سنة أولى (تعليمات كهاسوب) - السداسي الأول
2018-2019

رياضيات نظري

المحاضرة (7)

*) تفاضل تابع - خواص وتطبيقات :

-) تفاضل تابع : ليكن لدينا التابع $y=f(x)$ ، فإنه تفاضل هذا التابع نرمز له بالرمز dy حيث f' مشتقة أول .

$$\boxed{dy = y'dx = f'(x)\,dx}$$

أي تفاضل تابع ما يساوي جداء مشتقة التابع بتفاضل المتغير (أو المحول) .

ملاحظة : (1) مشتقة تابع ما يساوي حاصل قسمة تفاضل هذا التابع على تفاضل المتغير (أو المحول) ، أي :

$$\boxed{y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}}$$

(2) إذا كان التابع $y=f(x)$ قابلاً للتفاضل في نقطة ، فإنه يكون مستمراً عندها (أو في) ، إلا أن العكس ليس صحيحاً بشكل عام (نفس الشيء في حال كان الكلام على المشتقة)

مثال على ذلك : التابع $y=f(x)=|x|$ مستمر عند النقطة $x=0$ إلا أنه ليس قابلاً للتفاضل فيها . وهذا بيناه في حالة المشتقة .

(3) يكون التابع قابلاً للتفاضل على فترة (مجال) ما ، إذا كان قابلاً للتفاضل في كل نقطة من نقاط هذه الفترة.

" إذا كانت المشتقة أو التفاضل لتابع ما متغير واحد شيء واحد ، أي إذا قلنا إن التابع مشتق أو قلنا نقول إنه قابل للتفاضل وبالعكس "

- خواص التفاضل : جميع خواص التفاضل تنبع مباشرة من خواص المشتقة ، ولنذكر فيما يلي خواص التفاضل ، بفرض أن u و v تابعين قابلين للتفاضل ، عندئذٍ :

1) $d(u \mp v) = du \mp dv$

2) $d(u.v) = u\,dv + v\,du$

3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$; $v \neq 0$

4) $d(c) = 0$; $c =$ ثابت
$d(-5) = 0$

5) $d(c.u(x)) = c.du(x)$

Scanned by CamScanner

- التفاضلات المتتالية: إذا كان التابع $y = f(x)$ قابلاً للتفاضل (أي y' أو f' موجود) فإن

$$dy = f'(x)\,dx = y'\,dx$$

والذي يسمى أيضاً تفاضل التابع y من المرتبة الأولى (التفاضل الأول)، ونسمي بالتفاضل الثاني تفاضل التفاضل الأول، ونرمز له بـ

$$d^2y = f''(x)\,dx^2 = y''\,dx^2$$

وهكذا..

$$\vdots$$

$$d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n = y^{(n)}\,dx^n$$

ومنه كذلك:

$$y' = \frac{dy}{dx},\quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\quad \dots,\quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

مثال: أوجد التفاضل التابع: $y = (x^3+4)$ ومن خصائص التفاضل،

$$dy = (3x^2)\,dx$$

ب/ إيجاد المشتقة للتابع: نشرح ذلك بمثال:

مثال: أوجد مشتقة مايلي $x \cdot y^2 = y$ باستخدام التفاضل.

(أي أوجد $y' = y'_x = ?$).

الحل: لنوجد التفاضل (للطرفين):

$$dx\,y^2 + 2y\,dy \cdot x = dy \Rightarrow$$

$$y^2\,dx = dy - 2xy\,dy \Rightarrow y^2\,dx = (1-2xy)\,dy$$

ومنه

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-2xy}$$

مثال آخر: أوجد مشتقة التابع الآتي بالاعتماد التفاضل:

$$x \cdot \sin y = \cos x$$

الحل: إما مشتقة طرفي إيجاد التفاضل،

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin y + \sin x}{-x\cos y}$$

Scanned by CamScanner

(ج) استخدام تفاضل الدالة في حساب القيم التقريبية لتابع ما:

مثال: احسب قيمة تقريبية للعدد: $\sin 31^\circ$

الحل: نفرض أن: $x = 30^\circ$ و $dx = \Delta x = 1^\circ$ $\left(1^\circ = \frac{\pi}{180}\ rad \text{ راديان}\right)$

نكتب: $y = \sin x \rightarrow y = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0,5$

نفاضل طرفي:

$$dy = y' dx \Rightarrow dy = \cos x\, dx$$

$$dy = \cos 30^\circ \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = 0,015$$

ومنه:

$$y + dy = 0,5 + 0,015 = 0,515$$

مثال آخر: احسب قيمة تقريبية للعدد: $\sqrt{35}$ (حيث $\sqrt{35} = 5,916$)

الحل: أقرب عدد قابل للجذر $x = 36$ ونكتب:

$y = \sqrt{x}$

نفاضل الناتج طرفي:

$$dy = y' dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \quad ; \quad x = 36,\ dx = \Delta x = 1$$

بالتعويض:

$$dy = \frac{1}{2 \cdot 6}(1) \Rightarrow dy = \frac{1}{12} = 0,083$$

ومنه

$$y - dy = 6 - 0,083 = 5,917$$

X) دراسة تحولات تابع - اختبار المشتقة الأول والثاني - المقاربات - تمثيله وفق مراحل الأشكال:

مثال (1): ليكن التابع: $y = f(x) = x^3 - 3x$ والمطلوب

① ادرس تحولات التابع وارسم خطه البياني

② بالتعويض تفاضلي سهل جداً: $x = 1,\ dx = \Delta x = 0,2$

الحل: لدراسة تحولات تتبع مايلي:

Scanned by CamScanner

1) مجموعة التعريف والاستمرار: التابع حدودية كدرجة الثالثة معرف ومستمر على R أي

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

2) الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة:

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x) = +\infty$$

أي لا توجد مستقيمات مقاربة توازي محوري الإحداثيات، لذا نبحث عن مستقيم مقارب مائل معادلته من الشكل: $y = mx + c$، حيث:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3x}{x} = +\infty$$

يوجد فرع شلجمي للتابع باتجاه محور $y'y$.

3) الفروع النهائية و"النقاط الحرجة": نوجد المشتق الأول $y' = f'(x)$ أي:

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 3, \quad y' = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x = -1 \Rightarrow y = f(-1) = 2,$$

$$x = 1 \Rightarrow y = f(1) = -2,$$

نضع الجدول (مرحلة نسميه الفروع النهائية وتزايده وتناقصه):

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	تزايد تام ↗	2	تناقص تام ↘	-2	تزايد تام ↗	$+\infty$
			max نهاية عظمى		min نهاية صغرى		

للتابع النقطة $(-1, 2)$ نهاية عظمى (أو محلية) والنقطة $(1, -2)$ صغرى

التابع تزايد تام على $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ لأن $y' = f'(x) > 0$

تناقص تام على $[-1, 1]$ لأن $y' = f'(x) < 0$

Scanned by CamScanner

4) جهة التقعر ونقطة الانعطاف : نوجد المشتقة الثانية :

$y'' = 6x \xrightarrow{\text{نساوي}} y'' = 0 \Rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$

ومنه

$x = 0 \rightarrow y = f(0) = 0 \rightarrow (0,0)$

نقطة الانعطاف

نضع الجدول الذي فيه جهة التقعر ونقطة الانعطاف :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	
y (جهة التقعر)		$\cap$	0	$\cup$	

التقعر $y'y$ الحساب — $(0,0)$ نقطة الانعطاف وحيدة — التقعر $y'y$ الموجب

5) التقاطع مع المحورين : (أ) التقاطع $y'y$ نعوض $x = 0$ نجد :

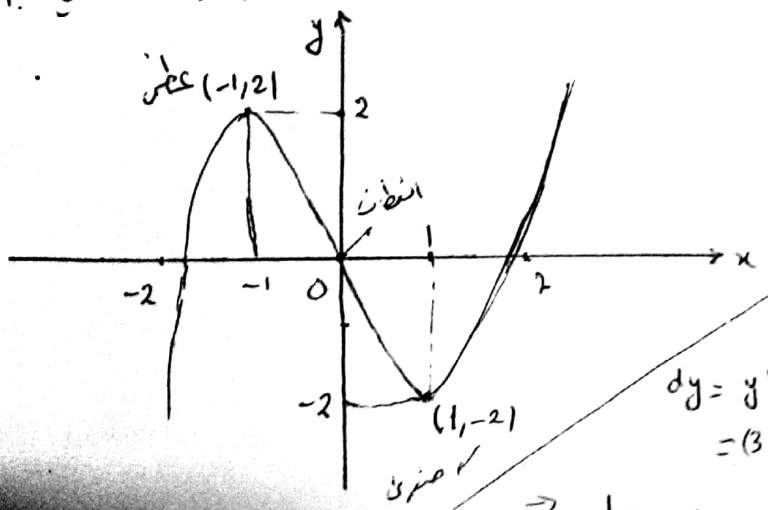
$y = f(0) = 0 \longrightarrow (0,0)$ نقطة البدء

(ب) التقاطع $x'x$ نعوض $y = 0$ نجد :

$x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0$

ومنه $x = 0$ أو $x = \pm\sqrt{3} = \pm 1,7$ (ثلاث نقاط تقاطع مع المحور السيني).

6) الرسم : التابع متزايد من الدرجة الثالثة مركز تناظره نقطة الانعطاف والتي مبدأ الإحداثيات نأخذه كما هو.



الطلب الثاني : تفاضل

$dy = y' dx$

$= (3x^2 - 3) dx \quad ; x = 1, dx =$

$\Rightarrow dy = 0$

Scanned by CamScanner

مثال آخر: ادرس تقعرات الدالة ومنحنى البياني: $y = f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

الحل:

① مجموعة التعريف والاستمرارية: الدالة كسرية تناظرية تعرف على

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$
$=]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

واستمرارية.

② الفروع النهائية (المقاربات):

$x \to \pm\infty \Rightarrow y = \frac{2}{1} = 2$

المستقيم $y=2$ مقارب يوازي $x'x$

$x \xrightarrow{<} 1 \Rightarrow y \to -\infty$

المستقيم $x=1$ مقارب يوازي $y'y$

$x \xrightarrow{>} 1 \Rightarrow y \to +\infty$

أي المستقيم $x=1$ مقارب يوازي $y'y$ و يقطع المنحنى $(1,2)$ نقطة تقاطعهما

③ التغيرات بمعرفة المشتق الأول: الشرط اللازم

$y' = \frac{-5}{(x-1)^2} \to y' \neq 0$

أي المشتق الأول لا ينعدم ولا يوجد له نقاط حرجة (لا عظمى ولا صغرى) و $y'<0$ دائما

الدالة متناقصة تماما على كل مجموعة تعريفها.

الجدول:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2	$\searrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\searrow$	2

④ دراسة التقعر ونقط الانعطاف: الشرط الثاني:

$y'' = \frac{10}{(x-1)^3} \Rightarrow$

$y'' \neq 0$ (أي لا ينعدم) لا توجد نقطة انعطاف

الجدول:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		$-$	‖	$+$	
		$\cap$	‖	$\cup$	

تقعر سفلي ‖ تقعر علوي

Scanned by CamScanner

5) التقاطع مع المحورين: أي $y'y$ نجد: $x=0 \Rightarrow y=-3$

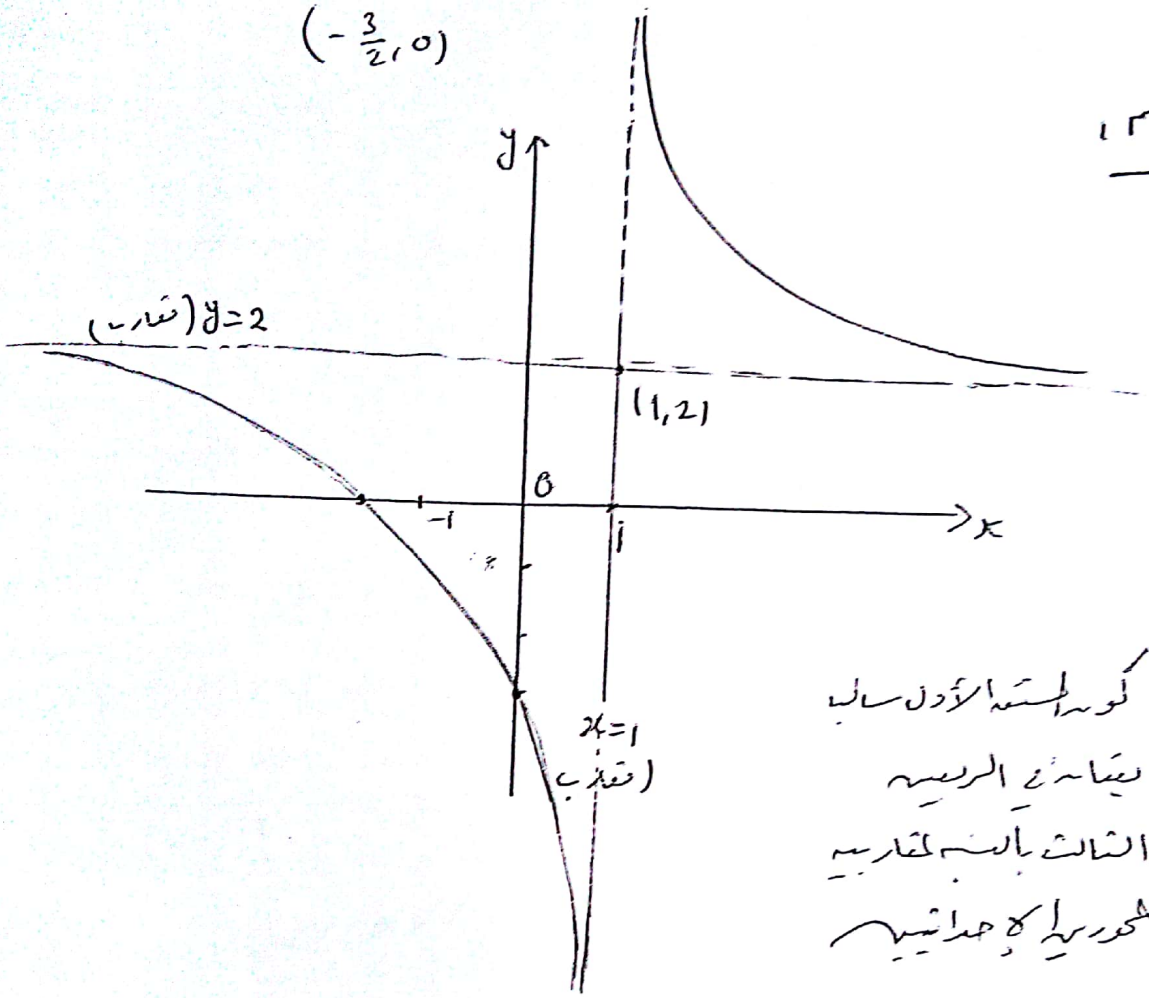
$(0,-3)$

ب) ع $x'x$ نجد:

$y=0 \Rightarrow 2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

$(-\frac{3}{2},0)$

الشكل 116



ملاحظة: كوننا استعملنا الأول سالب فقرناه بقيمة في الرسم الأول والثالث بالنسبة للمقاربة العمودية أو جهة

مثال واجب: 1) حل التابع $y=f(x)=x^2+5x+6$ مقاطع المحاور ومقاربات توازي المحور أو جهة ولماذا؟

ج) ارسم تحولات التابع $y=x^3+1$ ثم ارسم خط البيان

ب) أوجد تقاضيه إذا أعطي $x=2$ $dx=\Delta x=0,3$

ج) ارسم تحولات التابع المرجع ثم $y=\frac{1}{x}$ وارسم خط البيان وبين مقارباته.

Scanned by CamScanner

*) التكامل غير المحدد - خواصه - تطبيقات :

تعريف (التابع الأصلي) : ليكن لدينا التابع $y = f(x)$ والمعرف على المجال $I \subseteq \mathbb{R}$.

نسمي التابع $F = F(x)$ تابعاً أصلياً للتابع f على I ، إذا تحقق : $F'(x) = f(x)$

أي كان $x \in I$ ، أي :

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad ; \quad \forall x \in I$$

مثال : التابع $F(x) = x^4$ تابع أصلي للتابع $f(x) = 4x^3$ لأن $F'(x) = 4x^3 = f(x)$

أي كان $x \in I = \mathbb{R}$.

مبرهنة : إذا كان كل من F ، G تابعاً أصلياً للتابع f فإن :

$$G(x) - F(x) = C \Rightarrow G(x) = F(x) + C$$

أي أن الفرق بين تابعين أصليين لتابع معين يساوي ثابتاً ما.

تعريف (التكامل غير المحدد) : نسمي مجموعة التوابع الأصلية (التي عددها غير منته) للتابع f على المجال I بالتكامل غير المحدد للتابع المفروض.

أي أنه إذا كان F تابعاً أصلياً للتابع f فإن التكامل غير المحدد لـ f هو $F(x) + C$ ، ونرمز للتكامل غير المحدد للتابع f بالرمز :

$$\int f(x)\,dx = \underbrace{F(x) + C}_{\text{مجموع التوابع الأصلية}}$$

($\int$: رمز التكامل غير المحدد ، $f(x)$: التابع المكامل ، dx : متغير الاشتقاق (المتحول) المكامل ، C : ثابت التكامل يقتضيه)

Scanned by CamScanner

مثال: أوجد التكاملات غير المحددة الآتية:

•) $\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + C$

لأنه،

$$\underbrace{\left(2\left(\frac{x^2}{2}\right)+C\right)}_{F(x)+C} = 2x = f(x)$$

•) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

حيث،

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x & ; x > 0 \\ \ln(-x) & ; x < 0 \end{cases}$$

$$(\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; x > 0 \\ \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} & ; \end{cases}$$

ف

-) نتيجة: التكامل غير المحدد هو مجموعة من التوابع، $y = F(x) + C$، وعملية إيجاد التابع الأصلي لتابع تسمى عملية التكامل غير المحدد وهي عملية عكسية للاشتقاق والتفاضل.

مبرهنة (2.1): إذا كان التابع f مستمراً على فترة ما، فإنه يقبل تابعاً أصلياً (أو أكثر) على هذه الفترة (أي يقبل إيجاد التابع الأصلي أو التكامل غير المحدد له على الأقل).

*) خواص التكامل غير المحدد: لنفرض أن f و g تابعان يقبلان تابعاً أصلياً على فترة ما، عندئذٍ يتحقق لدينا:

1) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x)$

أو

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$$

أي مشتقة التكامل غير المحدد لتابع المستكمل f (وتفاضله يساوي المقدار المستكمل).

Scanned by CamScanner

2) $\int d(F(x)) = F(x) + C$

3) $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$

: (تمارين) التكاملات الأساسية

1) $\int 0\,dx = C$, 2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; 3) $\int dx = x + C$, 4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; 5) $\int e^x dx = e^x + C$, 6) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$, 8) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

9) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$, 10) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$; 12) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

$I_1 = \int (4x^3 - 2\cos x + 5\sqrt{x})\,dx$, $I_3 = \int \left(\frac{1-x}{x} + 3^x\right)dx$

$I_2 = \int \left(2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$, $I_4 = \int \left(\sqrt[3]{5x^2} - \frac{1}{\sqrt{5x^2}} + e^{\frac{x}{3}}\right)dx$

$I_1 = 4\int x^3 dx - 2\int \cos x\,dx + 5\int \sqrt{x}\,dx = x^4 - 2\sin x + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

$I_2 = \int (4x + 12 + \frac{9}{x})dx = 2x^2 + 12x + 9\ln|x| + C$

Scanned by CamScanner

$$I_3 = \int \left(\frac{1}{x} - 1 + 3^x\right) dx = \int \frac{dx}{x} - \int dx + \int 3^x dx = \ln|x| - x + \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$I_4 = \int x^{\frac{3}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{5}} \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int e^{-2x} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

- يمكننا إضافة بعض القواعد التي تشبه ما سبق (قاعدة رشاد عادي) وإذا كان $u = u(x)$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x فإن:

$$R_1) \quad \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + C \xrightarrow{\text{مثال}} \int \frac{3x^2}{x^3 - 1} dx = \ln|x^3 - 1| + C$$

$$R_2) \quad \int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = 2\sqrt{u(x)} + C \xrightarrow{\text{مثال}} \int \frac{6x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = 3\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx = 6\sqrt{x^2+1} + C$$

$$R_3) \quad \int u^n(x)\, u'(x)\, dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + C \xrightarrow{\text{مثال}} \int (x^2+x)^9 (2x+1) dx = \frac{(x^2+x)^{10}}{10} + C$$

مثال آخر:

1) $I = \int \frac{dx}{x-5} = \ln|x-5| + C$

2) $I = \int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x| - \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$

في هذا المثال سنعرض طريقة أخرى:

توحيد المقامات: $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$;

بالتعيين: $A = 1,\ B = -1$

(x) يمكننا الوقوف عند النقطة الأخيرة التي يختلف فيها طريقة الحل عن المثال السابق (مشتق المقام).

$$R_4) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \quad R_5) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot\tan x + C$$

$$R_6) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan\frac{x}{a} + C \quad ; \ a \neq 0$$

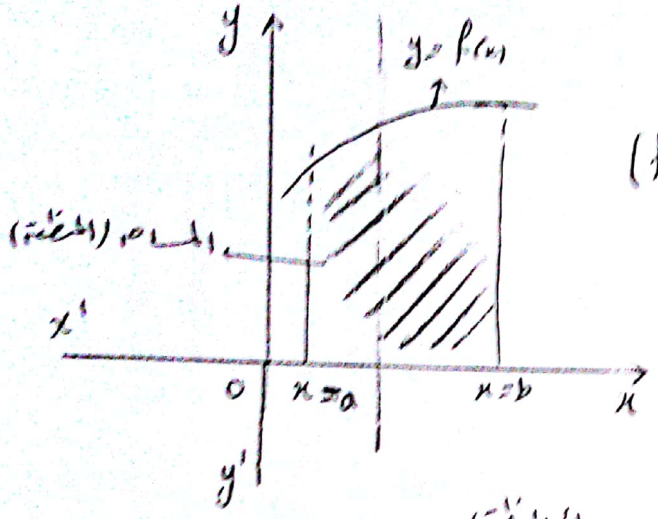
$$R_7) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

Scanned by CamScanner

٨) التكامل المحدد - مفهومه وتطبيقاته :

- التكامل المحدد : ليكن لدينا التابع $y = f(x)$ معرفاً ومحدوداً على الفترة $[a,b]$ $(a<b)$

نريد حساب مساحة المنطقة المحصورة (أو المحددة) بمحور السينات (المحور الديكارتي) التابع المعرف $y=f(x)$ الموجب أي المحصور بين محور السينات ($f(x)\geq 0$) ومحور الأعداد الحقيقية x ومستقيمين موازيين لمحور التراتيب $x=a, x=b$ كما في الشكل المجاور.



لنفرض أننا سنحسب المجموع التكاملي الآتي (بعد تجزئة المساحة المطلوبة (أو المنطقة) الرباعية):

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k \quad ; \quad c_k \in [x_{k-1}, x_k],\ k=1,2,\dots,n$$

حيث $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ طول الفترة a, b على الفترة $[a,b]$.

ولنأخذ نهاية الطرف الأيمن لهذا المجموع عندما $n \to \infty$ (n عدد المجالات الجزئية) بافتراض أن النهاية موجودة ومحدودة وبطريقة هذه النهاية يمكننا عملياً تجزئة الفترة $[a,b]$ إلى عدد اختياري من المجالات الجزئية، بأخذ هذه النهاية نكون قد حددنا مساحة التابع $y=f(x)$ المرسوم على $[a,b]$.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k \quad \cdots (*)$$

حيث هذه النهاية الحاصل التابع f يسمى قابلاً للتكامل (أو كولار) على $[a,b]$ (أو على $x=a$ و $x=b$) والنهاية عددية.

- هندسياً: إذا كان التابع $y=f(x)$ مستمراً وموجباً على الفترة $[a,b]$، فإن التكامل المحدد للتابع f على هذه الفترة يساوي مساحة الشكل المحصور (أو المنطقة المحددة) بين منحنى التابع f والمحور السيني $x'x$ والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ (كما في الشكل السابق).

Scanned by CamScanner

ملاحظة: (1) التكامل المحدد سيتم التعامل ذات الأربع عناصر، وسنتعامل مع التوابع المستمرة (وكذلك التكاملات الموجودة (أي لها حل))

المستمرة في التكاملات، وهو مفيد جدا في تمثيل المساحة المطلوبة جيدا،

$$S = \int_{x=a}^{b} f(x)\,dx$$

(المساحة المطلوبة، الناتج التكاملي، نحو المتغير، حدا التكامل)

(2) التكامل المحدد هو مجموعة توابع لا عددا ثابتا.

*) خواص التكامل المحدد: عرفنا التكامل المحدد من أجل $a<b$ لنا:

1) i) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$, ii) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$; $a>b$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$; $a<c<b$

4) $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx$

5) $m \le f(x) \le M$; $x \in [a,b]$ إذا كان:

فإن:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

*) قواعد حساب التكامل المحدد (أو طرائق حسابه):

القاعدة الأولى (صيغة نيوتن - ليبنتز): وهي تتبع بشكل أساسي في التكامل وتستخدم في حساب التكاملات

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = [F(x)]_{x=a}^{b} = F(b) - F(a) \quad ; \quad F'(x) = f(x) \;\forall x \in [a,b]$$

(الناتج الأصلي لـ f)

أي نقوم أولا بإيجاد التابع الأصلي للتابع التكاملي ثم نعوض فيه الحدين b, a.

مثال: احسب التكاملات الآتية:

1) $I_1 = \int_0^1 (6x^2 + 3x)\,dx$, 2) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

3) $I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

Scanned by CamScanner

(14)

الحل: لنوضح حلول الأصلية للتكامل ثم نحسبه:

1) $I_1 = \left[2x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 = (2+\frac{3}{2}) - 0 = \frac{7}{2}$

2) $I_2 = -\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$

3) $I_3 = \left[\arctan x\right]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$

-) القاعدة الثانية < طريقة تبديل المتغير >: تستخدم هذه الطريقة لتسهيل حساب التكاملات وتشرحها من خلال الأمثلة التالية:

مثال: 1) $I_1 = \int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ ، 2) $I_2 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$ ، 3) $I_3 = \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

الحل:

1) في I_1 نفرض أن:

$$x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$$

ونحسب حدود التكامل الجديدة من خلال هذا الفرض:

$x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{x} = 0$

$x = 9 \Rightarrow t = \sqrt{x} = 3$

بالتعويض:

$$I_1 = \int_0^3 \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = 2\left[t - \ln|1+t|\right]_0^3 = 6 - 2\ln 4$$

2) في I_2 نفرض أن:

$$\ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$$

حدود التكامل:

$x = 1 \Rightarrow t = 0$

$x = e \Rightarrow t = 1$

نعوض نجد:

$$I_2 = \int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

3) في I_3 نفرض أن:

$$x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t\,dt$$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Scanned by CamScanner

بالتعويض في عبارة I_3 نجد،

$$I_3 = \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

ب- القاعدة الثالثة < طريقة التكامل بالتجزئة > : تستخدم هذه الطريقة عندما يكون التابع المكامل جداء تابعين مختلفين (أحدهما صحيح والثاني ...).

إذا كان $u = u(x)$ و $v = v(x)$ تابعين مستمرين مع مشتقاتهما على $[a,b]$، عندئذ

نصح العلاقة

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$$

تسمى دستور التكامل بالتجزئة لتكامل المحدد.

مثال:

1) $I_1 = \int_1^e \ln x\,dx$ ، 2) $I_2 = \int_0^1 x e^{-x}\,dx$ ، 3) $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x\,dx$

الحل:

1) نحسب التكامل I_1 نفرض أن:

$u = \ln x \xrightarrow{\text{نشتق}} du = \frac{dx}{x}$

$dv = dx \xrightarrow{\text{نكامل}} v = x$

نعوض في I_1 لنجد (وهنا لاتوجد حدود التكامل) ثم نطبق دستور التكامل بالتجزئة،

$$I_1 = [x\ln x]_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} = [x\ln x - x]_1^e = 1$$

2) نحسب التكامل I_2 نفرض:

$u = x \Rightarrow du = dv$

$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

نعوض في I_2 ثم نطبق دستور لنجد،

Scanned by CamScanner

$$I_2 = \left[-x e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-1} - e^{-x}\right]_0^1 = -2e^{-1}+1 = \frac{e-2}{2}$$

3) في هذا التكامل نفرض أن:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin x$$

نعوض في I_3 ونطبق الدستور:

$$I_3 = \left[x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx = \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right) + \left[\cos\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

مثال آخر: احسب التكامل الآتي:

$$I = \int_{-1}^{1} |x|\,dx =$$

الحل: بما أن التابع المكامل هو تابع زوجي لأن:

$$\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 2\int_0^1 |x|\,dx = 2\int_0^1 x\,dx \quad \left[x^2\right]_0^1 = 1$$

ونص هذا النتيجة

$$(*) \leftarrow \boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx}$$

إذا كان f تابع زوجي على $[-a,a]$.

مثال آخر: احسب التكامل الآتي:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx =$$

الحل: هنا التابع $f(x) = \sin x$ فردي ولذا فإن:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 0$$

ونص هذه النتيجة:

$$(*) \leftarrow \boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0}$$

حيث f تابع فردي على $[-a,a]$.

Scanned by CamScanner