تكون الدالة مستمرة في نقطة دون أن تكون اشتقاقية فيها، والمثال السابق يوضح ذلك

أي الدالة $y=|x|$ والتي هي مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالتالي مستمرة عند $x=0$، إلا أنها ليست اشتقاقية فيها لأن $f'(0+)\neq f'(0-)$

قواعد الاشتقاق:

1) مشتقة المجموع والفرق لدالتين قابلتين للاشتقاق عند x هي مجموع أو فرق مشتقتيهما عند x.

$$y=u(x)\pm v(x)$$

$$y'=u'(x)\pm v'(x)$$

مثال

$$y=e^{2x}\pm x^2+1 \longrightarrow y'=2e^{2x}\pm(2x)$$

ب) نظرية الضرب: إذا كانت u, v قابلتين لـ x فإن:

$$y = u \cdot v \xrightarrow{\text{حيث}} y' = u' \cdot v + v' u$$

ونتبع نفس القاعدة السابقة في الأمثلة.

مثال: إذا كانت $y = x^2 \ln x$ حيث

$$y' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x}$$
$$= 2x \ln x + x$$

ج) قسمة الدوال: إذا كانت u, v قابلتين لـ x فإن قسمتهما تكون

$$y = \frac{u}{v} \quad (v \neq 0) \xrightarrow{\text{حيث}} y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

ملاحظة: إذا كانت $y = \frac{1}{v}$ حيث $v \neq 0$ فإن: $y' = -\frac{v'}{v^2}$

د) بعض مشتقات أنواع الدوال (وهي قواعد أساسية):

1) $y = c \Rightarrow y' = 0$

2) $y = c \cdot u \Rightarrow y' = c \cdot u'$

$y = 5x \rightarrow y' = 5$

3) $y = x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}$; $\alpha \in \mathbb{R}$ (مشتقات القوة)

4) $y = \sqrt{u(x)} \Rightarrow \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ سنعود إليها عندما نتكلم في القاعدة (9) من هذه القواعد في الصفحة التالية.

5) $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$; $a > 0$, $a \neq 1$

6) $y = e^{u(x)} \Rightarrow y' = u'(x) e^{u(x)}$; $a = e$ حيث

حالة خاصة: إذا كانت $y = e^x$ فإن $y' = e^x$.

7) $y = \ln u(x) \Rightarrow y' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

حالة خاصة: إذا كانت: $y = \ln x$ فإن $y' = \frac{1}{x}$

8) $y = \sqrt{u(x)} \longrightarrow y' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

الجذر التربيعي

حالة خاصة: إذا كانت: $y = \sqrt{x}$ فإن $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

9) $y = (u(x))^{\alpha} \longrightarrow y' = \alpha (u(x))^{\alpha-1} \cdot u'(x)$

القوة

مثال: إذا كانت: $y = (x^8 + x^7)^6$ فإن ($\alpha = 6$ هي)

$y' = 6(x^8 + x^7)^5 \ (8x^7 + 7x^6)$

10) $y = \sin u(x) \longrightarrow y' = u'(x) \cos u(x)$

حالة خاصة: إذا كانت $y = \sin x$ فإن $y' = \cos x$

11) $y = \cos u(x) \longrightarrow y' = -u'(x) \sin u(x)$

وبالتالي إذا كانت $y = \cos x$ فإن $y' = -\sin x$

12) $y = \tan u(x) \longrightarrow y' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)} = u'(x)(1 + \tan^2 u(x))$

مثال: إذا كانت $y = \tan x$ فإن $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

13) مشتقة تابع التابع (قاعدة السلسلة): إذا كان $y = f(u)$, $u = g(x)$ فإن التابع المركب من التابعين السابقين $y = f[g(x)]$ قابل للاشتقاق بالنسبة لـ x ويكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

أو بالشكل $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

مثال: أوجد مشتقة التابع التالي.

$y = e^{x^2}$ وهنا نضع

الحل: $y = e^u$, $u = x^2$ لدينا

هذا التابع عبارة عن تابع مركب (تركيب تابعين من تابعين)

سوف نستخدم قاعدة مشتق التابع المركب (قاعدة السلسلة):

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = (e^u)'_u \cdot (x^2)'_x = e^u \cdot 2x = 2x e^{x^2}$$

عوضنا عن u بما يساويها وهذا يكفي للحصول على الشكل الآخر.

ولذلك عند إيجاد مشتق:

$$y = \sin\left(\frac{2}{x}+1\right)$$

نتبع هذه القاعدة.

الحل: هذا التابع أيضاً مركب فنشتقه (مع فرض $y = \sin u(x)$, $u(x) = \frac{2}{x}+1$)

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \cos u(x) \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}\cos\left(\frac{2}{x}+1\right)$$

عوضنا عن u بما يساويها

14) $y = \arcsin u(x) \longrightarrow y' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

$y = \arcsin x \longrightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

نتذكر في حالة خاصة:

15) $y = \arccos u(x) \longrightarrow y' = \dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

$y = \arccos x \longrightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

في حالة خاصة:

16) $y = \arctan u(x) \longrightarrow y' = \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

$y = \arctan x \longrightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

في حالة خاصة:

مثال: أوجد مشتق التابع الآتي.

الحل:

$$y = f(x) = (x^2+1)^3 + \ln(x^5-3) + \arccos(2x+1)$$

$$y' = f'(x) = 3(x^2+1)^2 \times 2x + \frac{5x^4}{x^5-3} + \frac{-2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$$

x) مشتقة التابع الضمني: للتابع الصريح المعطى $y=f(x)$ والتابع المعطى بالشكل الضمني $f(x,y)=0$ فإحيانًا يمكننا تحويله إلى تابع ظاهري لكن الأمر سيطول إيجاد المشتقة y'_x أو $\frac{dy}{dx}$ دون تحويل التابع الضمني إلى تابع ظاهري وذلك من خلال العلاقة أو الدستور:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{-f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$$

حيث f'_x مشتقة التابع $f(x,y)$ بالنسبة لـ x باعتبار y ثابتة و f'_y تعني مشتقة التابع $f(x,y)$ بالنسبة لـ y باعتبار x ثابتة ولنوضح ذلك من خلال الأمثلة.

مثال(1): أوجد مشتقة التابع:

$$x^2+y^2=100$$

وذلك بطريقتين.

الحل: (ط) هذه العلاقة (أي التابع) من الشكل $f(x,y)=0$ لو كتبناها بالصورة $x^2+y^2-100=0$ أي

$$f(x,y)=x^2+y^2-100=0$$

لنوجد f'_x و f'_y:

$$f'_x(x,y)=2x, \quad f'_y(x,y)=2y$$

نعوض الآن في دستور مشتقة التابع الضمني فنجد:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y}=-\frac{x}{y} \quad \ldots (1)$$

(ط2) مشتقة طرفي y بالنسبة لـ x باعتبار أن y تابع لـ x نجد (أي مشتقة كل حد بالنسبة لـ x):

$$2x+2yy'_x=0 \Rightarrow \boxed{y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}} \quad \ldots (2)$$

وهنا نلاحظ أن $\boxed{1\equiv 2}$ أي تساوي المشتقتين.

مثال(2): أوجد معادلة المماس للمنحني $x^4+y^4=17$ عند النقطة $M(2,1)$.

الحل: لنوجد أولاً $y'_x=\frac{dy}{dx}$ بالشكل:

$$4x^3 + 4y^3 y'_x = 0 \Rightarrow y'_x = \frac{-x^3}{y^3}$$

$m = y'_x = -8$

وإذا مر المماس بالنقطة M فإن:

ومعادلة المماس هي:

$y - 1 = -8(x-2)$ أي $8x + y = 17$

مثال (3) <واجب منزلي> : أوجد y'_x للتوابع:

1) $x^2 + y^2 = 6xy^4$

2) $xy = 1$

* مشتقة التابع الوسيط (المعرف وسيطياً): إذا كان التابع $y = f(x)$ معرفاً وسيطياً بالعلاقة:

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$; $\alpha \le t \le \beta$

نكتب مشتقته لهذا التابع بالعلاقة (بالصورة):

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

مثال: أوجد مشتقة التابع الوسيط الآتي:

الحل: لدينا:

$x = t^2 + 1$, $y = 5t^3 + t^2$

نشتق حسب العلاقة

$x'_t = 2t$, $y'_t = 15t^2 + 2t$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{15t^2 + 2t}{2t}$$

* المشتقة اللوغاريتمية: نشرح ذلك من خلال الأمثلة:

مثال: أوجد مشتقة التابع الآتي وفق اللوغ:

1) $y = x^{x^2}$, 2) $y = 3^{5x}$

الحل: 1) نأخذ لوغاريتم الطرفين لنتخلص من الأس:

$\ln y = x^2 \ln x$

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x (وتذكر أن $\ln y$ مركب):

$\frac{y'}{y} = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(1 + 2\ln x) \Rightarrow y' = x\, y (1 + 2\ln x) = x\, x^{x^2}(1 + 2\ln x)$

$= x^{x^2+1}(1 + 2\ln x)$

وكمثال (2) استكمل الطريق (لتتدرب)

* المشتقات من الرتب العليا (أو الأعلى) للتابع: إذا كانت $y=f(x)$ تابعاً مشتقاً (أو قابلاً للاشتقاق) ومشتقته $y'=f'(x)$ من المشتقة الأولى أو مشتق التابع كما نعلم، ولنعرف الآن المشتقة الأولى أو مشتق التابع المشتق اشتقاقاً عندئذ مشتقة المشتقة الأولى للتابع $y=f(x)$ من المشتقة الثانية أو المشتقة من الرتبة الثانية

ونرمز لها بالرموز:

$$y'',\ f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2f}{dx^2}$$

ولنتابع اشتقاق المشتقة الثانية للتابع لنحصل على المشتقة الثالثة أو المشتقة من الرتبة الثالثة ونرمز لها بالرموز:

$$y''',\ f'''(x),\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{d^3f}{dx^3}$$

وهكذا حتى نصل إلى المشتقة النونية أو المشتقة من الرتبة n ونرمز لها بـ:

$$y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^ny}{dx^n},\ \frac{d^nf}{dx^n}$$

مثال (1): أوجد المشتقات المتتابعة للتابع:

1) $y=f(x)=x^5+2x^4-\frac{1}{2}x+11$ ، 2) $y=g(x)=x^3$، 3) $y=h(x)=e^x$

أي أوجد:

$$y',\ y'',\ y''',\ \dots$$

الحل: 1) لدينا:

$$y'=f'(x)=5x^4+8x^3-\frac{1}{2}\ ,\ y''=f''(x)=20x^3+24x^2$$

$$y''=60x^2+48x\ ,\ y^{(4)}=120x+48$$

$$y^{(5)}=120\ ,\ y^{(6)}=y^{(7)}=\dots=\underbrace{y^{(n)}}_{\text{المشتقة الصفرية}}=0$$

2) كذلك:

$$y'=g'(x)=3x^2,\ y''=g''(x)=6x,\ y'''=g'''(x)=6$$

$$y^{(n)}=g^{(n)}(x)=0 \quad \text{لكل } n\geq 4$$

الملاحظة أن:

3) المشتقة المتتابعة من المرتبة n للتابع: $y=h(x)=e^x$ هي نفسها أي:

$$y'=y''=\dots=y^{(n)}=e^x$$

وهكذا بالنسبة لبقية المشتقات.

* التذكير ببعض التوابع المثلثية العكسية:

1) إنه تابع الجيب: $y = \sin x$ والذي يُعرَّف بـ:

$$\sin : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$$
$$x \longmapsto y = \sin x$$

(تابع غير متباين)
تقابل ولهذا التابع مقلوب (أو تقابل عكسي) وهو:

$y = \arcsin x$
ليزا: قوس الزاوية التي جيبها x

منطلقه: $[-1,1]$ ومجاله $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

2) والتابع (الجيب): $y = \cos x$ والمعرف بالشكل:

$$\cos : [0, \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$$
$$x \longmapsto y = \cos x$$

تابع عكسي (أو تقابل عكسي) كونه تقابل (أي متباين وغامر) وهو:

$y = \arccos x$
قوس الزاوية التي جيبها x

منطلقه: $[-1,1]$ ومجاله $[0, \pi]$.

3) والتابع (الظل): $y = \tan x$ والمعرف بالشكل:

$$\tan :]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\longrightarrow]-\infty, +\infty[$$
$$x \longmapsto y = \tan x$$

تابع تقابل (أي متباين وغامر) وللتابع عكسي (أو تقابل عكسي) وهو:

$y = \arctan x$

منطلقه $]-\infty, +\infty[$ ومجاله $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

ملاحظة: التوابع الثلاث السابقة مستمرة ومتظاقرة (قابلة للاشتقاق) في مجموعة تعريفها، وقابلة للاشتقاق أيضاً.

قاعدة اشتقاق توابع التركيب:
حيث $u = u(x)$ تابع لـ x.

1) $y = \arctan u(x) \xrightarrow{\text{نشتق}} y' = \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

2) $y = \arcsin u(x) \xrightarrow{\text{نشتق}} y' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

3) $y = \arccos u(x) \xrightarrow{\text{نشتق}} y' = \dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

مثال: أوجد مشتقات التوابع الآتية.

1) $y=f(x)=\arccos(2x+1)$ ، 2) $y=g(x)=\arctan x^2$

3) $y=h(x)=\arcsin x$

الحل: 1) إيجاد مشتقة التابع الأول هو:

$$y'=f'(x)=\frac{-2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$$

2) ومشتقة التابع الثاني هو:

$$y'=g'(x)=\frac{2x}{1+x^4}$$

3) ومشتقة التابع الثالث هو:

$$y'=h'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

نلاحظ

*) تطبيقات هندسية للمشتق ومعادلتا المماس والناظم:

1) التطبيق الأول: يتمثل في إيجاد معادلة المماس والناظم لمنحني تابع ما: $y=f(x)$ في نقطة $M(a,f(a))$ وفيه المشتق الأول يفيد بإيجاد ميل المماس في نقطة فرضية مثل:

$$m=f'(a)$$

معادلة المماس في النقطة المذكورة:

$$y-y_{1a}=f'(a)(x-a) \quad ; \quad y_{1a}=f(a)$$

أما معادلة الناظم فهي:

$$y-y_{1a}=\frac{-1}{f'(a)}(x-a) \quad ; \quad f'(a)\neq 0$$

ولنذكر: $m_{\text{مماس}} \times m_{\text{ناظم}} = -1$

خذ المثال الآتي وتمعن ذلك.

2) التطبيق الثاني: يتمثل بإيجاد الزوايا الحادة والمنفرجة (أو الحادة والقائمة) وتسمى زوايا تقاطع منحنيين عندما نوجد المشتق الأول للتابع $y=f(x)$ ثم نجد ظل هذه الزوايا

① إذا كان $f'(x) \geq 0$ فإن f متزايد و منحنى البيان صاعد

② " " $f'(x) \leq 0$ فإن f متناقص " منحنى البيان هابط

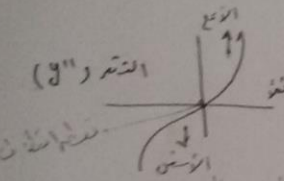
③ إذا كان $f'(x) > 0$ فإن f متزايد تماماً (وهذه الحالة عند نقطة) و منحنى البيان صاعد

④ " " $f'(x) < 0$ " متناقص تماماً (" " " ") " هابط

⑤ وإذا كان $f'(x) = 0$ فإن f تكون ثابتة.

$f'<0$ | $f'>0$ (غير قابلة للاشتقاق)
$x=a$

- نوجه المنحنى نحو الأعلى إذا كانت المشتقة y' إشارتها موجبة أي صاعد نحو الأعلى.
- وفي حال كانت المشتقة الثانية للتابع هي: $y''=f''(x)$ فإشارتها:



① $y''>0$ التقعر نحو الأعلى ∪ نحو الجهة.
② $y''<0$ " " الأسفل ∩ " "

- عند نقاط التقعر التي إشارتها موجبة أي صاعد نحو الأعلى تقع النقاط الحرجة

نقاط النقط الحرجة: لنفرض أن التابع f معرف على الفترة $[a,b]$، يقال عن النقطة $x=a$ نقطة حرجة لـ f إذا كان $f'(a)=0$ أو $f'(a)$ غير معرفة.

وعند ما نتناول أبعد النقط الحرجة للتابع f نأخذ أبعد القيم x التي تجعل $f'(x)=0$ أو التي عندها $f'(x)$ غير موجود.

ملاحظة: سنتبع كل ذلك من خلال دراسة تغيرات التوابع ورسم بياناتها.

3) **النظرية الثالثة (مبرهنات رول والقيم الوسطى):**

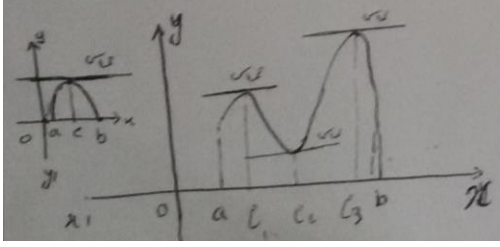
مبرهنة رول (Rolle's Theorem): لنفرض أن التابع f معرف على $[a,b]$ عندئذ إذا كان:

شرط 1) التابع مستمر على $[a,b]$

شرط 2) التابع مستمر (قابل للاشتقاق) على $]a,b[$

شرط 3) $f(a)=f(b)$، فإنه يوجد على الأقل عدد (نقطة) واحد أو أكثر $c \in]a,b[$ بحيث أن

$$f'(c)=0$$



- **المعنى الهندسي لمبرهنة رول:** إذا تحققت شروط هذه المبرهنة فإنه يوجد عدد (أو نقطة) على بيان التابع بحيث أن المماس المرسوم في هذا العدد (أو النقطة) يوازي محور السينات والعكس صحيح ذلك جانباً.

مثال (1): أعط مثالا لدالة تحقق شروط نظرية رول على المجال $[-2,2]$ ثم أوجد العدد c حيث $f'(c)=0$.

الحل: لتكن الدالة $f(x)=x^3-4x$

1) f كثيرة حدود معرفة على $\mathbb{R}$ (مجموعة الأعداد الحقيقية) وبالتالي مستمرة على $[-2,2]$

2) f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق على $]-2,2[$

3) $f(2)=f(-2)=0$

إذن الشروط الثلاث محققة، وبالتالي يوجد $c\in]-2,2[$ بحيث $f'(c)=0$.

$f'(x)=3x^2-4 \Rightarrow f'(c)=3c^2-4 \Rightarrow 3c^2-4=0$

ومنه $c=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ أي يوجد c وحيد ينتمي إلى $]-2,2[$ (أي يوجد c وحيد يكون بين x' و x).

مثال (2): أعط مثالا لدالة تابعة مستمرة على $\mathbb{R}$ ولا تحقق نظرية رول على $[0,\pi]$.

$y=\sin x$

على المجال $[0,\pi]$، يوجد العدد c حيث $0<c<\pi$ بحيث $f'(c)=0$.

ج/ لا تحقق نظرية رول.

نظرية لاغرانج (نظرية القيم الوسطى):

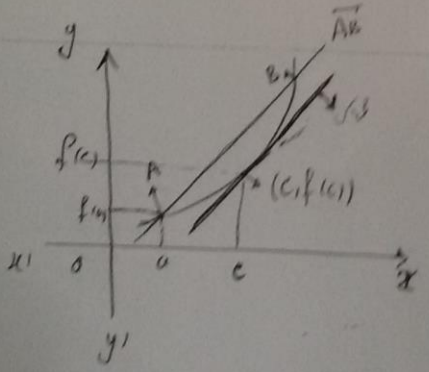
إذا تحققت الشروط الآتية من التابع $y=f(x)$:

1) التابع f مستمر على $[a,b]$

2) التابع f قابل للاشتقاق على $]a,b[$

فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b أي $a<c<b$ بحيث:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



ب) المعنى الهندسي لنظرية لاغرانج: يعني تحقق شروط نظرية لاغرانج يوجد على الأقل نقطة C من المنحنى (C_f) بين النقطتين A و B بحيث يكون المماس عند C موازيا للقاطع (AB).

$A(a,f(a))$

$B(b,f(b))$

مثال (1): ليكن $f(x)=x^3-x^2-x+1$ على $[0,2]$.

أوجد العدد $c \in]0,2[$ الذي تحققه برهنة رولي.

الحل: لنتحقق شروط برهنة:

أ) الدالة كثيرة حدود دالة $\mathbb{R}$ هو مستمر على $[0,2]$ } تحققت الشروط

ب) " " " " قابلة للاشتقاق في $\mathbb{R}$ هو قابل للاشتقاق على $]0,2[$

عندئذ يوجد عدد (على الأقل) c حيث $0<c<2$ بحيث أن:

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0} \quad ; \quad f'(x)=3x^2-2x-1$$

ومنه $3c^2-2c+1=\frac{3-1}{2} \Rightarrow 3c^2-2c-2=0$

حل هذه المعادلة نجد فقط c (لأن Δ موجب) وهما: $c_1=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$ هو لا ينتمي لـ $]0,2[$

بينما $c_2=\frac{1+\sqrt{7}}{3} \in]0,2[$

مثال (2) إذا كانت الدالة $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x$ تحقق شروط برهنة رولي على $[0,3]$ ثم أوجد العدد $0<c<3$ الذي تحققه هذه البرهنة.

الحل

4) التعليمة (أو ج) (برهنة أو قاعدة أو ميثاق لوبيتال لإزالة الحالات غير المعينة): إذا كانت الدالتان f و g قابلتين للاشتقاق (أو قابلة للاشتقاق أو متصلة) في جوار a ما عدا ربما عند $x=a$. فإذا كانت $\frac{f(x)}{g(x)}$ تأخذ أحد الصورتين $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

عندما $x \to a$ فإن:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

حيث $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ إما أنها تكون موجودة كعدد حقيقي أو أنها تكون ∞

- تبقى برهنة أو ميثاق صحيحة عندما $x \to \infty$، ملاحظة أنه عند تطبيق أو ميثاق إذا ظهرت صيغة جديدة الصورة $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ نطبق أو ميثاق مرة جديدة وهكذا.

أمثلة توضيحية هذه الحالة الغاية: أوجد النهاية (إن وجدت) :

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{0}{0}$ عدم تعيين

لذا نطبق قاعدة لوبيتال مرتين:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$$

(الحل) 2) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - x\cos x}$

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x + e^x} = \frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

ولذا نطبق قاعدة لوبيتال هنا (مرتين)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x+e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{1+e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

للتذكير: $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ أي

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

(الحل) 4) $\lim_{x\to\infty} \frac{x e^x}{x + e^x}$

وهذه الحالة التي نطبق عليها هذه القاعدة (عدم تعيين $\infty - \infty$)!

وهنا نحيلها إلى الحالة $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ ثم نطبق لوبيتال.

5) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right) = \infty - \infty$ عدم تعيين

لذا نتبع الخطوات التالية بالترتيب:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x - 1}{\cos x}\right) = \frac{0}{0}$$ عدم تعيين

نطبق لوبيتال فنجد:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x - 1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0$$

(الحل) 6) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \infty - \infty$ عدم تعيين

لا هنا نوحد المقامات ثم نكمل الحل!