رياضيات نظرية

قسم الرياضيات / الفصل الدراسي الأول

2018 - 2019

الفصل الأول

المحاضرة (7)

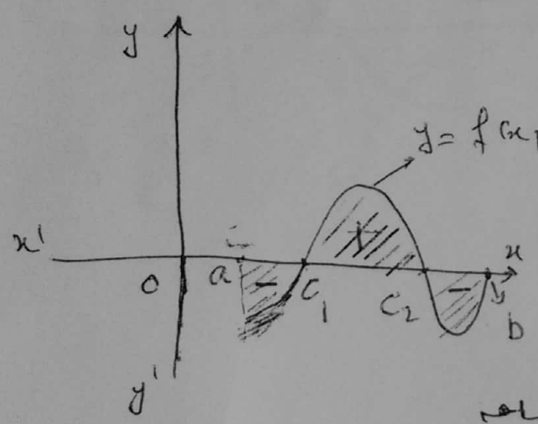
*) تطبيقات التكامل المحدد (الهندسية):

1) حساب مساحة شكل واقع في المستوي: إن مساحة الشكل المحدود (أو المحصور) من الأعلى بالخط البياني للتابع $y=f(x)$ حيث $f(x)\geq 0$ أي أن ($x\in[a,b]$) ومن الأسفل بالمحور السيني $x'x$ ومن الجانبين بالمستقيمين $x=b$ ، $x=a$ تحسب بالعلاقة الآتية:

$$S=\int_a^b f(x)\,dx, \quad \dots (1)$$

-) ولنفرض أن $f(x)<0$ ، فعند حساب المساحة نضرب المقدار الكامل في (-1) أو نضع القيم المطلقة.

ملاحظة: إذا كان التابع $y=f(x)$ يغير إشارته في الفترة $[a,b]$ عدداً منتهياً من المرات فإن الشكل حسابياً بالمساحة تكتب بالصورة (أو بالعلاقة) الآتية:



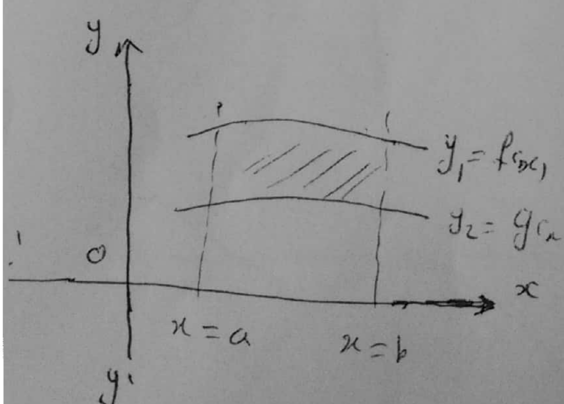
$$S=-\int_a^{c_1} f(x)\,dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx+\int_{c_3}^{b} f(x)\,dx, \quad \dots (2)$$

أي تساوي المجموع الجبري لهذه المساحات.

مطلوب هنا مساحة

2) مساحة الشكل المحدود (أو المحصور) بين منحنيين / الشكل المحصور بين المنحنيين:

$$y_1=f_1(x), \quad y_2=g_2(x) \quad ; \quad f_1(x)\geq g_2(x)$$



والمستقيمين: $x=b$ ، $x=a$ ، كما في الشكل جانباً.

وذلك وفق العلاقة:

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx, \quad \dots (3)$$

ملاحظة: إذا طلب حساب المساحة المحصورة بين منحنيين دون إعطاء الفترة السابقة فنوجد نقاط تقاطعهما بحل مشترك لمعادلتيهما وتكون إحداثيات x لنقاط التقاطع هي حدود التكامل.

أمثلة توضيحية محلولة سعيد

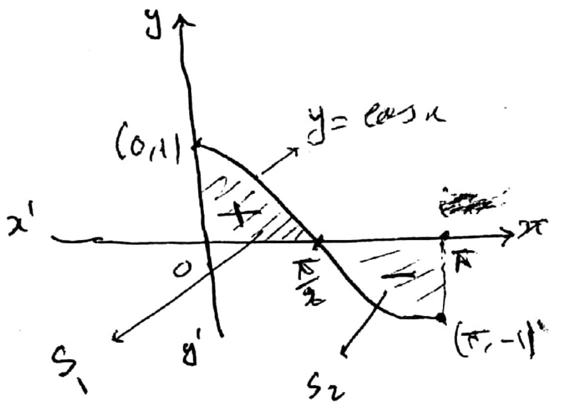
مثال (1): احسب مساحة الشكل المحصور (أو المحدود) بين منحني التابع $y=\cos x$ والمحور السيني $x'x$ بحيث أن: $0\le x\le \pi$ مع الرسم التوضيحي.

الحل: ضمناً كل التكاملات التي نتعرض لها موجودة لأن التوابع التي نتعرض لها تكاملها توابع مستمرة في الفترات المغلقة والمحدودة مثل $[a,b]$.

لاحظ ما يأتي:

$\cos x \ge 0 \; ; x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\cos x \le 0 \; ; x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$

كما في الشكل جانباً.



فإنه لحساب المساحة نطبق العلاقة (2) السابقة.

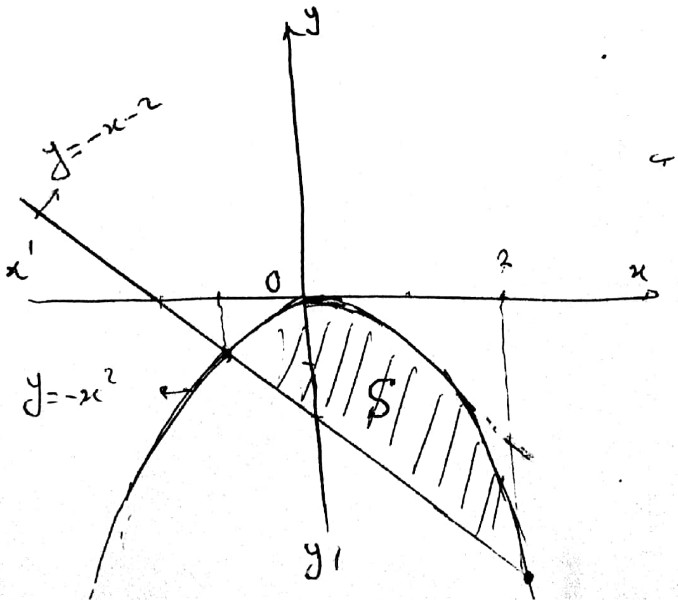
$$S=S_1+S_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx$$

$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}-\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right)=1+1=2$$

وحدة مربع

مثال (2): احسب المساحة المحصورة بين المنحنيين التابعين $y=-x^2$ و المستقيم $y=-x-2$ مع التوضيح بالرسم.



الحل: نرسم أولاً للتوضيح.

ثانياً نحل معادلتي المنحني حلاً مشتركاً لتحديد حدود التكامل المطلوب في المساحة المطلوبة.

$-x^2=-x-2 \Rightarrow$

$x^2-x-2=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0$

$x_1=2$

$x_2=-1$

فهذه حدود التكامل.

نحسب المساحة المطلوبة بالعلاقة (3) نجد:

$$S = \int_{-1}^{2} [-x^2 - (-x-2)]\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \frac{27}{6}$$

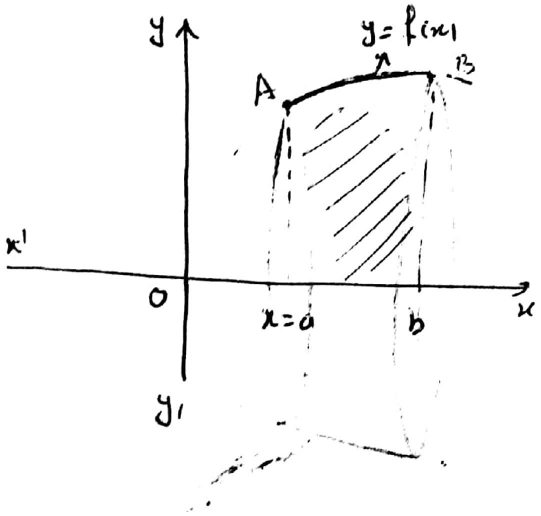
وحدة مربعة.

مثال (3): $\boxed{1}$ أوجد مساحة الشكل المحصور بين المنحنيين اللذين معادلتاهما: $y=\sqrt{x}$ و $y=x^2$

مع التوضيح بالرسم.

$\boxed{2}$ احسب المساحة المحصورة بالمنحنيين: $y=4x-x^2$ و $y=0$ مع الرسم.

3) حساب حجم مجسم دوراني: نفرض أن $y=f(x)$ تابع مستمر في الفترة $[a,b]$.



إذا دار شبه المنحرف المحني a, b, B, A (أي المنطقة المظللة في الشكل) حول المحور السيني $x'x$ دورة كاملة فإن حجم الجسم الناتج عن الدوران يحسب بالعلاقة:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx, \dots (4)$$

ملاحظة: ① إذا كانت المنطقة التي تدور حول $x'x$ محصورة بالمنحنيين:

$$y_1 = f(x), \quad y_2 = g(x) \; ; x \in [a,b]$$

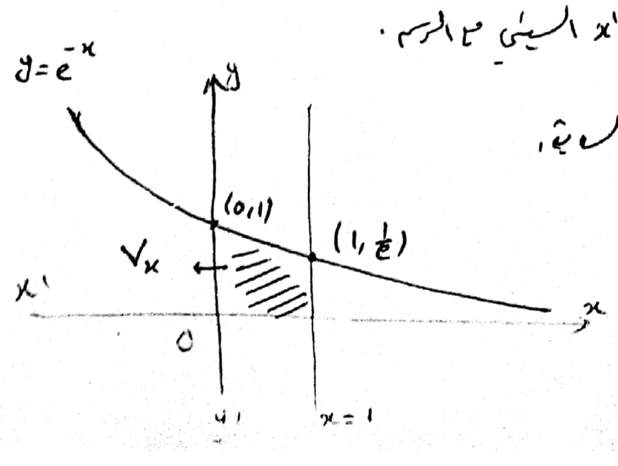
وكان $g(x) \geq f(x)$ فإن الحجم الناتج عن الدوران يحسب بالعلاقة:

$$V_x = \pi \int_a^b [g(x) - f(x)]^2\, dx, \dots (5)$$

② عندما يدور الخط البياني للتابع $y=f(x)$ حول المحور السيني فإنه يشكل سطحاً محدوداً بالسطح الدوراني الناتج عن دوران f والمستقيمين $x=a$ و $x=b$.

مثال (1): احسب الحجم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين الأعلى $y=e^{-x}$

والمستقيمين $x=0$ و $x=1$ حول المحور $x'x$ السيني مع الرسم.



الحل: الحجم الناتج عن الدوران حول $x'x$ يحسب بالعلاقة (4) السابقة.

$$V_x = \pi \int_0^1 (e^{-x})^2\, dx = \pi \int_0^1 e^{-2x}\, dx$$

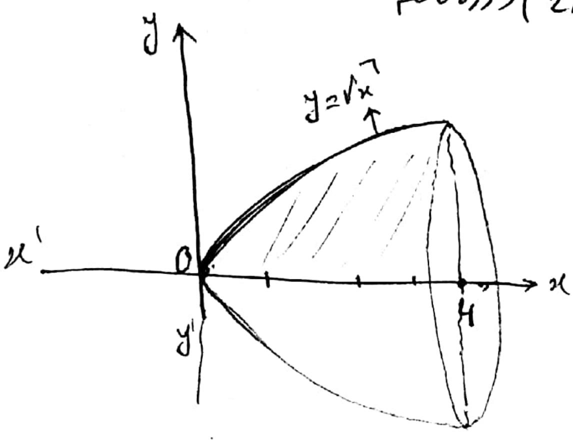
$$= -\frac{\pi}{2}\left[e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{\pi}{2}(e^{-2} - 1)$$

وحدة حجم.

(14)

مثال آخر: أوجد الحجم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة من الأعلى بمنحني التابع $y=\sqrt{x}$ والمستقيمين $x=4$, $x=0$ دورة كاملة حول محور السينات $x'x$ (بزاوية قدرها 2π)

الحل: الحجم الناتج عن الدوران حول $x'x$ (بزاوية 2π) دورة كاملة



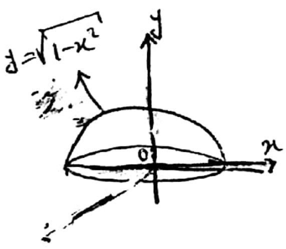
حسب العلاقة (4) أعلاه:

$$V_x = \pi\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{2\pi}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{2\pi}{3}[8-0] = \frac{16\pi}{3}$$

وحدة حجم

ملاحظة: إذا دورنا نصف دائرة مركزها مبدأ الإحداثيات مثلاً ونصف قطرها $R=1$ حول محور السينات دورة كاملة (أي بزاوية 2π) فإن الحجم الناتج عندئذ هو كرة مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها يساوي $R=1$ (نصف قطر الدائرة)، والحجم هو



$$V_x = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4\pi}{3}$$ وحدة حجم

وهو حجم الكرة المعروف لدينا،
ومعادلة الدائرة (نصف الدائرة هنا) هي: $y=\sqrt{1-x^2}$ التابع الذي دورناه حول $x'x$.

أمثلة وتمارين للحل (حول التكاملات المحددة والتطبيقات):

① أوجد التكاملات غير المحددة الآتية:

- $\int 2\sin x\cos x\,dx$
- $\int \ln x\,dx$
- $\int x e^{2x}\,dx$
- $\int x\sin x\,dx$

- $\int\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}\right)dx =$
- $\int (2x-1)^2\,dx =$
- $\int \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)dx =$
- $\int 2e^{3x-1}\,dx =$

Scanned by CamScanner

(5)

② احسب التكاملات المحددة الآتية.

•) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} x \cos x \, dx$

•) $\int_{1}^{e} \ln x \, dx$

•) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$

•) $\int_{0}^{2} \sqrt{2x+1} \, dx$

•) $\int_{0}^{1} e^{6x-10} \, dx$

•) $\int_{-3}^{6} |x| \, dx$

•) $\int_{4}^{6} \frac{-1}{x-3} \, dx$

•) $\int_{-2}^{1} (x^2-4x+3) \, dx$

•) $\int_{1}^{3} \frac{x-4}{x} \, dx$

③ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y=\sqrt{x}$ و $y=x$ والمستقيمين $x=0$
و $x=1$ مع الرسم

④ احسب حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=x^2$ و $y=x$
مع التوضيح بالرسم.

*) ~~تكامل~~ المحددة: التكاملات الكسرية (مستوعبة) وأي للتوابع الكسرية، وهنا البسط والمقام أشكالًا حدود ودرجات مختلفة.

الحالة الأولى: إذا درجة البسط والمقام مختلفة، شرح ذلك بعدة، ونقصد بذلك درجة البسط أكبر من درجة المقام مثل:

$$I=\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+5}\,dx$$

من أجل ذلك نقوم بالتقسيم للبسط على المقام كأننا نتقسم:

$$I=\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+5}=\int_0^1 (x^2-5x+25)+\int_0^1 \frac{-124}{x+5}\,dx$$

ثم نكمل الحل كالآتي.

الحالة الثانية: درجة البسط والمقام متساوية مثلًا.

$$I=\int_0^2 \frac{2x+3}{x+1}\,dx$$

وهنا نقوم بتقسيم البسط على المقام كالعادة نجد

$$I=\int_0^2 \frac{2x+3}{x+1}\,dx=\int_0^2 2\,dx+\int_0^2 \frac{dx}{x+1}=[2x]_0^2+[\ln(x+1)]_0^2$$

نعوض ونكمل ـــ

الحالة الثالثة: درجة البسط أقل من درجة المقام: نفذ ذلك من خلال التكاملات:

$$I_1=\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\,dx\ ,\qquad I_2=\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$$

الحل: لننفذ الأمر من أجل التكامل (I_1) والثاني ينفذه الطالب بنفسه كتمرين منزلي.

هنا درجة البسط أقل من المقام وهنا لذا سنفرق المقام في الكسر إلى جداء مضاريب من الدرجة الأولى وذلك من الشكل.

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+2}=\frac{2x+1}{(x+2)(x+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}=$$

بعد حساب الثابتات وحل المعادلات نحصل على A و B نجد $A=3$ ، $B=-1$ ، نعود للتكامل

أكمله بنفسه.

$$I_1=\int_0^1 \text{——}\,dx=3\int_0^1 \frac{dx}{x+2}-\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

بحساب التكاملات نجد:

$$I_1 = 3\left[\ln(x+2)\right]_0^1 - \left[\ln(x+1)\right]_0^1 = 3\ln 3 - 4\ln 2 = \ln 27 - \ln 16 = \ln\frac{27}{16}$$

ب) نفذ التكامل I_2 كتمرين منزلي (يترك للطالب).

*) التكاملات المعتلة (أو الشاذة): في دراسة التكاملات المحددة السابقة كانت حدود التكاملات a و b منتهية (أعداد) والتابع مستمر وسنوسع مفهوم هذه التكاملات إلى أن يكون أحد حدود التكامل أو كلاهما غير منتهية مثل: $+\infty$ ، $-\infty$ ، وهذه التكاملات تعرف بالمعتلة (أو الشاذة).

1) التكاملات المعتلة من النوع الأول / (فقط هذا النوع سندرس) /

لنفرض أن التابع معرف في الفترة (أو المجال) $[a,+\infty[$ ، والتكامل المطلوب دراسته يكون من الشكل:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx}$$

ونسميه التكامل المعتل من النوع الأول ونكتفي به.

والدراسة تتم بالصورة:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

الآن، إذا كانت النهاية محدودة (أو منتهية) نقول عندئذ إن التكامل المعتل من النوع الأول موجود أو متقارب، وغير ذلك يكون التكامل متباعد أو غير موجود.

ملاحظة: تتم دراسة التكاملات من نوع (أو شكل): $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ و $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ بنفس الطريقة السابقة وسوف لن نتعرض لها في هذا الفصل.

مثال (1): ادرس تقارب التكاملات الآتية:

$$I_1 = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}, \quad I_2 = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$$

الحل: من أجل I_1 لدينا:

$$I_1 = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^b = -\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right]_1^b = -\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{b}-1\right]$$

$$= -(0-1) = 1$$

وهذا تكامل متقارب لأن ناتج النهاية محدودة ، أي يتقارب من العدد 1.

ومن أجل I_2 يكون:

AU SYRIA
Al Andalus University

الفصل الأول الدراسي

2018
2019

تقديم أ. رياضي

المحاضرة الثامنة

المحددات والمصفوفات

درسنا في المحاضرات السابقة التوابع ومشتقاتها وتكاملاتها غير المحدودة والمحدودة وسنتابع في هذه المحاضرة التعرف على بعض المواضيع الرياضية الأخرى كالمعينات وأنواعها والمصفوفات وأنواعها ثم نقوم بدراسة بعض خواصها والعمليات الجبرية المعرفة عليها مع إعطاء بعض الأمثلة.

1. المعينات (المحددات)

المعين (أو المحدد) من الدرجة (المرتبة) n هو $n \times n$ عنصرا مرتبة في n سطر و n عمود وموضوعة بين خطين متوازيين من الشكل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ويرمز له بشكل مختزل: $\Delta = |a_{ij}|_n$

حيث أنه في a_{ij} يرمز الدليل الأول لرقم السطر والدليل الثاني لرقم العمود الذي يقع فيه العنصر a_{ij}.

وتسمى العناصر الواقعة على القطعة المستقيمة الواصلة بين الزاوية العليا اليسرى والزاوية السفلى اليمنى عناصر **القطر الرئيسي** بينما تسمى العناصر الواقعة على القطعة المستقيمة الواصلة بين الزاوية العليا اليمنى والزاوية السفلى اليسرى عناصر **القطر الثانوي**.

أمثلة:

$$|3| \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

معين من الدرجة الأولى   معين من الدرجة الثانية   معين من الدرجة الثالثة

1- بعض أنواع المعينات (أو المحددات) م

1- المعين المثلثي العلوي: هو معين تكون جميع العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي مساوية للصفر
أ/ المحدد

مثل

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

2- المعين المثلثي السفلي: هو معين تكون جميع العناصر الواقعة أعلى القطر الرئيسي مساوية للصفر مثل
أ/ المحدد

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

3- المعين القطري: هو معين تكون جميع العناصر غير الواقعة على القطر الرئيسي مساوية للصفر مثل
أ/ المحدد

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

4- المعين الواحدي:
المحدد
وهو معين قطري جميع العناصر القطرية فيه مساوية للواحد.

2- قيمة معين (أ) محدد)

1- حساب قيمة معين من الدرجة الأولى:
محدد

$$\Delta = |a_{11}| = a_{11}$$

2- حساب قيمة معين من الدرجة الثانية:
محدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3- حساب قيمة معين من الدرجة الثالثة:
محدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

بحسب عناصر السطر الأول نجد:

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(a_{22}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{32})+a_{12}(a_{23}\cdot a_{31}-a_{21}\cdot a_{33})$$

$$+a_{13}(a_{21}\cdot a_{32}-a_{22}\cdot a_{31})$$

هذه القيمة لا تتغير بتغير السطر أو العمود وتسمى بصيغة سيروس لحساب قيمة معين من الدرجة الثالثة.

ملاحظة: قيمة معين مثلثي علوي أو مثلثي سفلي أو قطري تساوي جداء العناصر الواقعة على القطر الرئيسي مثل:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\times 4\times 6 = 24$$

4- خواص المعينات (أو المحددات)

1- إذا كان أحد الأسطر (أو أحد الأعمدة) في معين مساوٍ للصفر فإن قيمة المعين تساوي الصفر.

2- المبادلة بين سطرين أو عمودين تغير إشارة قيمة المعين فقط.

3- إذا تساوى سطران (أو عمودان) في معين فإن قيمة المعين تساوي الصفر.

4- إذا ضرب أحد الأسطر (أو أحد الأعمدة) بعدد λ فإن قيمة المعين بعد الضرب تساوي جداء العدد λ في قيمته قبل الضرب.

مثال 1:

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 4.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

5- إذا تناسب سطران (أو عمودان) في معين فإن قيمة المعين تساوي الصفر.

4- اشتقاق المعينات (أو المحددات)

ليكن المعين:

$$\Delta = |a_{ij}|_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

حيث عناصر المعين $i=1,2,\dots,n\,,\,j=1,2,\dots,n$ توابع لمتحول واحد ما x وبالتالي فإن قيمة المعين هذا تكون تابعة للعنصر x ويمكن حساب مشتقها Δ' إن Δ' يعطى بالدستور

$$\Delta' = \Delta'_1 + \Delta'_2 + \dots + \Delta'_n$$

حيث $i = 1,2,\dots,n$ ، Δ'_i هو معين أسطره (أعمدته) نفس أسطر (أعمدة) Δ ما عدا السطر i (العمود) عناصره هي مشتقات عناصر السطر i (العمود) في المعين Δ أي أن:

مثال 5: إذا فرضنا أن:
$$\Delta = \begin{vmatrix} x & \cos x \\ x^2 & 2x \end{vmatrix}$$

نجد أن:
$$\Delta = 2x^2 - x^2 \cos x$$
$$\Delta' = 4x - 2x\cos x + x^2 \sin x$$

ونجد بتطبيق الدستور أعلاه في اشتقاق معين أن:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & -\sin x \\ x^2 & 2x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & \cos x \\ 2x & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta' = 2x + x^2 \sin x + 2x - 2x\cos x$$
$$\Delta' = 4x - 2x\cos x + x^2 \sin x$$

أو

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & \cos x \\ 2x & 2x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & -\sin x \\ x^2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta' = (2x - 2x\cos x) + (2x + x^2 \sin x)$$
$$\Delta' = 4x - 2x\cos x + x^2 \sin x$$

2. المصفوفات

تعريف المصفوفة

المصفوفة من الدرجة $n \times m$ هي $n.m$ عنصر مرتبة في n سطراً و m عموداً فإذا رمزنا لهذه المصفوفة بـ A عندئذ تكتب بالشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

وأحياناً يرمز لهذه المصفوفة بالشكل المختصر:

$$A = [a_{ij}]_{n,m} \quad \text{أو} \quad A = [a_{ij}]$$

تسمى المصفوفة من الشكل $1\times m$ بمصفوفة سطر، والمصفوفة من الشكل $n\times 1$ مصفوفة عمود.

المصفوفة المربعة: الحالة الخاصة إذا كانت $n = m$، تسمى المصفوفة A مصفوفة مربعة وتسمى n درجتها.

يرفق بكل مصفوفة مربعة عدد من طبيعة أعداد المصفوفة يرمز له بـ $\det A$ (أو Δ) ويسمى معين (أو محدد) المصفوفة المربعة A حيث:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

إذا كان $\det A = 0$ فإن المصفوفة المربعة A تسمى **مصفوفة شاذة أو فريدة** وإذا كان $\det A \neq 0$ فإن المصفوفة A تسمى **مصفوفة نظامية**، تسمى العناصر الواقعة على القطعة المستقيمة بين الزاوية اليسرى العليا والزاوية اليمنى السفلى **عناصر القطر الرئيسي** ويسمى مجموع هذه العناصر أثر المصفوفة A ويرمز له بـ $tr\,A$ أي:

A أثر مصفوفة ← $\boxed{tr\,A = a_{11} + a_{22} + \ldots\ldots + a_{nn}}$

منقول مصفوفة:

إذا كانت A مصفوفة فإننا نسمي المصفوفة A^T منقول المصفوفة A أي أن A^T تنتج من A باستبدال الأسطر بالأعمدة فمثلاً إذا فرضنا أن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{فإن} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن: $\det A = \det A^T$

- **بعض أنواع المصفوفات:**

1- المصفوفة القطرية:

لتكن $A=\left[a_{ij}\right]$ مصفوفة مربعة تحقق الخاصة التالية $a_{ij}=0$، إذا كان $i \neq j$ عندئذٍ تسمى هذه المصفوفة مصفوفة قطرية، حيث:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

ويكون: $\det A = a_{11}a_{22}\ldots.a_{nn}$

2- المصفوفة الواحدية:

إذا تساوت جميع عناصر القطر الرئيسي في مصفوفة قطرية الـ 1 فإن المصفوفة تسمى المصفوفة الواحدية ويرمز لها بـ I_n (أو I إذا كان لا يوحد التباس) ويكون:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots 1 \end{bmatrix}$$

إن: $\det I = 1$.

3- المصفوفة المثلثية:

1) تسمى المصفوفة التي جميع عناصرها الواقعة تحت عناصر القطر الرئيسي مساوية للصفر مصفوفة مثلثية عليا.

2) تسمى المصفوفة التي جميع عناصرها الواقعة أعلى عناصر القطر الرئيسي مساوية للصفر مصفوفة مثلثية سفلى.

4- المصفوفة الصفرية:

إذا كانت جميع عناصر المصفوفة المؤلفة من n سطراً و m عموداً معدومة (مساوية للصفر) فإنها تسمى المصفوفة الصفرية أو المصفوفة المعدومة ويرمز لها بـ $0_{n,m}$:

$$0_{n,m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}_{n,m}$$

$$B=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1\times5+2\times7 & 1\times6+2\times8\\ 3\times5+4\times7 & 3\times6+4\times8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}5\times1+6\times3 & 5\times2+6\times4\\ 7\times1+8\times3 & 7\times2+8\times4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23 & 34\\ 31 & 46\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $AB \neq BA$.

إن جداء مصفوفتين يحقق الخواص التالية:

$$\det(AB)=\det A.\det B$$

حيث A و B و C مصفوفات.

إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن $I.A=A.I=A$ حيث سعة I من سعة A.

مثال4 :

إذا فرضنا أن: $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

نجد أن:

$$B^T=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix} \quad , \quad A^T=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

وأن:

$$A.B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 7\\ 6 & 3 & 9\\ -2 & -3 & -1\end{bmatrix}$$

إن:

$$(A.B)^T=\begin{bmatrix}4 & 6 & -2\\ 1 & 3 & -3\\ 7 & 9 & -1\end{bmatrix}$$

وهل $(A.B)^T = B^T.A^T$ وهي خاصية من خواص منقول مصفوفة

2018
2019

تابع للمحاضرة (8) - تقنيات الحاسوب

ب- المتتاليات العددية
(متتاليات الأعداد الحقيقية)

1.2 – تعاريف :

تعريف 1 : تعرف المتتالية العددية،بأنها تطبيق من N في $\Re$ ،أي:

$$f : N = \{1,2,........\} \to \Re =]-\infty,+\infty[$$
$$n \to f(n)$$

الزوج المرتب $(n, f(n))$ يسمى الحد النوني،أو الحد العام من المتتالية $f : N \to \Re$ ،ويرمز له بالرمز a_n .

والزوج المرتب $(1, f(1))$ يسمى الحد الأول من المتتالية f ،ويرمز له بالرمز a_1 .

يرمز للمتتالية f بالرمز $(a_n)_{n\geq 1}$ ،أو $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ ، أو $a_n \quad , n = 1,2......$

- العدد الطبيعي n يسمى رقم،(رتبة) الحد a_n من المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$.
- العدد الحقيقي $f(n)$ يسمى قيمة الحد من المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$.

ملاحظة :

أ- مجموعة حدود المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ غير منتهية وقابلة للعد.

ب- مجموعة قيم المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ قد تكون منتهية.

أمثلة :

ا-لتكن المتتالية التالية :

$$f : N \to \Re$$
$$n \to f(n) = (-1)^n$$

مجموعة حدودها هي :

$$\{ a_1, a_2, ..., a_n, ...\} \equiv \{ (1,(-1)^1), (2,(-2)^1), ..., (n,(-1)^n), ...\} \equiv$$
$$\{ (1,-1), (2,1), (3,-1), ..., (n,(-1)^n), ...\}$$

وهي مجموعة غير منتهية وقابلة للعد.

مجموعة قيمها هي :

$$\{f(1), f(2), ...f(n).....\} = \{(-1)^1, (-1)^2, ...(-1)^n, ...\} = \{-1,1\}$$

وهي مجموعة محدودة.

ب- لتكن المتتالية التالية :

$$f : N \to \Re$$
$$n \to f(n) = n^2$$

مجموعة حدودها هي :

$$\{a_1, a_2, ...a_n, ...\} \equiv \{(1,1^2), (2,2^2), ...(n,n^2), ...\} \equiv$$
$$\{(1,1), (2,4), (3,9), ..., (n,n^2), ...\}$$

وهي مجموعة غير منتهية وقابلة للعدد.

مجموعة قيمها هي :

$$\{f(1), f(2), ..., f(n), ...\} \equiv \{1,4,9........n^2, ...\}$$

وهي مجموعة غير منتهية.

تعريف 2 :أحياناً تعرف المتتالية بمعرفة صيغة تراجعية، تمكننا من معرفة أي حد من حدود المتتالية،إذا عرفنا الحد الذي قبله أو بعده. يسمي هذا النوع من المتتالية بالمتتاليات التراجعية.

في الحالة العامة لمعرفة المتتالية التراجعية يكفي أن نعرف :

أ- الحد الأول a_1 من المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$.

ب- صيغة تراجعية تربط بين الحد a_{n-1} والحد a_n ، $n = 2,3........$.

أمثلة :

أ- المتتالية الحسابية ذات الأساس d،تكتب حدودها وفق الصيغة التراجعية التالية :

$$a_n = a_{n-1} + d, \qquad n = 2,3..... \qquad (*)$$

بمعرفة الحد الأول a_1 نعرف جميع حدود المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ وفق للصيغة $(*)$، عندها يكون:

$$n = 2,3....... \qquad , \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

ب- المتتالية الهندسية ذات الأساس d،تكتب حدودها وفق الصيغة التراجعية التالية :

$$a_n = a_{n-1} \cdot d \qquad n = 2,3....... \qquad (**)$$

بمعرفة الحد الأول a_1 نعرف جميع حدود المتتالية (a_n) وفق الصيغة $(**)$ ، عندها يكون:

$$a_n = a_1 \cdot d^{n-1} \qquad n = 2,3........$$

تعريف 3 : لتكن $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ متتاليتين،و m عددا ما.

أ- يعرف ضرب المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ بالعدد m، بالمتتالية $\{ma_1, ma_2, ...\}$، ونكتب:

$$m(a_n)_{n\geq 1} = (ma_n)_{n\geq 1}$$

ب- يعرف جمع، طرح المتتاليتين $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$، بالمتتالية $\{a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, ...\}$،ونكتب:

$$(a_n)_{n\geq 1} \pm (b_n)_{n\geq 1} = (a_n \pm b_n)_{n\geq 1}$$

ج- يعرف ضرب المتتاليتين $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$، بالمتتالية $\{a_1b_1, a_2b_2, ...\}$، ونكتب :

$$(a_n)_{n\geq 1} \cdot (b_n)_{n\geq 1} = (a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$$

د- تعرف قسمة المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ على المتتالية $(b_n)_{n\geq1}$، حيث $b_n \neq 0$, $n \geq 1$

بالمتتالية $\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots\ldots\ldots\right\}$، ونكتب : $\frac{(a_n)_{n\geq1}}{(b_n)_{n\geq1}} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq1}$

2.2 – نهاية المتتالية :

لتكن $(a_n)_{n\geq1}$ متتالية عددية و ℓ من $\Re$

تعريف أ : نقول إن العدد ℓ نهاية لمتتالية $(a_n)_{n\geq1}$، إذا كان من أجل كل ε موجب تماماً من $\Re$، يوجد رقم n_ε من N، بحيث من أجل كل n من N، n أكبر أو تساوي n_ε تتحقق المتراجحة $|a_n - \ell| < \varepsilon$، ونكتب :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$

وفقا للرموز المنطقية نكتب :

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \ell\right) \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathrm{N} / \forall n \geq n_\varepsilon \to |a_n - \ell| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathrm{N} / \forall n \in N, [n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon\right)$$

تعريف ب : نقول إن المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ متقاربة ،إذا وجدت لها نهاية منتهية، أي:

$$\left(\text{متقاربة } (a_n)_{n\geq1}\right) \Leftrightarrow \left(\exists\ell \in \Re / \forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N / \forall n \geq n_\varepsilon \to |a_n - \ell| < \varepsilon\right) \qquad -(*)$$

تعريف ج : نقول إن المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ ليست متقاربة، إذا لم يتحقق الشرط (*) أي:

$$\forall\ell \in \Re \to \lim_{n\to\infty} a_n \neq \ell$$

ونكتب:

$$\left(\text{ليست متقاربة } (a_n)_{n\geq1}\right) \Leftrightarrow \left(\forall\ell \in \Re, \exists\varepsilon_0 > 0 / \forall k \in \mathrm{N} / \exists n_0 \geq k / |a_{n_0} - \ell| \geq \varepsilon_0\right)$$

نتيجة : من المتراجحة $|a_n - \ell| < \varepsilon$، نستنتج أن $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$ ، أي:

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \ell\right) \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N, \forall n \geq n_\varepsilon \to a_n \in V_\varepsilon(\ell)\right)$$

وبالتالي العدد ℓ يكون نهاية للمتتالية $(a_n)_{n\geq1}$، إذا وفقط إذا كان من أجل كل ε، $(\varepsilon > 0)$، يوجد بداء من رتبة معينة عدد غير منته من حدود المتتالية في الجوار $V_\varepsilon(\ell)$.

تنبيه : وجود عدد غير منته بداء من رتبة معينة، يعني أن كل الحدود التي رتبتها أكبر من أو تساوي هذه الرتبة موجودة في الجوار $V_\varepsilon(\ell)$.

أمثلة :

أ – لتكن المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ حيث: $n \geq 1, \quad a_n = \frac{n-1}{n}$

نتأكد حسب التعريف أن $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ ، أي نتحقق من أنه:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathrm{N} / \forall n \geq n_\varepsilon \to |a_n - 1| < \varepsilon$$

نبحث عن وجود n_ε

عندنا $|a_n-1|=\left|\frac{n-1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$

لاحظ أنه إذا كان $\frac{1}{n}<\varepsilon$ ، فإن $|a_n-1|<\varepsilon$ ،وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>\frac{1}{\varepsilon}$ ، تتحقق

~~المتراجحة $|a_n-1|<\varepsilon$~~ .

أي لو نأخذ مثلا $n_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ ، يكون:

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in N/\forall n\geq n_\varepsilon\rightarrow|a_n-1|<\varepsilon$$

أي: $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

~~ب- لتكن المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ حيث: $a_n=n\ ,\ n\geq1$~~

نتأكد حسب التعريف أن $(a_n)_{n\geq1}$ ليست متقاربة ،أي:

$$\forall\ell\in\Re,\exists\varepsilon_0>0/\forall k\in\mathrm{N},\exists n_0\geq k/\left|a_{n_0}-\ell\right|\geq\varepsilon_0$$

حسب أرخميدس من أجل كل ε ،$(\varepsilon>0)$ ،(في الحالة الخاصة $\varepsilon=1$)،ومن أجل كل ℓ من $\Re$ يوجد عدد طبيعي n_0

يحقق $n_0>\ell+1$.

لاحظ أنه:

$$\forall n>n_0\rightarrow n>\ell+1$$

بما أن $n=a_n$ ، فإن هذا يعني أن ℓ ليست نهاية للمتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ ،أي المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ متباعدة.

ج- لتكن المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ حيث: $a_n=(-1)^n\ ,\ n\geq1$.

تأكد باستعمال التعريف عن طريق الجوار،أن $(a_n)_{n\geq1}$ ليست متقاربة.

نظرية : نهاية المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ إن وجدت،تكن وحيدة.

البرهان :

نفرض أن للتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ نهايتين b,a ،$(a\neq b)$.

ليكن $V_\varepsilon(a)$ ،$V_\varepsilon(b)$ ،ε -جوارا للنقطة b,a على التوالي.

لاحظ من أجل $\varepsilon=\frac{b-a}{3}$ ،$(b>a)$ ، يكون: $V_\varepsilon(a)\cap V_\varepsilon(b)=\phi$.

(في حالة $a<b$ نأخذ $\varepsilon=\frac{a-b}{3}$).

عندنا

$$\lim a_n=a\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists n_\varepsilon\in\mathrm{N}/\forall n\geq n_\varepsilon\rightarrow a_n\in V_\varepsilon(a)\qquad(*)$$

من أجل $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$ العبارة (*) صحيحة، أي أن الجوار $V_\varepsilon(a)$ حيث $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$ يحوى عدداً غير منته من حدود المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$، أي أن الحدود الواقعة خارج الجوار $V_\varepsilon(a)$ ، $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$ عددها منته،وعلى هذا الأساس الجوار $V_\varepsilon(b)$ ، $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$ يحوى عددا منته فقط من حدود المتتالية، هذا حسب النتيجة فقرة 2.2 مناف لكون b نهاية للمتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$. وعليه إما أن تكون b ليست نهاية، وإما $a=b$. أي النهاية وحيدة.

3.2 –المتتالية المحدودة :

لتكن $(a_n)_{n\geq 1}$ متتالية عددية .

1.3.2 – تعاريف :

أ- نقول إن المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ محدودة من الأسفل، إذا كانت مجموعة قيمها محدودة من الأسفل، أي :

$$\exists c_1 \in \Re / \ \forall n \in \mathrm{N} \to a_n \geq c_1$$

حيث a_n نعني بها قيمة الحد a_n، أي أصل الكتابة هو :

$$\exists c_1 \in \Re / \ \forall n \in \mathrm{N} \to f(n) \geq c_1$$

ب- نقول إن المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ محدودة من الأعلى، إذا كانت مجموعة قيمها محدودة من الأعلى، أي:

$$\exists c_2 \in \Re / \forall n \in \mathrm{N} \to a_n \leq c_2$$

ج- نقول إن المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ محدودة ،إذا كانت محدودة من الأسفل ومن الأعلى، أي :

$$\exists c_1, c_2 \in \Re / \ \forall n \in \mathrm{N} \to c_1 \leq a_n \leq c_2$$

نتيجة : تكون المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ محدودة، إذا وفقط إذا يحقق:

$$\exists c \in \Re / \ \forall n \in \mathrm{N} \to |a_n| \leq c$$

أمثلة :

أ- المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ حيث: $a_n = n \quad , \quad n = 1,2....$

محدودة من الأسفل ،لكن ليست محدودة من الأعلى.

ب- المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ حيث: $a_n = -n \quad , \quad n = 1,2....$

محدودة من الأعلى ،لكن ليست محدودة من الأسفل.

ج- المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ حيث: $a_n = \dfrac{1}{n} \quad , \quad n = 1,2....$ ، محدودة.

نظرية : كل متتالية متقاربة، تكون محدودة.

البرهان : المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ متقاربة يعني :

$$\exists \ell \in \Re / \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N / \forall n \geq n_\varepsilon \to |a_n - \ell| < \varepsilon \qquad (*)$$

لاحظ من أجل $\varepsilon = 1$ ،$(*)$ صحيحة، أي:

$$\exists n_1 \in N / \forall n \geq n_1 \to |a_n - \ell| < 1$$

عندنا :

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| < 1 + |a|$$

لاحظ بأخذ $c = \max(1 + |a|, |a_1|, ...|a_{n-1}|)$ ، نحصل على المتراجحة $|a_n| < c$ من أجل كل n.

قضية : عكس النظرية في الحالة العامة غير صحيح، أي ليس كل متتالية محدودة متقاربة.

مثال : المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ حيث $a_n = (-1)^n$, $n = 1,2....$

~~محدودة لأن مجموعة قيمها $\{-1,1\}$ محدودة، لكنها حسب المثال ج فقرة 2.2 ليست متقاربة.~~

2.3.2 – الحد الأعلى والحد الأدنى للمتتالية :

تعريف :

أ- يعرف الحد الأعلى للمتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$، بأنه الحد الأعلى لمجموعة قيمها، ويرمز له بالرمز $\sup(a_n)_{n\geq 1}$،ونكتب :

$$\left.\begin{cases} \forall n \in N \to a_n \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N \quad / a_{n_\varepsilon} > M - \varepsilon \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \{M = \sup(a_n)_{n\geq 1}\}$$

ب- يعرف الحد الأدنى للمتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$،بأنه الحد الأدنى لمجموعة قيمها، ويرمز له بالرمز $\inf(a_n)_{n\geq 1}$،ونكتب:

$$\left.\begin{cases} \forall n \in N \to a_n \geq m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N / a_{n_\varepsilon} < m - \varepsilon \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \{m = \inf(a_n)_{n\geq 1}\}$$

4.2 – المتتاليات اللامتناهية في الصغر، والمتتاليات اللامتناهية في الكبر :

1.4.2 – المتتاليات اللامتناهية في الصغر :

تعريف : نقول إن المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ لا متناهية في الصغر، إذا كانت : $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ، أي :

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in N / \forall n \geq n_\varepsilon \to |a_n| < \varepsilon$$

نتيجة1 : تكون المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو العدد a من $\Re$ إذا وفقط إذا كانت المتتالية $(b_n)_{n\geq 1}$،حيث: $b_n = a_n - a$ $n = 1,2.....$، لا متناهية في الصغر.

البرهان :

$[\Leftarrow]$ عندنا $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ تعني أن :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N / \forall n \geq n_\varepsilon \to |a_n - a| < \varepsilon$$

هذا يعني مباشرة أن :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow |b_n| < \varepsilon$$

ومنه تكون $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

$[\Rightarrow]$ عندنا $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ تعني أن :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

ومنه تكون $\lim\limits_{n\to\aleph} a_n = a$.

مثال :لتكن المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$، حيث: $a_n = \dfrac{n-1}{n}$ $n = 1,2......$

وجدنا في المثال (أ) فقرة 2.2 ، أن: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

لاحظ أن المتتالية $(b_n)_{n\geq 1}$ ،حيث، $b_n = a_n - 1$ $n = 1,2......$ ،متتالية لا متناهية في الصغر ،أي: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

نظرية :

أ- إذا كانت $(a_n)_{n\geq 1}$ ، $(b_n)_{n\geq 1}$ متتاليتين لا متناهيتين في الصغر، فإن المتتالية $(a_n \pm b_n)_{n\geq 1}$ لا متناهية في الصغر.

ب- إذا كنت المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ لا متناهية في الصغر،والمتتالية $(b_n)_{n\geq 1}$ محدودة،فإن المتتالية $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ لا متناهية في الصغر.

البرهان :

أ- نبرهن أن المتتالية $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ لا متناهية في الصغر، أي نبرهن:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow |a_n + b_n| < \varepsilon$$

عندنا : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ، $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ ، أي :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \geq n'_\varepsilon \rightarrow |a_n| < \varepsilon \qquad (1)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \geq n''_\varepsilon \rightarrow |b_n| < \varepsilon \qquad (2)$$

واضح أنه يمكن كتابت $(1),(2)$ كالتالي :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \geq n'_\varepsilon \rightarrow |a_n| < \varepsilon/2 \qquad (1)'$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \geq n''_\varepsilon \rightarrow |b_n| < \varepsilon/2 \qquad (2)'$$

لاحظ أنه من أجل كل n أكبر أو يساوي n_ε ، حيث $n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$ ،تتحقق المتراجحتين

$|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $|b_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ في آن واحد، هذا يعني أنه بجمع $(1)'$ و $(2)'$ نحصل على:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon) / \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow |a_n| + |b_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

من خصائص القيمة المطلقة ينتج أن :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon) / \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow |a_n + b_n| < \varepsilon$$

ب- نبرهن أن المتتالية $(a_n b_n)_{b\geq1}$ لا متناهية في الصغر، أي نبرهن:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N / \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow |a_n b_n| < \varepsilon$$

بماأن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ و $(b_n)_{b\geq1}$ محدودة،فإن

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in N / \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow |a_n| < \varepsilon \qquad (1)$$

$$\exists M \in \Re^* / \forall n \in N \rightarrow |b_n| \leq M \qquad (2)$$

كما في -أ- يمكن كتابة -1- على الشكل

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in N / \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow |a_n| < \varepsilon/_M \quad , \quad (M \neq 0) \qquad (1)'$$

وأيضا من (2) نستنتج أن :

$$\forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow |b_n| \leq M \qquad (2)'$$

بضرب $(1)'$ في $(2)'$ نحصل على:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon = n'_\varepsilon / \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M}.M = \varepsilon$$

من خصائص القيمة المطلقة يكون :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N / \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow |a_n b_n| < \varepsilon$$

نتيجة 2: إذا كانت $(a_n)_{n\geq1}$ ، $(b_n)_{n\geq1}$ متتاليتين لا متناهيتين في الصغر و γ عدداً حقيقياً، فإن:

أ- المتتالية $(a_n b_n)_{b\geq1}$ ،لا متناهية في الصغر.

ب- المتتالية $(\gamma a_n)_{b\geq1}$ ،لا متناهية في الصغر.

2.4.2 – المتتاليات اللامتناهية في الكبر :

تعريف : نقول إن المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ لا متناهية في الكبر، إذا كانت :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \ (-\infty \text{ أو } +\infty)$$

هذا يعني أن:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N / \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow |a_n| > \varepsilon \qquad (1)$$

أو

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N / \forall n \geq n_\varepsilon \rightarrow a_n \in V_\varepsilon(\infty)$$

حيث $V_\varepsilon(\infty)$ يعني ε -جوار للما لا نهاية،أي:

$$V_\varepsilon(\infty) = \{x \in \Re / |x| > \varepsilon\} \qquad (2)$$

نتيجة :

أ- من العبارة (1) ينتج أن:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \{\forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n'_\varepsilon \rightarrow a_n > \varepsilon\}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \{\forall \varepsilon > 0, \exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq n''_\varepsilon \rightarrow a_n < -\varepsilon\}$$

ب- من العبارة (2) ينتج أن:

$$V_\varepsilon(+\infty) = \{x \in \mathfrak{R} \,/\, x > \varepsilon\}$$
$$V_\varepsilon(-\infty) = \{x \in \mathfrak{R} \,/\, x < -\varepsilon\}$$

نسميها على التوالي ε -جوار لـ $+\infty$, $-\infty$ ونكتب :

$$V_\varepsilon(\infty) = V_\varepsilon(-\infty) \cup V_\varepsilon(+\infty)$$

مثال : كل من المتتاليتين $(a_n)_{n\geq 1}$ ، $(b_n)_{n\geq 1}$ حيث:

$$n = 1,2,\ldots,\ a_n = -\sqrt{n} \qquad , n = 1,2,\ldots,\ b_n = \frac{n^2}{n+1}$$

لا متناهيتين في الكبر لأن $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ، $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$

5.2 – العمليات الحسابية على المتتاليات المتقاربة :

نظرية : إذا كانت المتتاليتان $(a_n)_{n\geq 1}$ ، $(b_n)_{n\geq 1}$ متقاربتين نحو العددين a, b على التوالي، فإن :

أ- المتتالية $(a_n \pm b_n)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو العدد $a \pm b$.

ب- المتتالية $(a_n b_n)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو العدد ab.

ج- المتتالية $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ ، $b_n \neq 0$ ، $n \geq 1$ متقاربة نحو العدد $\frac{a}{b}$ ، $b \neq 0$.

البرهان :

أ- حسب النتيجة فقرة 1.4.2 ،حتى نبرهن أن المتتالية $(a_n \pm b_n)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو العدد $a+b$ ،يكفي أن نبرهن أن المتتالية $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ حيث $\lambda_n = a_n + b_n - (a+b)$ ، $n \geq 1$ ، لا متناهية في الصغر.

عندنا $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ، أي المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ حيث $\alpha_n = a_n - a$ ، $n \geq 1$ لا متناهية في الصغر.

أيضا $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ تعني أن المتتالية $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ ،حيث $\gamma_n = b_n - b$ ، $n \geq 1$ لا متناهية في الصغر.

بجمع المساواتين $a_n = \alpha_n + a$ ، $\gamma_n = b_n - b$ ، $n \geq 1$ ، يكون:

$$a_n + b_n = \gamma_n + \alpha_n + (a+b) \Rightarrow a_n + b_n - (a+b) = \gamma_n + \alpha_n \qquad , n \geq 1$$

المتتالية $(\gamma_n + \alpha_n)_{n\geq 1}$ لا متناهية في الصغر وبالتالي يكفي أخذ $\lambda_n = \gamma_n + \alpha_n$ ، $n \geq 1$، ومنه نكتب

$$a_n + b_n - (a+b) = \lambda_n \ , \qquad n \geq 1$$

حيث المتتالية $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ لا متناهية في الصغر، أي: $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$

ب- كما في -أ- نجعل $a_n = \alpha_n + a$ ، $b_n = \gamma_n + b$ ، $n \geq 1$

بالضرب نجد :

$$a_n b_n = (\gamma_n + b)(\alpha_n + a) = \gamma_n \alpha_n + b\alpha_n + a\gamma_n + ab$$

ومنه نستنتج أن:

$$a_n b_n - (ab) = \gamma_n \alpha_n + b\alpha_n + a\gamma_n = \lambda'_n \qquad n \geq 1$$

حسب النظرية فقرة 1.4.2 والنتيجة2 نفس الفقرة، المتتالية $(\lambda'_n)_{n\geq 1}$ حيث $\lambda'_n = \gamma_n\alpha_n + b\alpha_n + a\gamma_n$ $n \geq 1,$ تكون لا متناهية في الصغر، هذا يعني أن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$

ج- نكتب a_n, b_n ، $n = 1,2......$ على الشكل $a_n = \alpha_n + a$ ، $b_n = \gamma_n + b$ ، $n \geq 1$

حيث كل من $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ و $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ لا متناهية في الصغر.

حتى نبرهن أن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ يكفي أن برهن أن المتتالية $(\lambda''_n)_{n\geq 1}$، حيث $\lambda''_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ $n \geq 1,$ لا متناهية في الصغر.

لاحظ أن:

$$\lambda''_n = \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{ab + b\alpha_n - ab_n}{bb_n} = \frac{ab + b\alpha_n - a(b + \gamma_n)}{bb_n}$$

$$= \frac{b\alpha_n - a\gamma_n}{bb_n} = \left(\frac{b\alpha_n - a\gamma_n}{b}\right)\frac{1}{b_n} = \left(\alpha_n - \frac{a}{b}\gamma_n\right)\frac{1}{b_n}$$

بما أن المتتالية $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ محدودة، والمتتالية $\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\gamma_n\right)_{n\geq 1}$ لا متناهية في الصغر، فإن المتتالية $(\lambda''_n)_{n\geq 1}$ لا متناهية في الصغر.

6.2 – المتتاليات الرتيبة (أو المطردة)

لتكن $(a_n)_{n\geq 1}$ متتالية عددية

1.6.2 – تعاريف :

1- نقول إن المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ متزايدة، إذا تحقق :

$$\forall n \in N \qquad \to \quad a_n < a_{n+1}$$

2- نقول إن المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ ليست متناقصة، إذا تحقق :

$$\forall n \in N \qquad \to \quad a_n \leq a_{n+1}$$

3- نقول إن المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ متناقصة ،إذا تحقق :

$$\forall n \in N \qquad \to \quad a_n > a_{n+1}$$

4- نقول إن المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ ليست متزايدة، إذا تحقق :

$$\forall n \in N \qquad \to \quad a_n \geq a_{n+1}$$

5- نقول إن المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ رتيبة، إذا كانت ليست متناقصة ،أو ليست متزايدة.

6- نقول إن المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ رتيبة تماماً، إذا كانت متزايدة، أو متناقصة.

6- نقول إن المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ متزايدة، ليست متناقصة، متناقصة، ليست متزايدة من رتبة معينة، إذا تحققت المتراجحات في 1، 2، 3، 4، على التوالي بدءا من رتبة معينة، أي :

$$\exists n_0 \in N / \forall n \geq n_0 \rightarrow (a_n < a_{n+1}, a_n \leq a_{n+1}, a_n > a_{n+1}, a_n \geq a_{n+1})$$

أمثلة :

1- المتتالية $\{1,2,3,\ldots\ldots\ldots,n,\ldots\ldots\}$، متزايدة .

2- المتتالية $\{1,1,2,2,\ldots\ldots\ldots,n,n,\ldots\ldots\}$، ليست متناقصة .

3- المتتالية $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\ldots\ldots,\frac{1}{n},\ldots\ldots\right\}$، متناقصة .

4- المتتالية $\left\{1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots\ldots\ldots,\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots\ldots\right\}$، ليست متزايدة .

5- المتتاليات في 2، 4 رتيبة .

6- المتتاليات في 1، 3 رتيبة تماماً .

7- لتكن المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ ،حيث $a_n = \frac{x^n}{n!}$ $n = 1,2\ldots\ldots$

عندنا :

$$a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^n \cdot x}{(n+1)n!}$$

هذا يعني أن: $a_{n+1} = \frac{x}{(n+1)}a_n$

لاحظ من أجل $\frac{x}{n+1} \leq 1$ ، أي $x-1 \leq n$ ،تكون المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ متزايدة ،أي $a_{n+1} \leq a_n$.

ومنه نستنتج

$$\exists n_x = [x] / \forall n \geq n_x \quad \rightarrow \quad a_{n+1} \leq a_n$$

أي المتتالية ليست متزايدة بدءاً من العدد الطبيعي $n_x = [x]$.

2.6.2 – معيار تقارب المتتاليات الرتيبة :

نظرية :

أ- إذا كانت المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ ليست متناقصة ومحدودة من الأعلى، فإنها تكون متقاربة نحو $\sup(a_n)_{n\geq1}$، أي:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(a_n)_{n\geq1}$$

ب- إذا كانت المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ ليست متزايدة ومحدودة من الأسفل، فإنها تكون متقاربة نحو $\inf(a_n)_{n\geq1}$،أي:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf(a_n)_{n\geq1}$$

البرهان :

أ- المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ ليست متناقصة، يعني أن :

$$\forall n\in N \quad \to \quad a_n \leq a_{n+1}$$

المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ محدودة من الأعلى أي $\exists M = \sup(a_n)_{n\geq1}$ يحقق

$$\forall n\in N \quad \to \quad a_n \leq M \qquad (1)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N / a_{n_\varepsilon} > M - \varepsilon \qquad (2)$$

لاحظ أنه :

$$\forall n \geq n_\varepsilon \quad \to \quad a_{n_\varepsilon} \leq a_n \qquad (3)$$

من (1)، (2)، (3) نحصل على

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N / \forall n \geq n_\varepsilon \to M - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq M < M + \varepsilon$$

أي :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N / \forall n \geq n_\varepsilon \to a_n \in V_\varepsilon(M)$$

ومنه

$$\lim_{n\to\infty} a_n = M = \sup(a_n)_{n\geq1}$$

ب- المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ ليست متزايدة ،يعني أن:

$$\forall n\in N \quad \to \quad a_n \geq a_{n+1}$$

المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ محدودة من الأسفل ، أي $\exists m = \inf(a_n)_{n\geq1}$ ،يحقق:

$$\forall n\in N \quad \to \quad a_n \geq m \qquad (1)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N / a_{n_\varepsilon} < m + \varepsilon \qquad (2)$$

لاحظ أنه:

$$\forall n \geq n_\varepsilon \quad \to \quad a_{n_\varepsilon} \geq a_n \qquad (3)$$

من (1)، (2)، (3) نحصل على:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N / \forall n \geq n_\varepsilon \to m - \varepsilon < m < a_n \leq a_{n_\varepsilon} < m + \varepsilon$$

أي :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N / \forall n \geq n_\varepsilon \to a_n \in V_\varepsilon(m)$$

ومنه

$$\lim_{n\to\infty} a_n = m = \inf(a_n)_{n\geq1}$$

قضية : النظرية السابقة صحيحة في حالة المتتالية ليست متزايدة،أو ليست متناقصة بدءاً من رتبة معينة n_0.

مثال :لتكن المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ حيث : $a_n = \frac{x^n}{n!}$ $n = 1,2.......$ $(x > 0)$

حسب المثال 7 فقرة 1.6.2 المتتالية ليست متزايدة بدءاً من $n_0 = [x]$ ، أي:

$$\exists n \geq n_0 = [x] / \forall n \geq n_n \rightarrow a_{n+1} \leq a_n \qquad (1)$$

عندنا:

$$\forall n \in N \rightarrow a_n > 0 \qquad (2)$$

من(1) ,(2) حسب القضية السابقةنستنتج أن المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ متقاربة .

نفرض أن : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

نبحث عن قيمة a،

من المثال 7 فقرة 1.6.2عندنا $a_{n+1} = \frac{x}{n+1} a_n$

حسب خواص النهايات يكون:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow a = 0 \cdot a = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a = 0$$

3.6.2 – العدد e :

لتكن المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$، حيث: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $n = 1,2.......,$

قضية : المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو عدد من $\Re$ ، يرمز له بالرمز e ،حيث: $2 \leq e < 3$.

البرهان : نرهن أن المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى.

التزايد : نستخدم صيغة ثنائي الحد لنيوتن يكون:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 \cdot 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + ... + C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} + ... + C_n^n \cdot \frac{1}{n^n}$$

حيث :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)........(n-k+1)}{k!}$$

نكتب a_n على الشكل:

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)........(n-k+1)}{n^k} =$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \qquad (1)$$

من (1) نستنتج أن الحد a_{n+1} يكتب كالتالي :

$$a_{n+1}=1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\dots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \qquad (2)$$

لاحظ أن كل حدود المجموعتين $(1),(2)$ موجبة،وكل حد من حدود المجموعة (1) أقل من الحد في نفس الرتبة من المجموعة (2) ، أي:

$$\forall k \quad , k=1,2.....,n-1\Rightarrow\left(1-\frac{k}{n}\right)<\left(1-\frac{k}{n+1}\right)$$

من هنا نستنتج أن:

$$\forall n\geq 1 \quad \rightarrow \quad a_n<a_{n+1}$$

أي المتتالية متزايدة .

المحدودية : عندنا

$$\forall k=1,2.....,n-1 \quad \rightarrow \quad 0<1-\frac{k}{n}<1$$

هذا حسب المجموعة (1) يكون:

$$a_n<1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=1+1+\frac{1}{2!}+\dots\dots+\frac{1}{n!}=2+\frac{1}{2!}+\dots\dots+\frac{1}{n!}=$$

$$=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dots\dots+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\dots\dots n}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot2}+\dots\dots+\frac{1}{2\cdot2\cdot\dots\dots2}=$$

$$=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\Rightarrow a_n<3 \qquad n=1,2\dots\dots$$

أي المتتالية محدودة.

حسب النظرية فقرة 2.6.2 المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ متقاربة، أي توجد نهاية ثابتة للمتتالية، نرمز لها بالرمز e ونكتب:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

بما أن $2\leq a_n<3 \quad , \quad \forall n\geq1$ ، فإن $2\leq e<3$.

لاحقاً سنعرف أن $e\approx2{,}718281828459045$ ، يسمى أساس اللوغاريتم النيبيري.

7.2 – المتتاليات المتجاورة :

تعريف : نقول إن المتتاليتين $(a_n)_{n\geq1}$, $(b_n)_{n\geq1}$،حيث $(a_n)_{n\geq1}$ ليست متناقصة، و $(b_n)_{n\geq1}$ليست متزايدة، إنهما متجاورتان، إذا كانت المتتالية $(b_n-a_n)_{n\geq1}$ لا متناهية في الصغر، أي : $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

مثال : لتكن $(a_n)_{n\geq 1}$، هي متتالية الحدود اليسرى للمجالات المغلقة والمحدودة الموجودة في النظرية 1 فقرة 2.4.1.

$(b_n)_{n\geq 1}$ هي متتالية الحدود اليمنى للمجالات المغلقة والمحدودة في نفس النظرية.

لاحظ من شرط المجالات متداخلة وقطرها يؤول إلى الصفر، نستنتج أن المتتاليتين $(a_n)_{n\geq 1}$ و $(b_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان.

بالفعل لأن المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ ليست متناقصة، و $(b_n)_{n\geq 1}$ ليست متزايدة و $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

نظرية : كل متتاليتين متجاورتين،متقاربتين ولهما نفس النهاية.

البرهان : لتكن $(a_n)_{n\geq 1}$ ليست متناقصة،و $(b_n)_{n\geq 1}$ ليست متزايدة،و $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

المتتالية $(c_n)_{n\geq 1}$، حيث $c_n = b_n - a_n$ ، $n \geq 1$، ليست متزايدة لأن:

$$c_{n+1} - c_n = (b_{n+1} - a_{n+1}) - (b_n - a_n) = (b_{n+1} - b_n) - (a_{n+1} - a_n) \leq 0$$

أي:

$$\forall n \in N \;\; \to \;\; c_{n+1} \leq c_n$$

ومنه بماأن $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$، فإن المتتالية $(c_n)_{n\geq 1}$ محدودة من الأسفل بالصفر، أي:

$$\forall n \in N \to \;\; c_n \geq 0$$

ومنه نستنتج:

$$\forall n \in N \to \;\; b_n \geq a_n$$

هذا يعني أن:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots\dots\dots \leq a_n \leq \dots\dots \leq b_n \leq \dots\dots \leq b_2 \leq b_1 \qquad (1)$$

من المتراجحات (1)، نستنتج أن المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ محدودة من الأعلى بالعدد b_1،وهي ليست متناقصة،هذا يعني أنها متقاربة.

أيضا من نفس المتراجحات نستنتج أن المتتالية $(b_n)_{n\geq 1}$ محدودة من الأسفل بالعدد a_1،وهي ليست متزايدة،هذا يعني أنها متقاربة.

لتكن: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$

عندنا $0 = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = b - a$

هذا يعني أن $b = a$ ،أي المتتاليتان متقاربتان ولها نفس النهاية.

8.2 – المتتاليات الجزئية :

لتكن $(a_n)_{n\geq 1}$ متتالية عددية و، $(k_n)_{n\geq 1}$ متتالية من N متزايدة، أي أن :

$$\forall n \in N \, , \, k_n \in N \;\; \to \;\; k_1 < k_1 < \dots\dots < k_n < \dots\dots$$

2018
2019

تابع للمحاضرة (8) - تطبيقات الحاسوب

متسلسلات الأعداد الحقيقية

Series of real numbers

في هذا البند سندرس تقارب و تباعد متسلسلات الأعداد الحقيقية.

يسمى التعبير

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

الذي يمكن اختصار $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ المتسلسلة اللانهائية infinite series.

مثال.

a. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$

b. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

c. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$

d. $2 + 0 + 2 + 0 + \cdots$

تعريف. أن المجموع الجزئي S_n للمتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ يكتب بالصورة

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

أما المتتابعة $\{S_n\}$ فإنها تسمى متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

مثال. أذا كانت لديك المتسلسلة $\cdots + 1 - 1 + 1 - 1$ فان $S_{2n-1} = 1$ اما $S_{2n} = 0$.

تعريف. أذا كانت متتابعة المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ للمتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ متقاربة الى S عندئذٍ سنقول ان المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ متقاربة convergent و مجموعها S .

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

أما إذا كانت $\{S_n\}$ متباعدة عندئذ سنقول ان المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ متباعدة divergent.

ألان دعنا نلقي نظرة على بعض المتسلسلات و أمكانية اختبار تباعدها أو تقاربها و إيجاد مجموعها:

مثال. بين فيما أذا كانت المتسلسلات الآتية متقاربة أم متباعدة. و أذا كانت متقاربة جد مجموعها.

$$a.\ \sum_{i=1}^{\infty} i$$

الحل.

في البداية نجد متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

ألان لمعرفة أن المتسلسلة متقاربة أم لا نحتاج لان نختبر متتابعة مجاميعها الجزئية $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}$ متقاربة ام لا ؟ لاحظ ان

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

و هذا يؤدي إلى أن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة أعلاه متباعدة إلى ∞ و بالتالي ستكون المتسلسلة متباعدة.

$$b.\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

الحل.

أن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة أعلاه هي:

$$\{S_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots, \quad \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}, \dots\right\} = \left\{1 - \frac{1}{2^n}\right\}$$

بما أن المتتابعة $\{S_n\}$ متقاربة إلى الواحد ستكون المتسلسلة أعلاه متقاربة و مجموعها يساوي 1.

$$c.\ \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i$$

الحل.

أن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة أعلاه هي:

$$\{S_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1,0,1,0, \dots\}$$

و بما أن $lim_{n\to\infty} S_n$ غير موجودة ستكون المتسلسلة أعلاه متباعدة.

d. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^{i-1}}$

الحل.

أن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة أعلاه هي:

$$\{S_n\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3^{i-1}} = \left\{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\right\}$$

و بما ان

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2}$$

بما أن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة أعلاه متقاربة ستكون المتسلسلة متقاربة و مجموعها يساوي $\frac{3}{2}$. أي ان

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^{i-1}} = \frac{3}{2}$$

ملاحظة.

1. الان دعنا نأخذ $\lim_{n\to\infty}$ للحد n لكل متسلسلة في المثال اعلاه. سنلاحظ

المتسلسلة متباعدة $\lim_{n\to\infty} n = \infty$

المتسلسلة متقاربة $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

المتسلسلة متباعدة $\lim_{n\to\infty} (-1)^n =$ غير موجودة

المتسلسلة متقاربة $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0$

2. لاحظ أن أذا كانت المتسلسلة متقاربة فان غاية الحد a_n لها عندما $n \to \infty$ ستكون مساوية للصفر.

3. مبرهنة. أذا كانت المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ متقاربة. فان $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. أن عكس المبرهنة أعلاه لا يكون صحيحا دائماً. فإذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ فان المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ قد تكون متباعدة .

5 . لاحظ انه على الرغم من أن $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$ إلا ان المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة (سنبرهنها لاحقاً).

اختبار التباعد divergent test

مبرهنة. أذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ فان $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ستكون متباعدة.

مثال. بين فيما أذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2-n^3}{10+2n^3}$ متقاربة ام متباعدة

الحل. لاحظ أن

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-n^3}{10+2n^3} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

بما أن الغاية للحد n للمتسلسلة أعلاه لا يساوي صفر لذا حسب المبرهنة أعلاه ستكون المتسلسلة متباعدة.

ملاحظة.

1. أذا كانت كل من $\sum a_n$ و $\sum b_n$ متسلسلة متقاربة. فان كل من $\sum ca_n$ و $\sum(a_n \mp b_n)$ متسلسلة متقاربة.

2. $\sum(a_n \mp b_n) = \sum a_n \mp \sum b_n$ و $\sum ca_n = c\sum a_n$.

3. أذا كانت $\sum a_n$ متسلسلة متباعدة فان $\sum ca_n$ ستكون متسلسلة متباعدة.

4. من الممكن أن تكون هناك متسلسلتين متباعدتين حاصل جمعهما يعطي متسلسلة متقاربة.

أنواع خاصة من المتسلسلات Special series

1. المتسلسلة الهندسية geometric series

المتسلسلة الهندسية هي المتسلسلة التي يمكن كتابتها بالصيغة

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ أو $\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n}$

يسمى r أساس المتسلسلة و أن النسبة بين كل حد و الذي يسبقه هي r حيث $a \neq 0$.

$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$

$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$

$S_n - rS_n = a - ar^n \implies S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$

تكون المتسلسلة الهندسية متقاربة عندما تكون متتابعة مجاميعها الجزئية متقاربة. لذا دعنا نأخذ الغاية لمتتابعة مجاميعها الجزئية سنحصل على

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}\right) = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^n$$

تكون الغاية أعلاه موجودة عندما $-1 < r < 1$. لا يمكن ان نجعل $r = 1$ لأننا سنحصل قسمة على صفر. بالتالي ستكون الغاية أعلاه موجودة عندما $-1 < r < 1$ لان $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ و بالتالي سنحصل على

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

من أعلاه نحصل على أن المتسلسلة الهندسية تكون متقاربة عندما $|r| < 1$ و مجموعها يساوي $\frac{a}{1-r}$.

مثال1. بين فيما أذا كانت المتسلسلات آلاتية متقاربة أم متباعدة. و أذا كانت متقاربة جد مجموعها

$$a.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

الحل. لاحظ أن $|r| = \frac{1}{2} < 1$ ، $a = 1$ ، $r = \frac{1}{2}$ لذا ستكون المتسلسلة متقاربة و مجموعها يساوي 2.

$$b.\ \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1}$$

الحل.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-(n-2)}4^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{9^{n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}\frac{4^2}{9^{-1}}$$
$$= 16(9)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} 144\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \qquad (*)$$

المتسلسلة (*) هندسية فيها $a = 144, r = \frac{4}{9} < 1$. من هذا سنحصل على ان المتسلسلة أعلاه متقاربة و مجموعها

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1} = \frac{144}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}(144) = \frac{1296}{5}.$$

تمرين. بين فيما أذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^{3n}}{5^{n-1}}$ متقاربة ام متباعدة. و أذا كانت متقاربة جد مجموعها.

مثال2. استخدم المثال أعلاه لإيجاد مجموع المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1}$.

الحل.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1} = 9^2(4) + \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1} = 324 + \frac{1296}{5} = \frac{2916}{5}.$$

تمرين. استخدم المثال1 أعلاه لإيجاد مجموع المتسلسلة $\sum_{n=3}^{\infty} 9^{-n+2}4^{n+1}$.

2. متسلسلة التليسكوب telescoping series

أن اسم المتسلسلة أعلاه يأتي عن ماذا يحدث مع مجاميعها الجزئية. و يمكن فهم ذلك من المثال الأتي:

مثال. بين فيما أذا كانت المتسلسلات الأتية متقاربة أم متباعدة. و أذا كانت متقاربة جد مجموعها أن كانت متقاربة

$$a.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$$

الحل.

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i^2+3i+2} \qquad (**)$$

يمكن استخدام تجزئة الكسور للحصول على

$$\frac{1}{i^2+3i+2}=\frac{1}{(i+2)(i+1)}=\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+2},$$

بالتعويض في $(**)$ نحصل على

$$S_n=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+2}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+2}$$

لاحظ أننا حذفنا جميع الحدود ألا الحدين الأول و الأخير. و هذا أصل اسم متسلسلة التليسكوب.

و ألان

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=1$$

بما أن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة أعلاه متقاربة إلى *1* ستكون المتسلسلة متقاربة و مجموعها يساوي *1* .

$$b.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$$

الحل.

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2+4i+3}\qquad (**)$$

يمكن استخدام تجزئة الكسور للحصول على

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2+4i+3}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\frac{1}{2}}{i+1}-\frac{\frac{1}{2}}{i+3}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right]$$

و ألان

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{5}{12}$$

بما أن متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة أعلاه متقاربة إلى *5/12* ستكون المتسلسلة متقاربة و مجموعها يساوي *5/12* .

ملاحظة. ليست كل متسلسلة يمكن تجزئة كسرها تدعى متسلسلة التليسكوب. لكي نحصل على متسلسلة التليسكوب يجب أن تكون هناك حدود قابلة للحذف فيها. إن المتسلسلة الآتية لا تكون متسلسلة تليسكوب لان جميع حدودها موجبة و لا يمكن الحذف فيها:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+2n}{n^2+3n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

تمرين. جد مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2+4n+3}-9^{-n+2}4^{n+1}\right)$.

3. المتسلسلة التوافقية harmonic series

تأخذ المتسلسلة التوافقية الصيغة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ و تكون متباعدة (سنبرهن هذا فيما بعد) .

مثال: برهن أن كلاً من المتسلسلات الآتية متباعدة

$$a.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n} \qquad b.\ \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n}$$

الحل:

$a.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n} = 5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة سنحصل على ان $5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة ايضاً.

$b.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right)-\frac{11}{6}$

و ألان بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة فإننا عندما نطرح منها عدداً ثابتاً سنحصل على متسلسلة متباعدة ايضاً.

ملاحظة: عندما نجمع أو نطرح عدد ثابت لمتسلسلة متقاربة (متباعدة) فإننا سنحصل على متسلسلة متقاربة (متباعدة) .

اختبار التكامل *integral test*

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة و موجبة و متناقصة على الفترة $[k,\infty)$ و كذلك $f(n) = a_n$ فإن

1. أذا كان $\int_k^{\infty} f(x)dx$ متقارب فإن المتسلسلة $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ ستكون متقاربة.
2. أذا كان $\int_k^{\infty} f(x)dx$ متباعد فإن المتسلسلة $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ ستكون متباعدة.

مثال: بين فيما أذا كانت المتسلسلات الآتية متقاربة أم متباعدة

$$a.\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} \qquad b.\ \sum_{n=0}^{\infty} n\, e^{-n^2}$$

الحل: a. من الواضح أن الدالة $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ موجبة. و ازدياد قيم x في المقام يؤدي الى تناقص الدالة و بالتالي سنحصل على أن الدالة متناقصة. بقي أن نجد التكامل

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_2^{t}\frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{t\to\infty}(\ln\ln x)|_2^t$$
$$= \lim_{t\to\infty}(\ln\ln t) - \ln\ln 2 = \infty.$$

بما أن قيمة التكامل غير منتهية سنحصل على أن المتسلسلة أعلاه متباعدة حسب اختبار التكامل.

b. من الواضح أن الدالة $f(x) = x\,e^{-x^2}$ موجبة. لاحظ $f'(x) = (1-2x^2)\,e^{-x^2}$

اما النقاط الحرجة للدالة هي $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ و بما ان n تبدأ من الصفر سنهمل $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ و

باختبار اشارة $f'(x)$ سنحصل على ان الدالة متزايدة على الفترة $\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ و متناقصة على الفترة $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right[$. و بالتالي سنحصل على أن الدالة متناقصة. كما أن

$$\int_0^{\infty} x\,e^{-x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^{t} x\,e^{-x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Big|_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right) = \frac{1}{2}$$

بما أن قيمة التكامل منتهية سنحصل على أن المتسلسلة أعلاه متقاربة حسب اختبار التكامل.

تمرين. برهن باستخدام اختبار التكامل أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة في حين ان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة.

اختبار المتسلسلة p the p-series test

أذا كانت $k > 0$ فإن $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ تكون متقاربة عندما $p > 1$ و متباعدة عندما $p \le 1$.

مثال. بين فيما أذا كانت المتسلسلتين $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^7}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ متقاربة ام متباعدة.

تمرين. اختبر تقارب و تباعد المتسلسلات الآتية

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^2}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+100}$$