نظرية الزمر

تأليف

د.معروف عبدالرحمن سمحان   د.فوزي بن أحمد صالح الذكير
جامعة الملك سعود

مقدمة

تُعد نظرية الزمر من أهم الأمثلة في الرياضيات على استخدام التجريد في دراسة أنظمة رياضية تبدو مختلفة ولكن تجمعها خصائص مشتركة تكوّن الأساس لبناء أنظمة رياضية شيقة بحد ذاتها. لقد نشأت نظرية الزمر قبل أكثر من مائتي عام وبتأثير من ثلاثة فروع في الرياضيات هي : الهندسة ، نظرية الأعداد ونظرية المعادلات الجبرية .

(١) الهندسة : في بداية القرن التاسع عشر بدأت تنشأ أنواع من الأنظمة الهندسية التي لا تعتمد على القياس مثل الهندسة الاسقاطية **(Projective geometry)** وأنواع الهندسة اللاأقليدية. كما بدأت دراسة الهندسة في البعد النوني والتي استلزمت تجريد العديد من المفاهيم لتحريرها من الارتباط بالواقع الفيزيائي الوصفي. كل هذا أدى إلى دراسة نماذج هندسية لا تتغير تحت تأثير تحويلات معينة ، تبين لاحقاً أن هذه التحويلات تكوّن زمراً ذات خصائص مميزة وشيقة.

(٢) نظرية الأعداد : في نهاية القرن الثامن عشر وبداية القرن التاسع عشر بدأت دراسة ما يسمى بالأنظمة الحسابية القياسية **(modular arithmetic)** ويُعد الرياضي المشهور أويلر **(Euler)** من الرواد في هذا المجال. إن دراسة هذه الأنظمة تُعد البداية لما نعرفه اليوم بالزمر الإبدالية كما أن عمل أويلر مهد لفكرة المجموعات المشاركة **(cosets)** والتي تلعب دوراً هاماً في دارسة الزمر. ولقد تطورت هذه الأفكار عبر السنين على يد الكثير من علماء الرياضيات وخاصة العالم جاوس **(Gauss)** الذي درس الأنظمة الحسابية القياسية بعمق أكثر وأثبت العديد من النظريات التي يمكن أن تفسيرها اليوم بلغة نظرية الزمر. كما درس جاوس الصيغ التربيعية الثنائية تحت تأثير تحويلات معينة تشكل زمرة إبدالية منتهية تُعتبر الأساس للعديد من الدراسات التي تلت في النصف الثاني من القرن التاسع عشر.

(٣) نظرية المعادلات الجبرية : إن محاولة إيجاد صيغ جبرية لجذور المعادلات الجبرية دفعت العالم لاجرانج **(Lanrange)** لدراسة التبديلات التي لم يكن يعلم أنها تكوّن زمرة. بيد أنه أستخدم التبديلات لمعرفة السبب في وجود صيغ جذرية للمعادلات من الدرجتين الثالثة والرابعة. ولقد تم تطوير أفكار لاجرانج من قبل روفيني **(Ruffini)** الذي تبين له أن التبديلات تكوّن زمرة استخدم بعض خصائصها في محاولته لإثبات استحالة وجود صيغة جذرية عامة للمعادلات من الدرجة الخامسة. إن العلاقة بين دراسة جذور المعادلات الجبرية و زمر التبديلات دفع العديد من علماء الرياضيات لدراسة زمر التبديلات بتفصيل أكثر ومن أشهرهم العالم كوشي **(Cauchy)** ولقد تُوجت هذه الدراسات

على يد جالوا **(Galois)** الذي استخدم خصائص زمر التبديلات في إثبات إستحالة وجود صيغ جذرية عامة للمعادلات ذات الدرجة الخامسة فأكثر.

في نهاية القرن التاسع عشر تبين للعديد من المشتغلين في الرياضيات الأهمية البالغة لدراسة الزمر كبناء رياضي مستقل. ولقد صدرت عدة مؤلفات في ذلك الحين حول هذا الموضوع من أهمها كتاب "نظرية الزمر المنتهية" للعالم برنسايد **(Burnside)** والذي ألهم الكثير من الدارسين في هذا المجال في القرن العشرين . لقد تطورت دراسة الزمر بشكل متسارع خلال المئة عام الماضية وتم حل العديد من المسائل الهامة في هذا المجال وعلى رأسها تصنيف الزمر المنتهية البسيطة والذي تم في عام ١٩٨١م . كما تبين دور الزمر في الكثير من المسائل التطبيقية منها :

(١) في علم الفيزياء : دراسة نماذج رياضية للجسيمات الأولية **(Elmentary Particles)** .

(٢) في علم الكيمياء : دراسة التركيب الجزيئي للمركبات العضوية والتعرف على الاستقراء الكيميائي لها وخاصة فيما يسمى بالكيمياء العضوية المجسمة **(stereo organic chemistry)** .

(٣) في علم البلورات **(Crystallography)** : دراسة نظرية التناظر للبلورات المختلفة لغرض التصنيف وقياس مدى استقرار البناء البلوري في الطبيعة .

(٤) في علم التعمية **(Cryptography)** : بناء أنظمة تعمية محكمة تعتمد على ميزات خاصة في زمر منتهية يتم اختيارها من أنظمة عددية أو هندسية.

(٥) في علم الشفرات **(Coding Theory)** : تكوين شفرات ذات كفاءة عالية لحماية المعلومات من التشويش.

يتكون كتابنا هذا من سبعة فصول حرصنا من خلالها على أن نقدم كل ما يتعلق بأساسيات نظرية الزمر. ولقد حرصنا على أن تكون مادة الكتاب مفهومة من قبل كل طالب درس أربعة فصول جامعية في تخصص الرياضيات . ولأجل تيسير الأمر أكثر ، فلقد خصصنا الفصل الأول للمبادئ الأساسية في الموضوع والمتعلقة بالأعداد الصحيحة والتبديلات والعمليات الثنائية. ولقد صممنا الكتاب لتشكل فصوله الأربعة الأولى المادة اللازمة لتدريس الزمر في مرحلة البكالوريوس في معظم الجامعات. كما يمكن اختيار مادة إضافية من الفصلين الخامس والسادس بحسب ما يسمح به وقت الطالب ومايراه أستاذ المادة مناسباً . ويمكن أن يشكل الفصلين الأخيرين أساساً لدراسة الزمر في مرحلة الماجستير.

لقد حرصنا في هذا الكتاب على تقديم الكثير من الأمثلة وعلى تنوع التمارين المحلولة وغير المحلولة والتي تعتبر جزءاً اساسياً من الكتاب لا يمكن الإستغناء عنه في دراسة مادة الزمر.

نرجو أن نكون قد وُفقنا في تقديم مادة هذا الكتاب بشكل واضح ومفيد. وندعو القراء أن لا يبخلوا علينا بملاحظاتهم ومرئياتهم حول محتوى هذا الكتاب لتلافي السلبيات في الطبعات القادمة إن شاء الله .

وبالله التوفيق .

المؤلفان

المحتويات

الفصل السابع : الزمر القابلة للحل والزمر المتلاشية

الفصل الأول

مبادئ أساسية
BASIC CONCEPTS

(١,١) الأعداد الصحيحة
The Integers

تعد الأعداد الصحيحة إحدى أهم مجموعات الأعداد التي تزود موضوع الجبر المجرد بأمثلة عديدة. ويمكن بناء هذه الأعداد من الأعداد الطبيعية بشكل منطقي ولكننا لن نخوض في ذلك هنا، ونقصر دراستنا على مراجعة الخواص الأساسية للأعداد الصحيحة. ونبدأ بتقديم إحدى أهم طرائق البرهان الأساسية في هذا المجال، ألا وهي الاستقراء الرياضي. للاستقراء الرياضي صورتان متكافئتان، وهاتان الصورتان تكافئان مبدأ هاماً جداً هو مبدأ الترتيب الحسن.

المبدأ الأول للاستقراء الرياضي (First Principle of Mathematical Induction)

ليكن $m \in \mathbb{N}$ ولتكن $S_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$. إذا كانت $S \subseteq S_m$ تحقق :

(أ) $m \in S$.

(ب) $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$.

فإن $S = S_m$.

تسمى (أ) الخطوة الأساسية للاستقراء ، أما (ب) فتسمى خطوة الاستقراء .

من المهم جداً أن يستوعب القارئ جيداً كيفية استخدام الاستقراء الرياضي ، فإذا أردنا برهان صحة التقرير $\forall n \in S_m, P(n)$ فإننا نضع $S_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m$, تقرير صائب $P(n)\}$ ، ونأخذ $S \subseteq S_m$. الخطوة الأساسية (أي $m \in S$) تبرهن لنا صواب التقرير $P(m)$ ، وباستخدام خطوة الاستقراء عندما $k = m$ ، نحصل على صواب التقرير $P(m+1)$. الآن نطبق خطوة الاستقراء مرة أخرى عندما

$k = m+1$ فنحصل على صواب التقرير $P(m+2)$ ، وهكذا .

إن خطوة الاستقراء تضمن لنا : في حال وصولنا إلى محطة ما ، فإننا نستطيع السير إلى المحطة التي تليها . أما الخطوة الأساسية فتضمن لنا وجود المحطة الأولى التي سننطلق منها .

مثال (١,١)

أثبت أن $3^n > 2^n + n$ لكل $n \geq 2$.

الحل

باستخدام الاستقراء الرياضي على n . نفرض إذن أن $S = \{n \in \mathbb{N} : 3^n > 2^n + n, n \geq 2\}$

(أ) بما أن $9 = 3^2 > 2^2 + 2 = 6$ فإن $2 \in S$.

(ب) نفرض أن $k \geq 2$ وأن $k \in S$. عندئذ:

$$3^{k+1} = 3.3^k > 3(2^k + k) = 3.2^k + 3k \quad \text{(فرضية الاستقراء)}$$

$$> 2.2^k + k + 1 = 2^{k+1} + k + 1 \quad (\text{لأن } k \geq 2)$$

إذن ، $k+1 \in S$.وبالتالي فإن $S = S_2 = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2\}$ □

عند محاولتنا إثبات خطوة الاستقراء $k+1 \in S$ ، احتجنا فقط معرفة أن $k \in S$. سنجد في كثير من الأحيان أن الاعتماد فقط على افتراض صحة خطوة سابقة واحدة فقط لا يكفي لإثبات صحة الخطوة التي تلي ذلك . من أجل ذلك نقدم صورة أخرى مكافئة للمبدأ الأول للاستقراء الرياضي :

المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي (Second Principle of Mathematical Induction)

ليكن $t, m \in \mathbb{N}$ ولتكن $S_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$. إذا كانت $S \subseteq S_m$ تحقق :

(أ) $m, m+1, m+2, \ldots, m+t \in S$

(ب) $m, m+1, \ldots, k \in S \Rightarrow k+1 \in S$ حيث $k \geq m+t$ فإن $S = S_m$.

مثال (١,٢)

تعرف متتالية فيبوناتشي **(Fibonacci sequence)** $\{a_n\}$ استقرائياً كالتالي:

(أ) $a_1 = a_2 = 1$.

(ب) $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ لكل $n \geq 2$.

أثبت أن $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ لكل $n \geq 1$.

الحل

باستخدام المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي على n . نفرض أن

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], n \geq 1 \right\}.$$

(أ) بما أن $1 = a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = 1$

وأن $1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = 1$ فإن $1,2 \in S$.

(ب) نفرض أن $1,2,\ldots,k \in S$. عندئذ ،

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right] \quad \text{(فرضية الاستقراء)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]$$

إذن ، $k+1 \in S$ ونخلص إلى أن $S=\{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$ $\square$

لقد رأينا كيفية استخدام الاستقراء الرياضي لبرهان صواب تقارير مختلفة عن الأعداد الطبيعيـــة. نقدم الآن مبدأ مكافئاً للاستقراء الرياضي يستخدم في برهان العديد من مبرهنات الجبر المجرد.

مبدأ الترتيب الحسن **(Well-Ordering Principle)**

إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$ فإن A تحتوي على عنصر أصغر **(least element)**.

أي ، يوجد $a \in A$ يحقق : $a \leq x$ لكل $x \in A$.

لاحظ أن العنصر الأصغر في A يجب أن يكون وحيداً . إذ، لو كان كلاً من a_1 و a_2 عنصراً أصـــغر في A ، فإن $a_1 \leq a_2$ وإن $a_2 \leq a_1$ ولذا ، فإن $a_1 = a_2$.

سنبرهن فيما يلي على أن مبدأ الترتيب الحسن يكافئ كل من المبدأ الأول والثـــاني للاســـتقراء الرياضي. ولكن قبل تقديم هذا البرهان ، دعنا نوضح كيفية استخدام مبدأ الترتيب الحسن . لنفرض أننـــا بصدد إثبات صواب التقرير $P(n)$ لكل $n \geq m$ باستخدام مبدأ الترتيب الحسن. نفـــرض أن S هـــي المجموعة الجزئية من $\mathbb{N}$ حيث أن التقرير $P(n)$ لكل $n \geq m$ خاطئ ، ونبرهن أن المجموعة S يجب أن تكون خالية وذلك بإثبات أن S لا تحتوي على عنصر أصغر. أو نطبق مبدأ الترتيب الحسن على S باعتبار أنها غير خالية ونبرهن أننا نستطيع الحصول على تناقض. المثال التالي يوضح الطريقة.

مثال (١,٣)

استخدم مبدأ الترتيب الحسن لإثبات صواب التقرير: $(\forall n \geq 1)(2^{n+1} < 1+(n+1)2^n)$.

الحل

نفرض أن التقرير خاطئ. لتكن $S=\{n \in \mathbb{N} : 2^{n+1} \geq 1+(n+1)2^n, n \geq 1\}$.

إذن ، S مجموعة غير خالية . لاحظ أن $2^2 < 1+2\times 2$ ومنه فإن $1 \notin S$. ولـــذا ، باســـتخدام مبـــدأ الترتيب الحسن نجد أن S تحتوي على عنصر أصغر $k \geq 2$. إذن ، $k-1 \notin S$. ولذا فإن :

$$2^{k+1} \geq 1+(k+1)2^k \qquad (1)$$

$$2^k < 1+k2^{k-1} \qquad (2)$$

بضرب المتباينة (2) بالعدد 2 نحصل على: $2^{k+1} < 2 + 2.2^k$ (3)

من المتباينتين (1) و (3) نجد أن: $1+(k+1)2^k < 2 + k2^k$. ولذا فإن $2^k < 1$ حيث $k \geq 2$ وهــذا مستحيل. إذن ، $S = \phi$ وبالتالي ، فإن التقرير صائب □

مبرهنة (١,١)

العبارات التالية جميعها متكافئة :

(أ) المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي.

(ب) المبدأ الأول للاستقراء الرياضي.

(ج) مبدأ الترتيب الحسن.

البرهان

(أ)⇐(ب) : واضح.

(ب)⇐ (ج) نفرض أن $A \subseteq \mathbb{N}$ وأن A لا تحتوي على عنصر أصغر ، سنبرهن أن $A = \phi$ باستخدام المبدأ الأول للاستقراء الرياضي وذلك بإثبات أن المجموعة $S = \{m \in \mathbb{N} : \forall x(x \leq m \to x \in \mathbb{N} - A)\}$ تساوي $\mathbb{N}$. من الواضح أن $0 \in S$ ، لأنه لو كـــان $0 \notin S$ فإن $0 \in A$. وبذلك يكون 0 عنصراً أصغر في A ، وهذا مستحيل.

نفرض الآن أن $k \in S$. إذن ، $0,1,\ldots,k \in \mathbb{N} - A$. ولإثبات أن $k+1 \in S$ ، يكفي أن نثبـــت أن $k+1 \in \mathbb{N} - A$. إذا كان $k+1 \notin \mathbb{N} - A$ فإن $k+1 \in A$. إذن ، $k+1$ عنصر أصغر في A ، وهذا يناقض الفرض. ولذا فإن ، $k+1 \in S$. وبالتالي ، فإنه باستخدام المبدأ الأول للاستقراء الرياضـــي نجد أن $S = \mathbb{N}$. إذن ، $A = \phi$.

(ج)⇐(أ) : لنفرض أن $m \in \mathbb{N}$ وأن $S_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$. ولنفرض أن $S \subseteq S_m$ تحقق :

(١) $m \in S$.

(٢) $m, m+1, \ldots, k \in S \Rightarrow k+1 \in S$.

سنبرهن أن $S = S_m$. لنفرض لغرض التناقض أن $S_m - S \neq \phi$. إذن ، باستخدام مبدأ الترتيب الحسن ، نجد أن $S_m - S$ تحتوي على عنصر أصغر ، وليكن t . إذن ، $t \in S_m$ و $t \notin S$. ولذا فإن $t \geq m$. ولكن ، $m \in S$. إذن ، $m \notin S_m - S$ ، ولذا فإن $t \neq m$ ومنه فإن $t - 1 \geq m$. ولكن بما أن t عنصر أصغر في $S_m - S$ فإن $t - 1 \notin S_m - S$. إذن ، $m, m+1, \ldots, t-1 \in S$. وعليه فإن ، $t = (t-1) + 1 \in S$. إذن، $t \notin S_m - S$ وهذا تناقض. ومنه فإن ، $S_m - S = \phi$. وبما أن $S \subseteq S_m$ فإن $S = S_m$. وبهذا يتم البرهان ◆

فيما تبقى من هذا البند نوظف مبدأ الترتيب الحسن أو مبدأ الاستقراء الرياضي لإثبات بعض الخواص الأساسية للأعداد الصحيحة.

مبرهنة (١,٢) [خوارزمية القسمة division algorithm]

إذا كان $a \in \mathbb{Z}^+$ و $b \in \mathbb{Z}$ فإنه يوجد عددان وحيدان $r, q \in \mathbb{Z}$ حيث $b = qa + r$ ، $0 \leq r < a$.

البرهان

لتكن $S = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x = b - ta, t \in \mathbb{Z}\}$. لاحظ أن $S \neq \phi$. (لأن $b - ta \geq 0$ إذا وفقط إذا كان $t \leq \frac{b}{a}$) . ولذا ، باستخدام مبدأ الترتيب الحسن، يوجد عنصر أصغر $r \in S$. إذن ، يوجد $q \in \mathbb{Z}$ حيث $r = b - qa$. ومنه فإن $b = qa + r$. من الواضح أن $r \geq 0$. لنفرض ، لغرض التناقض أن $r \geq a$. إذن ، $0 \leq r - a = b - qa - a = b - (q+1)a$. ولذا فإن $r - a \in S$ وهذا يناقض اختيار r . وبالتالي فإن ، $b = qa + r$ ، $0 \leq r < a$.

ولبرهان الوحدانية ، نفرض أيضاً أن $r_1, q_1, \in \mathbb{Z}$ تحقق : $b = q_1 a + r_1$ ، $0 \leq r_1 < a$. عندئذ، $r_1 - r = (q - q_1)a$. أي أن ، $\frac{r_1 - r}{a} = q - q_1$. ولكن $-1 < \frac{r_1 - r}{a} < 1$. ولذا فإن $q - q_1 = 0$. ونخلص إلى أن $q_1 = q$ وأن $r_1 = r$ ◆

تعريف (١,١)

ليكن $a, b \in \mathbb{Z}$ ليس كلاهما صفراً . نقول إن $d > 0$ هو القاسم المشترك الأعظم

(greatest common divisor) للعددين a و b ونكتب $d = \gcd(a,b)$ إذا تحقق ما يلي :

(أ) $d \mid a$ و $d \mid b$.

(ب) إذا كان $c \mid a$ و $c \mid b$ فإن $c \mid d$.

لاحظ أولاً أنه إذا كان $c > 0$ و كان $c \mid b$ فإن $c \le |b|$. وعليه فإن مجموعة قواسم b هي مجموعة منتهية . نستنتج من هذا أن مجموعة القواسم الموجبة للعددين a و b منتهية ، إذ هي تقاطع مجموعة قواسم العدد a الموجبة مع مجموعة قواسم العدد b الموجبة ، ولذا فإنها مجموعة جزئية من مجموعة القواسم الموجبة للعدد b وهي مجموعة منتهية. إذن ، تحتوي على عنصر أكبر مما يضمن لنا وجود القاسم المشترك الأعظم للعددين a و b . أما بالنسبة إلى وحدانية القاسم المشترك الأعظم فإننا نحصل عليها من ملاحظة أنه لو كان $d_1 = \gcd(a,b)$ و $d_2 = \gcd(a,b)$ فإن $d_1 \mid d_2$ و $d_2 \mid d_1$. إذن ، $d_1 = d_2$.

مبرهنة (١,٣)

إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}$ ليس كلاهما صفراً فإنه يوجد $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ حيث $\gcd(a,b) = ax_0 + by_0$.

البرهان

لتكن $S = \{ax + by > 0 : x, y \in \mathbb{Z}\}$. بما أن a و b ليس كلاهما صفراً فإننا نفرض أن $a \neq 0$.

إذا كان $a > 0$ فإن $a = a \times 1 + b \times 0 \in S$. إما إذا كان $a < 0$ فإن $-a = a(-1) + b \times 0 \in S$.

إذن ، $S \neq \phi$. وباستخدام مبدأ الترتيب الحسن يوجد عنصر أصغر $d \in S$. إذن ، يوجد $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ حيث $d = ax_0 + by_0$. سنبرهن أن $d = \gcd(a,b)$. باستخدام خوارزمية القسمة يوجد $r, q \in \mathbb{Z}$ حيث $a = dq + r$ ، $0 \le r < d$. ومنه فإن :

$r = a - dq = a - (ax_0 + by_0)q = a(1 - x_0 q) + b(-y_0 q) \in S$ وهذا يناقض اختيار d . إذن ، $d \mid a$. وبالمثل ، $d \mid b$. وأخيراً إذا كان $c \mid a$ و $c \mid b$ فإن $c \mid (ax_0 + by_0)$. ولذا فإن $c \mid d$. وبالتالي نخلص إلى أن ، $d = \gcd(a,b)$ ◆

نتيجة (١,٤)

إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}$ ليس كلاهما صفراً فإن :

$\gcd(a,b) = 1$ إذا وفقط إذا وجد $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ حيث $1 = ax_0 + by_0$.

البرهان

إذا كان $\gcd(a,b)=1$ فإنه باستخدام المبرهنة (١,٣) ، يوجد $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ حيث $1=ax_0+by_0$.
وبالعكس، إذا كان $1=ax_0+by_0$ حيث $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ وكان $d=\gcd(a,b)$ فإن $d|a$ و $d|b$. ومنه فإن $a=dr$ و $b=ds$ حيث $r,s \in \mathbb{Z}$. وعليه فإن $ax_0+by_0=d(rx_0+sy_0)$.
إذن، $d|(ax_0+by_0)$. أي أن $d|1$. وبالتالي فإن $d=1$ ◆

ملحوظة

إذا كان $\gcd(a,b)=1$ فإن العددين a,b يسميان أوليين نسبياً **(relatively prime)** .

مبرهنة (١,٥)

(أ) إذا كان p عدداً أولياً حيث $p|ab$ فإن $p|a$ أو أن $p|b$.
(ب) إذا كان $p|a_1a_2...a_n$ حيث p عدد أولي فإنه يوجد على الأقل a_i حيث $p|a_i$.

البرهان

(أ) لنفرض أن $p|ab$ ، ولنفرض أن p لا يقسم a. إذن، $\gcd(a,p)=1$. باستخدام النتيجة (١,٤) نجد أن $1=ax+py$ حيث $x,y\in\mathbb{Z}$. ولذا فإن $b=abx+pby$. وبما أن $p|ab$ و $p|pb$ فإننا نجد أن $p|(abx+pby)$. ولذا فإن $p|b$.
(ب) باستخدام الاستقراء الرياضي على n . من الواضح أن العبارة صحيحة عند $n=1$.
نفرض الآن أن العبارة صحيحة لكل $1,2,3,...,k-1$. ولنفرض أن $p|a_1a_2...a_{k-1}a_k$. إذن، باستخدام الفقرة (أ) نجد أن $p|a_k$ أو أن $p|a_1a_2...a_{k-1}$. ولذا، باستخدام فرضية الاستقراء نجد أن: $p|a_k$ أو $p|a_i$ حيث $1\le i\le k-1$. وبهذا يتم البرهان ◆

المبرهنة التالية هي أحدى أهم مبرهنات الأعداد الصحيحة وتعرف باسم المبرهنة الأساسية في الحساب **(the fundamental theorem of arithmetic)**

مبرهنة (١,٦) [المبرهنة الأساسية في الحساب]

إذا كان $n > 1$ عدداً صحيحاً فإنه يمكن كتابة n بطريقة وحيدة (باستثناء الترتيب) كحاصل ضرب عدد منته من الأعداد الأولية.

البرهان

نبرهن أولاً باستخدام الاستقراء الرياضي n أنه يمكن كتابته كحاصل ضرب عدد منته من الأعداد الأولية . إذا كان $n = 2$ فالعبارة صحيحة. لنفرض أن العبارة صحيحة لكل $2,3,\dots,k$. إذا كان $k+1$ عدداً أولياً ، نكون قد انتهينا. لنفرض إذن أن $k+1 = ab$ حيث $1 < a, b \le k$. باستخدام فرضية الاستقراء توجد أعداد أولية $p_1, p_2, \dots, p_r, q_1, q_2, \dots, q_s$ حيث $a = p_1p_2\dots p_r$ ، $b = q_1q_2\dots q_s$. إذن ، $k+1 = ab = p_1p_2\dots p_r q_1q_2\dots q_s$.

ولإثبات الوحدانية ، نستخدم الاستقراء الرياضي أيضاً. إذا كان $n = 2$ فالعبارة واضحة. لنفرض أن العبارة صحيحة لكل $1 < k < n$ وسنبرهن صحتها عند n . إذا كان n أولياً فالعبارة واضحة. نفرض إذن أن n مؤلف وأننا نستطيع كتابته كحاصل ضرب عدد منته من الأعداد الأولية بطريقتين مختلفتين. أي ، نفرض أن : $n = p_1p_2\dots p_t = q_1q_2\dots q_s$ ولنفرض أن $t \le s$.

الآن: بما أن $p_1 \mid q_1q_2\dots q_s$ فإنه يوجد $1 < i \le s$ حيث $p_1 \mid q_i$. ولكن بإعادة ترتيب الأعداد $q_1, q_2, \dots, q_s$ نستطيع أن نفرض أن $p_1 \mid q_1$. إذن ، $p_1 = q_1$ (لأن p_1 و q_1 أوليان). ولهذا فإن:

$$\frac{n}{p_1} = p_2p_3\dots p_t = q_2q_3\dots q_s .$$

ولما كان $1 < t \le s$ فإن $1 < \frac{n}{p_1} < n$. إذن ، باستخدام فرضية الاستقراء نستنتج أن الطريقتين السابقتين لكتابة $\frac{n}{p}$ متطابقتان (باستثناء الترتيب) ، ولذا فإن $s = t$ وأن $p_i = q_i$ لكل $i = 1, \dots, t$ ◆

ملحوظة

من الممكن أن تتكرر بعض الأعداد الأولية عند تحليل n إلى عوامله الأولية. فإذا كانت العوامل الأولية

المختلفة هي $p_1, p_2, \dots, p_k$ وكان عدد تكرار p_i هو a_i لكل $1 \le i \le k$ فإن : $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$
ويسمى هذا التحليل الصورة القياسية لتحليل n .

تمارين (١,١)

(١)استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات كل من العبارات التالية :

(أ) $2^{n^2} > n!$ لكل $n \ge 1$ (ب) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$ لكل $n \ge 1$

(ج) $n! \le n^n$ لكل $n \ge 1$

(٢)أعد التمرين (١) مستخدماً مبدأ الترتيب الحسن.

(٣)إذا كان $x \in \mathbb{R}$ ، $x > -1$ فأثبت أن : $(1+x)^n \le 1 + nx$ لكل $n \ge 2$.

(٤)أثبت أنه يوجد عدد غير منته من الأعداد الأولية .

(٥)إذا كان $\gcd(a,b) = d$ فأثبت أن $\gcd(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.

(٦)إذا كان $a \mid c$ و $b \mid c$ و $\gcd(a,b) = 1$ فأثبت أن $ab \mid c$. هل تبقى العبارة صحيحة إذا كان $\gcd(a,b) > 1$؟

(٧)إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}$ ليس كلاهما صفراً فإننا نقول إن $m > 0$ هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين ونرمز لذلك بالرمز $m = \mathrm{lcm}(a,b)$ إذا كان:

(أ) $a \mid m$ و $b \mid m$ (ب)إذا كان $a \mid c$ و $b \mid c$ فإن $m \mid c$

أثبت أنه إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}^+$ فإن $\gcd(a,b)\mathrm{lcm}(a,b) = ab$.

(٨)إذا كان $\gcd(a,c) = \gcd(b,c) = 1$ فأثبت أن $\gcd(ab,c) = 1$.

(٩)إذا كان $2^k - 1$ عدداً أولياً فأثبت أن k عدد أولي. هل العكس صحيح؟

(١٠)إذا كان $n \mid (n-1)! + 1$ فأثبت أن n عدد أولي.

(١١)إذا كان $n \ge 0$ فإن الأعداد $F_n = 2^{2^n} + 1$ تدعى أعداد فيرما **(Fermat numbers)**

(أ)أثبت أن $F_0 F_1 F_2 \dots F_{m-1} = F_m - 2$ لكل $m \ge 1$.

(ب)أثبت أن $\gcd(F_m, F_n) = 1$ لكل $m \neq n$.

(ج)استخدم الفقرة (ب)لإثبات أن عدد الأعداد الأولية غير منته .

(١٢)أثبت أن $\gcd(a^n, b^n) = [\gcd(a,b)]^n$ لكل $n \geq 1$.

(١,٢) التبديلات

Permutations

سندرس في هذا البند الخواص الأساسية لتبـــديلات **(permutations)** مجموعـــة X وهـــي تطبيقات $f : X \to X$ أحادية وشاملة . أي تقابلات من X على نفسها. سنرمز لمجموعة جميع التبديلات على مجموعة X بالرمز S_X . إذا كانت $X = \{1, 2, ..., n\}$ مجموعة منتهية فإننا نستخدم الرمز S_n بدلاً من الرمز S_X .

مبرهنة (١,٧)

$|S_n| = n!$.

البرهان

لدينا $X = \{1, 2, ..., n\}$ ولكون X منتهية فإن f تقابل على X إذا وفقط إذا كان f أحادي . لـــذا يكفي أن نجد عدد التطبيقات الأحادية $f : X \to X$ حيث $X = \{1, 2, ..., n\}$. الآن ، لكـــل $f \in S_n$ لدينا $f(1) \in X$. ولذا فإنه يوجد n من الخيارات للعنصر $f(1)$. بما أن $f(1) \neq f(2)$ فإنـــه يوجـــد $n-1$ من الخيارات للعنصر $f(2)$. بصورة عامة ، بما أن $f(i) \in X - \{f(1), f(2), ..., f(i-1)\}$ فإنه يوجد $n-i+1$ من الخيارات للعنصر $f(i)$. إذن ، عـــدد التطبيقـــات الأحاديـــة $f : X \to X$ هـــو $n(n-1) \; ... \; 3 \times 2 \times 1 = n!$. ونخلص إلى أن $|S_n| = n!$ ◆

ملحوظات

(١) إذا كانت $\sigma \in S_n$ فإن $\sigma = \{(1, \sigma(1)), (2, \sigma(2)), ..., (n, \sigma(n))\}$.

في معظم الأحوال يكون من المناسب أن نستخدم الترميز:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n)\end{pmatrix}$$

بدلاً من كتابة σ كمجموعة أزواج مرتبة. هذا الترميز يسهل علينا حساب تحصيل التبديلات ، فإذا كان

$$\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \tau(1) & \tau(2) & \ldots & \tau(n)\end{pmatrix}$$

فإن

$$\tau\circ\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \ldots & \tau(\sigma(n))\end{pmatrix}$$

على سبيل المثال ، إذا كان $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}, \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}\in S_4$ فإن

$$\tau\circ\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$$

(٢) إذا كان $\sigma\in S_n$ حيث $\sigma(i)=i$ فإننا عادة ما نسقط العمود $\begin{matrix}i\\ \sigma(i)\end{matrix}$ فمثلاً ، إذا كانت $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$ فإننا نكتب $\sigma=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$.

(٣) لاحظ أنه إذا كان $\tau\in S_X$, σ فإن $\sigma^{-1}\in S_X$ و $\sigma\circ\tau\in S_X$. كما أن $I_X\in S_X$

(٤) إذا كان $\sigma\in S_n$ وكان $k\in\mathbb{Z}^+$ فإن :

$$\sigma^0=I$$

$$\sigma^k=\sigma\circ\sigma\circ\ldots\circ\sigma \quad (k \text{ من المرات})$$

$$\sigma^{-k}=(\sigma^{-1})^k$$

تعريف (١,٢)

ليكن $\sigma\in S_n$. نقول إن σ دورة طولها k (**$k-$cycle**) ونكتب $\sigma=(i_1\ i_2\ i_3\ldots\ i_k)$ إذا كان $\sigma(i_j)=i_{j+1}$ لكل $j=1,2,\ldots,k-1$ و $\sigma(i_k)=i_1$ وكان $\sigma(a)=a$ لكل $a\neq i_1,i_2,\ldots,i_k$.

كما نقول إن σ مناقلة (**transposition**) إذا كانت σ دورة طولها 2.

ملحوظة

لاحظ أن : $(i_1\ i_2\ldots\ i_k)=(i_2\ i_3\ldots\ i_k\ i_1)=\ldots=(i_k\ i_1\ i_2\ldots\ i_{k-1})$.

مثال (١,٤)

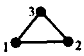
لنجد عناصر S_3. أي مجموعة التبديلات على $\{1,2,3\}$. لاحظ أن $|S_3| = 6$. وهذه التبديلات هي :

$$I=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ \rho_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ \rho_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$\mu_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\ \mu_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\ \mu_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

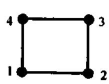
وإذا استخدمنا مفهوم الدورة تكون عناصر S_3 هي:

$$S_3=\{(1),\rho_1=(1\ 2\ 3),\rho_2=(1\ 3\ 2),\mu_1=(2\ 3),\mu_2=(1\ 3),\mu_3=(1\ 2)\}$$

لاحظ أن عناصر S_3 ما هي إلا تناظرات المثلث المتساوي الأضلاع  حيث I ، ρ_1 ، ρ_2 تقابل الدورانات بزاوية مقدارها 120 درجة حول مركز المثلث و μ_1 ، μ_2 ، μ_3 تقابل الانعكاسات حول منصفات الزوايا. ولهذا السبب تسمى S_3 أحياناً بمجموعة تناظرات المثلث المتساوي الأضلاع □

إن صياغة تناظرات المثلث المتساوي الأضلاع بدلالة S_3 هو مجرد حالة خاصة من استخدام مجموعات جزئية من S_n للتعبير عن تناظرات الأشكال الهندسية . المثال التالي يبين تناظرات المربع.

مثال (١,٥)

إذا كانت D_4 هي تناظرات المربع  فإن D_4 تحتوي على ثمانية عناصر هي :

$$I=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\rho_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},\rho_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$$

$$\rho_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix},\mu_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\mu_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\delta_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix},\delta_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$$

حيث I,ρ_1,ρ_2,ρ_3 هي الدورانات ، μ_1 ، μ_2 هي الانعكاسات حول المنصفات العمودية للأضلاع و δ_1 ، δ_2 هي الانعكاسات حول القطرين. لاحظ أيضاً أن $D_4 \subset S_4$ □

ملحوظة

إذا كان $\sigma \in S_n$ فإنه من السهل أن نجـــد عدداً $m \geq 1$ حيث $\sigma^m = I$. ولإثبـــات ذلك لاحـــظ أن $\sigma^t \in S_n$ لكل $t \geq 1$. وبما أن S_n مجموعة منتهية عدد عناصرها $n!$ حسب المبرهنة (١,٧) فإنه يوجد عددان $t_1 < t_2$ بحيث يكون $\sigma^{t_2} = \sigma^{t_1}$. وبما أن $(\sigma^{t_1})^{-1} = (\sigma^{-1})^{t_1}$ فإننا نحصل على :

$$\sigma^{t_2 - t_1} = \sigma^{t_2} \circ \sigma^{t_1} = \sigma^{t_2} \circ (\sigma^{-1})^{t_1} = \sigma^{t_2} \circ (\sigma^{t_1})^{-1} = \sigma^{t_1} \circ (\sigma^{t_1})^{-1} = I$$

وبالتالي إذا وضعنا $m = t_2 - t_1$ فإننا نخلص إلى أن $\sigma^m = I$. الآن ، مبدأ الترتيب الحسن يـــضمن لنـــا وجود أصغر عدد $k \geq 1$ بحيث يكون $\sigma^k = I$ وهذا يقترح علينا التعريف التالي:

تعريف (١,٣)

إذا كان $\sigma \in S_n$ فإن رتبة σ (**order of σ**) ويرمز لها بالرمز $o(\sigma)$ هو أصغر عدد صحيح موجب k يحقق $\sigma^k = I$.

مبرهنة (١,٨)

إذا كان $\sigma \in S_n$ حيث $o(\sigma) = k$ وكان $\sigma^m = I$ حيث $m \in \mathbb{Z}^+$ فإن $k \mid m$.

البرهان

باستخدام خوارزمية القسمة نستطيع إيجاد $q, r \in \mathbb{Z}$ حيث $m = kq + r$ ، $0 \leq r < k$. الآن :

$$\sigma^r = \sigma^{m-kq} = \sigma^m \circ (\sigma^k)^{-q} = I \circ I = I$$

ولذا باستخدام تعريف k ، نجد أن $r = 0$. إذن ، $m = kq$. وبالتالي فإن $k \mid m$ ◆

قبل إثبات المبرهنة التالية ، نذكر القارئ أنه إذا كان $m \in \mathbb{Z}^+$ فإن العلاقة $\equiv$ المعرفة على $\mathbb{Z}$ كالتالي : $a \equiv b (\bmod m)$ إذا وفقط إذا كان $m \mid (a - b)$ هي علاقة تكافؤ. تدعى هذه العلاقة بعلاقة التطابق قياس m **(congruence modulo m)**.

مبرهنة (١,٩)

إذا كانت $\sigma \in S_n$ دورة طولها k فإن $o(\sigma) = k$.

البرهان

لنفرض أن $\sigma=(a_0\ a_1\ \dots\ a_{k-1})$ دورة طولها k. لاحظ أنه لكل $j\geq 0$ نستطيع أن نبرهن باستخدام الاستقراء الرياضـــي أن $\sigma^j(a_i)=a_t$ حيـــث $1\leq i\leq k$ و $t\equiv i+j(\text{mod}\, k)$. إذن، $\sigma^k=I$.
كذلك، إذا كان $0\leq m<k$ فإن $\sigma^m(a_0)=a_{0+m}\neq a_0$. ونخلص إلى أن، $o(\sigma)=k$ ◆

تعريف (١,٤)

إذا كان $\alpha,\beta\in S_n$ فإننا نقول إنهما مترافقان **(conjugate)** إذا وجد $\sigma\in S_n$ يحقق $\sigma\circ\alpha\circ\sigma^{-1}=\beta$.

تزودنا المبرهنة التالية بطريقة سهلة لحساب مرافقات الدورات.

مبرهنة (١,١٠)

إذا كانت $\alpha=(a_0a_1\dots a_{k-1})$ دورة طولها k في S_n وكان $\sigma\in S_n$ فإن :

$$\sigma\circ\alpha\circ\sigma^{-1}=(\sigma(a_0)\sigma(a_1)\dots\sigma(a_{k-1}))$$

البرهان

لما كان σ تقابلاً على $X=\{1,2,\dots,n\}$ فإن $\sigma(X)=X$. بوضع $\beta=(\sigma(a_0)\sigma(a_1)\dots\sigma(a_{k-1}))$ فإننا سنثبت أن $(\sigma\circ\alpha\circ\sigma^{-1})(x)=\beta(x)$ لكل $x\in X$. لدينا حالتان:

الحالة الأولى : $x=\sigma(a_i)$، $0\leq i\leq k-1$. في هذه الحالة $\beta(\sigma(a_i))=\sigma(a_{i+1})$. ومن ناحية أخرى لدينا : $\sigma\circ\alpha\circ\sigma^{-1}(\sigma(a_i))=(\sigma\circ\alpha)(a_i)=\sigma(a_{i+1})$ حيث نقرأ $i+1$ قياس k.

الحالة الثانية : $x\neq\sigma(a_i)$ لكل i، $0\leq i\leq k-1$. في هذه الحالة $\beta(x)=x$. ليكن $b=\sigma^{-1}(x)$. عندئذ، $b\neq a_i$ لكل i، $0\leq i\leq k-1$. وعليه فإن :

$$(\sigma\circ\alpha\circ\sigma^{-1})(x)=(\sigma\circ\alpha)(b)=\sigma(b)=\sigma(\sigma^{-1}(x))=x$$

لأن α تثبت b. وبالتالي نخلص إلى أن $(\sigma\circ\alpha\circ\sigma^{-1})(x)=\beta(x)$ لكل $x\in X$ ◆

مثال (١,٦)

إذا كان $\in S_8$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ وكانت $\beta = (1\ 3\ 4\ 2) \in S_8$ فإن :

$$\sigma \circ \beta \circ \sigma^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(3)\ \sigma(4)\ \sigma(2)) = (3\ 6\ 7\ 8) \quad \square$$

تبين لنا المبرهنة التالية العلاقة الوثيقة بين رتب الدورات المترافقة .

مبرهنة (١,١١)

إذا كانت $\alpha = (a_1\ a_2\ \dots\ a_r), \beta = (b_1\ b_2\ \dots\ b_s) \in S_n$ فإن:

α و β مترافقتان إذا وفقط إذا كان $r = s$.

البرهان

لنفرض أولاً أن α و β مترافقتان. إذن، يوجد $\sigma \in S_n$ حيث $\beta = \sigma \circ \alpha \circ \sigma^{-1}$. بما أن σ تطبيق أحادي على $X = \{1,2,\dots,n\}$ فإن $\sigma(a_i) = \sigma(a_j)$ ، $i = j \Leftrightarrow 1 \le i, j \le r$ وباستخدام المبرهنة (١,١٠) نجد أن: $\beta = (b_1\ b_2\ \dots\ b_s) = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2)\ \dots\ \sigma(a_r))$. إذن ، $s = r$.

ولبرهان العكس ، نفرض أن $s = r$. عندئذ ، $\alpha = (a_1\ a_2\ \dots\ a_r)$ و $\beta = (b_1\ b_2\ \dots\ b_r)$.

لتكن $\in S_n$ $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \dots a_r \\ b_1 & b_2 \dots b_r \end{pmatrix}$. عندئذ :

$$\sigma \circ \alpha \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2)\ \dots\ \sigma(a_r)) = (b_1\ b_2\ \dots\ b_r) = \beta$$

وبالتالي ، فإن α و β مترافقتان ◆

تعريف (١,٥)

لتكن $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k \in S_n$. نقول إن $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ تبديلات منفصلة **(disjoint)** إذا كان لكل i ، $1 \le i \le k$ ولكل $a \in X$: $\sigma_i(a) \ne a \Rightarrow \sigma_j(a) = a$ لكل $i \ne j$ ، $1 \le j \le k$. أي أن $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ منفصلة إذا حركت σ_i العنصر a فإن a يبقى ثابتاً تحت جميع التبديلات الأخرى .

الخاصية التالية إحدى أهم خصائص التبديلات المنفصلة .

مبرهنة (١,١٢)

إذا كان $\sigma, \mu \in S_n$ تبدلين منفصلين فإن $\sigma \circ \mu = \mu \circ \sigma$.

البرهان

لنفرض أن $a \in X$. لدينا ثلاث حالات:

(أ) $\sigma(a) \neq a$. في هذه الحالة يكون $\mu(a) = a$. لنفرض أن $\sigma(a) = b$. عندئذ:

$$(\sigma \circ \mu)(a) = \sigma(\mu(a)) = \sigma(a) = b$$
$$(\mu \circ \sigma)(a) = \mu(\sigma(a)) = \mu(b)$$

نبرهن الآن أن $\mu(b) = b$. إذا كان $\mu(b) \neq b$ فإن $\sigma(b) = b = \sigma(a)$. ولذا فـإن $b = a$ وهـذا مستحيل. إذن ، $\mu(b) = b$. وبالتالي فإن: $(\sigma \circ \mu)(a) = (\mu \circ \sigma)(a)$.

(ب) $\mu(a) \neq a$ وهي حالة مشابهة للحالة (أ) إذا استبدلنا μ بالتبديل σ .

(ج) $\mu(a) = a$ و $\sigma(a) = a$. في هذه الحالة لدينا :

$(\sigma \circ \mu)(a) = \sigma(\mu(a)) = \sigma(a) = a$ كذلك ، $(\mu \circ \sigma)(a) = \mu(\sigma(a)) = \mu(a) = a$ ◆

إن أحد الأهداف الرئيسية في هذا البند هو البرهان على إمكانية كتابة أي $\sigma \in S_n$ كتحـصيل عدد منته من الدورات المنفصلة. النتيجة التالية تمهد لنا الطريق في هذا الاتجاه.

نتيجة (١,١٣)

(أ) إذا كانت μ و σ دورتين منفصلتين في S_n من الرتبة r و s على التوالي فإن :

$$o(\sigma \circ \mu) = \text{lcm}(r, s) .$$

(ب) إذا كانت $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ دورات منفصلة فإن:

$$o(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ \ldots \ \circ \sigma_k) = \text{lcm}(o(\sigma_1), o(\sigma_2), \ldots, o(\sigma_k)) .$$

البرهان

(أ) لنفرض أن $m = \text{lcm}(r, s)$. عندئذ ، يوجد $x, y \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون $m = xr = ys$. وبما أن $\sigma \circ \mu = \mu \circ \sigma$ فإن :

$$(\sigma \circ \mu)^m = \sigma^m \circ \mu^m = \sigma^{ys} \circ \sigma^{xr} = (\sigma^s)^y \circ (\sigma^r)^x = (I)^y \circ (I)^x = I \circ I = I$$

ولــذا فــإن $o(\sigma\circ\mu)|m$ حــسب المبرهنــة (١,٨). لنفــرض الآن أن $(\sigma\circ\mu)^n = I$. عندئــذ ، $\sigma^n\circ\mu^n = I$. ومنه نخلص إلى أن $\sigma^n = \mu^n = I$. لأنه لو كان أحدهما وليكن $\sigma^n \neq I$ لوجد $x\in X$ بحيث يكون $\sigma^n(x)\neq x$. وعليه فإن $\sigma(x)\neq x$. ولكن μ و σ منفــصلان . إذن ، $\mu(x)=x$. وبالتالي فإن : $(\sigma^n\circ\mu^n)(x)=\sigma^n(x)\neq x$. وهذا تناقض لكون $\sigma^n\circ\mu^n = I$. إذن ، اســتناداً إلى المبرهنة (١,٨) نجد أن $s|n$ و $r|n$. ولذا فإن $m|n$ ومنه فإن $m\le n$. وبالتالي ، فإن m هو أصــغر عدد صحيح موجب يحقق $(\sigma\circ\mu)^m = I$. أي أن ، $o(\sigma\circ\mu)=m$.

(ب) استخدم الاستقراء الرياضي على k والفقرة (أ) والخاصية

$$\mathrm{lcm}(n_1,n_2,\dots,n_t)=\mathrm{lcm}(\mathrm{lcm}(n_1,n_2,\dots,n_{t-1}),n_t)$$ ◆

نقدم الآن مفهوم المدار للتبديلات والذي نحتاجه للبرهان على أننا نستطيع كتابــة أي تبــديل كتحصيل دورات منفصلة .

مبرهنة (١,١٤)

لتكن $\sigma\in S_n$. تعرف العلاقة $\underset{\sigma}{\sim}$ على $X=\{1,2,\dots,n\}$ كالتالي :

$a\underset{\sigma}{\sim}b \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}(\sigma^k(a)=b)$. عندئذ ، $\underset{\sigma}{\sim}$ علاقة تكافؤ على X.

البرهان

(ا) بما أن $\sigma^0(a)=I(a)=a$ لكل $a\in X$ فإن $a\underset{\sigma}{\sim}a$. ولذا فإن $\underset{\sigma}{\sim}$ انعكاسية.

(ب) لاحظ أن : $a\sim b\Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}(\sigma^k(a)=b)\Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}(\sigma^{-k}(b)=a \Rightarrow b\underset{\sigma}{\sim}a$.

إذن ، $\underset{\sigma}{\sim}$ تناظرية .

(ج) لاحظ أن :

$$a\underset{\sigma}{\sim}b \text{ و } b\underset{\sigma}{\sim}c \Rightarrow \exists k,m\in\mathbb{Z}(\sigma^k(a)=b \text{ و } \sigma^m(b)=c)$$

$$\Rightarrow \sigma^{m+k}(a)=(\sigma^m\circ\sigma^k)(a)=\sigma^m(b)=c$$

إذن ، $a\underset{\sigma}{\sim}c$. وبالتالي ، فإن $\underset{\sigma}{\sim}$ متعدية ◆

ملحوظة

نكتفي بالرمز $a \sim b$ للدلالة على العلاقة أعلاه ، إذا كان التبديل σ واضح من السياق.

تعريف (١,٦)

ليكن $\sigma \in S_n$. تسمى فصول تكافؤ العلاقة ~ في المبرهنة (١,١٤) ، مدارات σ **(orbits)**.

تزودنا المبرهنة التالية بطريقة سهلة لحساب المدارات.

مبرهنة (١,١٥)

إذا كان $\sigma \in S_n$ وكان $a \in X = \{1,2,...,n\}$ فإن مدار σ الذي يحتوي a هو المجموعة :

$A = \{a, \sigma(a), \sigma^2(a), ..., \sigma^{k-1}(a)\}$ حيث k هو أصغر عدد يحقق $\sigma^k(a) = a$.

البرهان

إذا كان $x \in A$ فإنه باستخدام خاصية التعدي للعلاقة ~ نجد أن x هو أحد عناصر مدار a.

ولبرهان العكس ، نفرض أن $b \in X$ حيث $b \sim a$. إذن ، يوجد $m \in \mathbb{Z}$ حيث $\sigma^m(a) = b$.

وباستخدام خوارزمية القسمة ، يوجد $r, q \in \mathbb{Z}$ حيث: $m = kq + r$ ، $0 \le r < k$. إذن ،

$b = \sigma^m(a) = \sigma^{kq+r}(a) = ((\sigma^k)^q \circ \sigma^r)(a) = \sigma^r(a)$. وبما أن $r < k$ فإن $b = \sigma^r(a) \in A$ ◆

مثال (١,٧)

مدارات $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 3 & 9 & 7 & 4 & 1 & 10 & 6 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$ هي:

$\{1,2,5,7\}, \{3\}, \{4,9,6\}, \{8,10\}$ □

ملحوظة

لاحظ أن $\sigma \in S_n$ دورة إذا كان لها مداراً واحداً على الأكثر يحتوي على أكثر من عنصر واحد. على سبيل المثال ،

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in S_8$$

دورة ، وذلك لأن مدارات σ هي: $\{1,3,6\},\{2\},\{4\},\{5\},\{7\},\{8\}$.

مبرهنة (١,١٦)

إذا كان $I \neq \sigma \in S_n$ $(n \geq 2)$ فإنه من الممكن كتابة σ بطريقة وحيدة (باستثناء الترتيب) كتحصيل دورات منفصلة .

البرهان

لتكن $A_1, A_2, \ldots, A_r$ مدارات σ حيث $|A_i| \geq 2$ لكل i ، $1 \leq i \leq r$ ولتكن σ_i هي الدورة المعرفة على النحو التالي:

$$\sigma_i(a) = \begin{cases} \sigma(a) & , \ a \in A_i \\ a & , \ a \notin A_i \end{cases} .$$

من الواضح أن $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_r$. وبما أن المدارات منفصلة فإن $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ دورات منفصلة . ولبرهان الوحدانية ، نفرض أن : $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ \ldots \ \circ \sigma_r = \mu_1 \circ \mu_2 \circ \ \ldots \ \circ \mu_s$ حيث $r \leq s$ وحيث μ_i دورات منفصلة و σ_j دورات منفصلة.

لنفرض أن $a \in X = \{1, 2, \ldots, n\}$ حيث $\sigma_1(a) \neq a$. إذن، $\sigma_j(a) = a$ لكل $j = 2, 3, \ldots, r$ وكذلك توجد μ_i حيث $\mu_i(a) \neq a$. وبما أن μ_i دورات منفصلة فإنها تتبادل حسب المبرهنة (١,١٢) ، ولذا نستطيع أن نفرض أن $\mu_i = \mu_1$. عندئذ، $\mu_1(a) \neq a$ و $\mu_i(a) = a$ لكل $i = 2, 3, \ldots, s$. إذن ، مدار a تحت σ (وتحت μ) هو $\{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \ldots, \sigma^{k-1}(a)\}$ حيث k هو أصغر عدد يحقق $\sigma^k(a) = a$. ولذا فإن $\sigma_1 = \mu_1 = (a \ \sigma(a) \ \ldots \ \sigma^{k-1}(a))$. لاحظ أن العناصر $a, \sigma(a), \ldots, \sigma^{k-1}(a)$ جميعها مختلفة (لماذا؟). إذن ، $\sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_r = \mu_2 \circ \ \ldots \ \circ \mu_s$. وبالاستمرار على هذا المنوال ، نجد أن $r = s$ وأن $\sigma_i = \mu_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, r$ إذ لو كان $r \not\leq s$ لحصلنا على $I = \mu_{r+1} \circ \ldots \circ \mu_s$ ولكون الدورات منفصلة فإن الطرف الأيمن لا يثبت عنصراً واحداً على الأقل بينما الطرف الأيسر (وهو التبديل المحايد) يثبت جميع العناصر وهذا مستحيل ◆

مثال (١,٨)

إذا كان $\sigma \in S_{10}$ هو التبديل المقدم في المثال (١,٧) فإن $(10\ \ 8)\circ(6\ \ 9\ \ 4)\circ(7\ \ 5\ \ 2\ \ 1)=\sigma=(1\ \ 2\ \ 5\ \ 7)\circ(4\ \ 9\ \ 6)\circ(8\ \ 10)$ □

نتيجة (١,١٧)

إذا كان $\sigma \in S_n$ $(n \geq 2)$ فإنه بالإمكان كتابة σ كتحصيل مناقلات .

البرهان

استناداً إلى المبرهنة (١,١٦) ، يكفي أن نثبت أنه باستطاعتنا كتابة أي دورة طولها k كتحصيل مناقلات.

وهذا واضح لأن : $(a_1a_2\ \dots\ a_k)=(a_1\ \ a_k)\circ(a_1\ \ a_{k-1})\circ\dots\circ(a_1\ \ a_2)$ ◆

مثال (١,٩)

إذا كان $\sigma \in S_{10}$ هو التبديل المقدم في المثال (١,٧) فإنه يمكن كتابة σ كتحصيل مناقلات كالتالي :

$$\begin{aligned}\sigma &= (1\ \ 2\ \ 5\ \ 7)\circ(4\ \ 9\ \ 6)\circ(8\ \ 10)\\ &= (1\ \ 7)\circ(1\ \ 5)\circ(1\ \ 2)\circ(4\ \ 6)\circ(4\ \ 9)\circ(8\ \ 10)\end{aligned}$$ □

مثال (١,١٠)

جد رتبة $\sigma \in S_{12}$ حيث $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\3&4&2&1&8&7&9&11&12&10&5&6\end{pmatrix}$.

الحل

لاحظ أن $\sigma=(1\ \ 3\ \ 2\ \ 4)\circ(5\ \ 8\ \ 11)\circ(6\ \ 7\ \ 9\ \ 12)$. إذن ، $o(\sigma)=\mathrm{lcm}(4,3,4)=12$ □

مثال (١,١١)

سنستخدم المبرهنة (١,١٦) ، لإيجاد جميع عناصر S_4 . إذا كان $\sigma \in S_4$ فإنه إما يكون σ دورة من الرتبة 4 أو دورة طولها 3 أو كتحصيل مناقلتين منفصلتين. ولذا فإن:

$$S_4=\{I,(1\ 2),(1\ 3),(1\ 4),(2\ 3),(2\ 4),(3\ 4),$$
$$(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2),(2\ 3\ 4),(2\ 4\ 3),(1\ 3\ 4),(1\ 4\ 3),$$
$$(1\ 2\ 4),(1\ 4\ 2),(1\ 2\ 3\ 4),(1\ 3\ 2\ 4),(1\ 4\ 2\ 3),$$
$$(1\ 2\ 3\ 4),(1\ 3\ 4\ 2),(1\ 4\ 3\ 2),(1\ 2)\circ(3\ 4),$$
$$(1\ 4)\circ(3\ 2),(1\ 3)\circ(2\ 4)\}$$

لاحظ أننا قد وجدنا 24 عنصراً وهي جميع عناصر S_4 □

لقد بينا في النتيجة (١,١٧) ، أنه بالإمكان كتابة أي $\sigma\in S_n$ كتحصيل مناقلات. ونلفت انتباه القارئ إلى أنه من الممكن كتابة σ كتحصيل مناقلات بأكثر من طريقة. أي أن هذا التمثيل ليس وحيداً.

فمثلاً إذا كان $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&3&4&6&5\end{pmatrix}$ فإن :

$$\begin{aligned}\sigma&=(1\ 2)\circ(5\ 6)\\&=(1\ 3)\circ(1\ 2)\circ(2\ 3)\circ(5\ 6)\\&=(1\ 3)\circ(1\ 2)\circ(4\ 5)\circ(2\ 3)\circ(4\ 6)\circ(4\ 5)\\&=(1\ 3)\circ(1\ 2)\circ(2\ 4)\circ(2\ 3)\circ(3\ 5)\circ(3\ 4)\circ(4\ 6)\circ(4\ 5)\end{aligned}$$

لاحظ أننا كتبنا σ كتحصيل مناقلتين ، أربع مناقلات ، ست مناقلات ، ثمانية مناقلات . أي أن عدد المناقلات كان دائماً زوجياً. إن ذلك صحيح دائماً وهو ما نحن بصدد برهانه.

لنفرض أن $n\in\mathbb{Z}^+$ وأن $\Delta_n=\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$. فمثلاً ،

$$\Delta_2=(a_2-a_1)$$
$$\Delta_3=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)$$
$$\Delta_4=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)$$

تعريف (١,٧)

إذا كان $\sigma\in S_n$ فإننا نعرف $\sigma(\Delta_n)$ كالتالي: $\sigma(\Delta_n)=\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_{\sigma(j)}-a_{\sigma(i)})$.

مثال (١,١٢)

إذا كانت $\sigma=(1\ 3)\in S_n$ فعين $\sigma(\Delta_4)$.

الحل

$$\sigma(\Delta_4)=(a_{\sigma(2)}-a_{\sigma(1)})(a_{\sigma(3)}-a_{\sigma(1)})(a_{\sigma(3)}-a_{\sigma(2)})(a_{\sigma(4)}-a_{\sigma(1)})(a_{\sigma(4)}-a_{\sigma(2)})(a_{\sigma(4)}-a_{\sigma(3)})$$
$$=(a_2-a_3)(a_1-a_3)(a_1-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_2)(a_4-a_1)$$
$$=(-1)^3(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_2)(a_4-a_1)$$

إذن ، $\sigma(\Delta_4)=-\Delta_4$ □

المبرهنة التالية تعميم للمثال (١,١٢).

مبرهنة (١,١٨)

إذا كانت $\sigma=(s\ \ t)\in S_n$ فإن $\sigma(\Delta_n)=-\Delta_n$.

البرهان

بما أن $\sigma=(s\ \ t)$ فإنه من الممكن أن نفرض أن $s<t$. الآن ، لإيجاد $\sigma(\Delta_n)$ فإننا ندرس تأثير σ على عوامل Δ_n المختلفة :

(١) إذا كان $t<i$ فإن: $\sigma[(a_i-a_s)(a_i-a_t)]=(a_i-a_t)(a_i-a_s)$.

(٢) إذا كان $s<i<t$ فإن: $\sigma[(a_i-a_s)(a_t-a_i)]=(a_i-a_t)(a_s-a_i)=(a_i-a_s)(a_t-a_i)$

(٣) إذا كان $(i\neq t, i\neq s)$ أو $(j\neq t, j\neq s)$ فإن: $\sigma(a_j-a_i)=(a_j-a_i)$.

(٤) $\sigma(a_t-a_s)=(a_s-a_t)=-(a_t-a_s)$.

وبالتالي من (١) إلى (٤) نخلص إلى أن $\sigma(\Delta_n)=-\Delta_n$ ◆

مبرهنة (١,١٩)

إذا كان $\mu=\sigma_1\circ\sigma_2\circ\ \dots\ \circ\sigma_r\in S_n$ حيث σ_i مناقلات فإن $\mu(\Delta_n)=(-1)^r\Delta_n$.

البرهان

لاحظ أن : $\mu(\Delta_n)=\sigma_1\circ\sigma_2\circ\ \dots\ \circ\sigma_r(\Delta_n)=(-\Delta_n)(-\Delta_n)\ \dots\ (-\Delta_n)=(-1)^r\Delta_n$ ◆

نتيجة (١,٢٠)

لتكن $\sigma \in S_n$ ولنفرض أن: $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_r = \mu_1 \circ \mu_2 \circ \ldots \circ \mu_s$ حيث σ_i و μ_j مناقلات. عندئذ ، إما أن r و s كلاهما زوجي أو أن كليهما فردي.

البرهان

باستخدام المبرهنة (١,١٩) ، نجد أن : $\sigma(\Delta_n) = (-1)^r \Delta_n = (-1)^s \Delta_n$.

إذن ، $(-1)^r = (-1)^s$. وبالتالي ، فإن r و s كلاهما زوجي أو أن كليهما فردي ◆

تعريف (١,٨)

ليكن $\sigma \in S_n$. نقول إن σ تبديل زوجي إذا كان عدد المناقلات في كتابته كتحصيل مناقلات عدداً زوجياً. ونقول إنه فردي إذا كان عدد المناقلات فردياً.

نتيجة (١,٢١)

إذا كانت $\sigma = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_k) \in S_n$ فإن σ تبديل زوجي إذا وفقط إذا كان k عدداً فردياً.

البرهان

لاحظ أن $\sigma = (a_1\ a_k) \circ (a_1\ a_{k-1}) \circ \ldots \circ (a_1\ a_2)$. أي أن σ تحصيل $k-1$ من المناقلات. ولذا فإن σ زوجي إذا وفقط إذا كان k فردياً ◆

نتيجة (١,٢٢)

إذا كان $\sigma, \mu \in S_n$ فإن :

(أ) $\sigma \circ \mu$ تبديل زوجي إذا وفقط إذا كان كل من σ و μ زوجياً أو كان كل منهما فردياً.

(ب) $\sigma \circ \mu$ تبديل فردي إذا وفقط إذا كان أحدهما زوجياً وكان الآخر فردياً.

البرهان

نحصل على المطلوب بدراسة نوعية العدد $m+k$ ، حيث m عدد المناقلات في تحصيل σ و k عدد المناقلات في تحصيل μ ◆

مثال (١,١٣)

بين أي من التبديلين التاليين في S_9 زوجي وأيهما فردي:

$$\mu=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\5&4&2&3&7&8&1&6&9\end{pmatrix} ، \sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&6&5&9&1&8&2&7&4\end{pmatrix}.$$

الحل

$$\sigma=(1\ \ 3\ \ 5)\circ(2\ \ 6\ \ 8\ \ 7)\circ(4\ \ 9)=(1\ \ 5)\circ(1\ \ 3)\circ(2\ \ 7)\circ(2\ \ 8)\circ(2\ \ 6)\circ(4\ \ 9).$$

ولذا فإن عدد المناقلات 6 ، وبالتالي فإن σ زوجي.

$$\mu=(1\ \ 5\ \ 7)\circ(2\ \ 4\ \ 3)\circ(6\ \ 8)=(1\ \ 7)\circ(1\ \ 5)\circ(2\ \ 3)\circ(2\ \ 4)\circ(6\ \ 8).$$

ولذا فإن عدد المناقلات 5 ، وبالتالي فإن μ فردي □

لقد رأينا أن $|S_n|=n!$ ، وأن التبديل إما أن يكون زوجياً أو أن يكون فردياً. لتكن A_n و B_n مجموعتي التبديلات الزوجية والفردية على التوالي. سنبرهن الآن ، أن $|A_n|=|B_n|$.

مبرهنة (١,٢٣)

$|A_n|=|B_n|$.

البرهان

لنفرض أن δ مناقلة. عندئذ، $\delta\in B_n$. وليكن $f:A_n\to B_n$ التطبيق المعرف بالقاعدة $f(\sigma)=\sigma\circ\delta$ لكل $\sigma\in A_n$.

بما أن $\sigma\in A_n$ و $\delta\in B_n$ فإن $\sigma\circ\delta\in B_n$. سنبرهن أن f تقابل. إذا كان $\sigma,\mu\in A_n$ فإن :

$$f(\sigma)=f(\mu)\Rightarrow\sigma\circ\delta=\mu\circ\delta\Rightarrow(\sigma\circ\delta)\circ\delta^{-1}=(\mu\circ\delta)\circ\delta^{-1}$$
$$\Rightarrow\sigma\circ(\delta\circ\delta^{-1})=\mu\circ(\delta\circ\delta^{-1})\Rightarrow\sigma\circ I=\mu\circ I\Rightarrow\sigma=\mu$$

إذن ، f أحادي. إذا كان $\alpha\in B_n$ ، فإنه من الواضح أن $\alpha\circ\delta^{-1}\in A_n$. وأن :

$$f(\alpha\circ\delta^{-1})=(\alpha\circ\delta^{-1})\circ\delta=\alpha\circ(\delta^{-1}\circ\delta)=\alpha$$

إذن ، f شامل. وبالتالي ، f تقابل ونخلص إلى أن $|A_n|=|B_n|$ ◆

نتيجة (١,٢٤)

$|A_n| = \dfrac{n!}{2}$.

البرهان

بما أن $S_n = A_n \cup B_n$ وأن $A_n \cap B_n = \phi$ فإن : $|S_n| = |A_n| + |B_n|$.

ولكن $|B_n| = |A_n|$. إذن ، $2|A_n| = n$. وبالتالي ، فإن $|A_n| = \dfrac{n!}{2}$ ◆

نختم هذا البند ببرهان الخاصية المهمة التالية عن A_n والتي سنحتاجها فيما بعد.

مبرهنة (١,٢٥)

إذا كان $\sigma \in A_n$ حيث $n \geq 3$ فإنه من الممكن كتابة σ كتحصيل دورات طول كل منها 3 .

البرهان

لنفرض أن $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_r$ هو تمثيل σ كتحصيل مناقلات. بما أن $\sigma \in A_n$ فإن r عدد زوجي.

الآن ، لاحظ أن : $\sigma = (a\ \ b) = (1\ \ a) \circ (1\ \ b) \circ (1\ \ a)$. ولذا فإن:

$\sigma = (1\ \ a_1) \circ (1\ \ a_2) \circ \ldots \circ (1\ \ a_m)$ حيث m زوجي. ولكن $(1\ \ a_1) \circ (1\ \ a_2) = (1\ \ a_2\ \ a_1)$.

إذن، σ تحصيل دورات كل منها 3 ◆

تمارين (١,٢)

(١) لتكن

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 8\,2\,6\,3\,7\,4\,5\,1 \end{pmatrix} ، \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 3\,6\,4\,1\,8\,2\,5\,7 \end{pmatrix} ، \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 3\,1\,4\,7\,2\,5\,8\,6 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 2\,1\,5\,6\,4\,3\,8\,7 \end{pmatrix} ، \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 3\,6\,8\,2\,7\,4\,1\,5 \end{pmatrix} ، \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 1\,3\,6\,8\,5\,7\,2\,4 \end{pmatrix}$$

تبديلات في S_8 .

(أ) أكتب كل منها كتحصيل دورات منفصلة ومن ثم كتحصيل مناقلات (ب) احسب رتبة كل منها

(ج) أيها تبديلات زوجية وأيها تبديلات فردية؟ (د) احسب كل من $\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3)$ و $(\sigma_1 \circ \sigma_3) \circ \sigma_2$

(هـ) جد معكوس كل منها واكتبه كتحصيل مناقلات (و) جد مدارات كل منها

(ز) احسب $(\sigma_4^{-1}\circ\sigma_3)\circ\sigma_2^{-1}$

(٢) احسب التحصيلات التالية في S_9 ، ثم جد رتبة كل منها وبين أيها زوجية وأيها فردية

(أ) $(1\ 4\ 5)\circ(7\ 8)\circ(2\ 5\ 7)$ (ب) $(1\ 3\ 2\ 7)\circ(4\ 8\ 6)$

(ج) $(1\ 2)\circ(4\ 7\ 8)\circ(2\ 1)\circ(7\ 2\ 8\ 1\ 5)$ (د) $(1\ 2\ 3)\circ(4\ 5)\circ(6\ 7\ 8\ 9)$

(هـ) $(2\ 3\ 6\ 7\ 9\ 1\ 4)\circ(6\ 8\ 9\ 1\ 5\ 4\ 3\ 2)$

(٣) احسب $\alpha\circ\beta\circ\alpha^{-1}$ لكل مما يلي :

(أ) $\alpha=(1\ 2\ 5\ 7),\beta=(2\ 4\ 6)\in S_7$ (ب) $\alpha=(1\ 3)\circ(5\ 8)\ ,\ \beta=(2\ 3\ 6\ 7)\in S_8$

(ج) $\alpha=(2\ 5\ 9)\circ(1\ 3\ 6)\ ,\ \beta=(1\ 5\ 7)\circ(2\ 4\ 6\ 9)\in S_9$

(٤) إذا كانت $\sigma=(1\ \ 2\ \ 3\ \dots\ n-1)$ وكانت $\tau=(1\ \ 2)$ فأثبت أن:

(أ) $\sigma\circ\tau\circ\sigma^{-1}=(2\ \ 3)$ (ب) $\sigma^2\circ\tau\circ\sigma^{-2}=(3\ \ 4)$

(ج) $\sigma^k\circ\tau\circ\sigma^{-k}=(k+1\ \ k+2)$ حيث $k<n-1$

(٥) إذا كانت σ دورة طولها k وكانت τ مناقلة فأثبت أن $\tau\circ\sigma\circ\tau^{-1}$ دورة طولها k.

(٦) إذا كانت $\sigma=(1\ \ 2\ \ 3\ \dots\ k)\in S_n$ فأثبت أن:

(أ) $\sigma^2=(1\ \ 3\ \ 5\ \dots\ 2m-1)\circ(2\ \ 4\ \ 6\ \dots\ 2m)$ إذا كان $k=2m$.

(ب) $\sigma^2=(1\ \ 3\ \ 5\ \dots\ 2m+1\ \ 2\ \ 4\ \dots\ 2m)$ إذا كان $k=2m+1$.

(٧) جد $\alpha\in S_8$ حيث $\alpha\circ(1\ \ 3\ \ 5\ \ 7)\circ\alpha^{-1}=(2\ \ 3\ \ 6\ \ 8)$.

(٨) جد $\alpha\in S_6$ حيث $\alpha\circ(3\ \ 4)\circ(1\ \ 2)\circ\alpha^{-1}=(1\ \ 3)\circ(5\ \ 6)$.

(٩) أثبت أنه لا يمكن إيجاد تبديل α يحقق: $\alpha\circ(1\ \ 2\ \ 3)\circ\alpha^{-1}=(5\ \ 7\ \ 8)\circ(1\ \ 3)$.

(١٠) أثبت أنه لا يمكن إيجاد تبديل α يحقق : $\alpha\circ(1\ \ 2)\circ\alpha^{-1}=(1\ \ 5)\circ(3\ \ 4)$.

(١١) أثبت أن $(1\ \ 2\ \dots\ k)^{-1}=(k\ \ k-1\ \ k-2\ \dots\ 2\ \ 1)$.

(١٢) أثبت أن عدد الدورات المختلفة ذوات الطول k في S_n هو $\dfrac{n!}{k(n-k)!}$.

(١٣) ليكن $\sigma\in S_n$ تبديلاً فردياً. أثبت أن أي تبديل فردي في S_n يجب أن يكون على الصـــورة $\sigma\circ\mu$ حيث $\mu\in A_n$.

(١٤) لتكن σ دورة من الرتبة k. أثبت أن σ^m دورة إذا وفقط إذا كان $\gcd(k,m)=1$.

(١,٣) العمليات الثنائية
Binary Operations

في هذا البند سنتطرق إلى العمليات الثنائية على مجموعة والتي تعد أساس بناء الأنظمة الجبرية .

إذا جمعنا عددين صحيحين فإن ناتج هذا الجمع هو أيضاً عدد صحيح ، وإذا ضربناهما فإننا نحصل أيضاً على عدد صحيح. كذلك إذا جمعنا مصفوفتين من الدرجة $m \times n$ فإننا نحصل على مصفوفة جديدة من الدرجة نفسها، وإذا ضربنا مصفوفتين من الدرجة n فإننا نحصل أيضاً على مصفوفة من الدرجة n . إن ذلك يقترح علينا التعريف التالي للعملية الثنائية:

تعريف (١,٩)

لتكن A مجموعة غير خالية. نقول إن $*$ عملية ثنائية (**binary operation**) على A إذا كانت $*$ تطبيقاً من $A \times A$ إلى A . أي أن $*(x,y) \in A$ لكل $(x,y) \in A \times A$. سنكتب $x * y$ بدلاً من $*(x,y)$ ونقول إن A مجموعة مغلقة بالنسبة للعملية $*$.

لاحظ أن + عملية ثنائية على $\mathbb{N}$ ولكن $-$ ليست عملية ثنائية على $\mathbb{N}$ وذلك لأن $3,8 \in \mathbb{N}$ ولكن $3-8=-5 \notin \mathbb{N}$ ، أي أن $\mathbb{N}$ ليست مغلقة بالنسبة للعملية $-$.

تعريف (١,١٠)

إذا كانت $*$ عملية ثنائية على المجموعة A فإننا نسمي الزوج المرتب $(A,*)$ نظاماً جبرياً (**algebraic system**).

تعريف (١,١١)

ليكن $(A,*)$ نظاماً جبرياً.

(أ) نقول إن $*$ تجميعية (**associative**) إذا كان $x*(y*z)=(x*y)*z$ لكل $x,y,z \in A$.

(ب) نقول إن $*$ إبدالية (**commutative**) إذا كان $x*y=y*x$ لكل $x,y \in A$.

مثال (١,١٤)

كل من عمليتي الجمع والضرب على $\mathbb{R}$ (أو $\mathbb{R}^+$ أو $\mathbb{Q}$ أو $\mathbb{C}$ أو $\mathbb{Z}$) ابدالية وتجميعية □

مثال (١,١٥)

لتكن $F(\mathbb{R})$ هو مجموعة جميع التطبيقات من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ ولتكن $\circ$ هي عملية تحصيل التطبيقات. لاحظ أن $\circ$ عملية تجميعية لأنه لكل $f,g,h \in F(\mathbb{R})$ ولكل $x \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$[h\circ(g\circ f)](x) = h((g\circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h\circ g)(f(x)) = [(h\circ g)\circ f](x)$$

إذن، $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$.

ولكن $\circ$ ليست إبدالية، على سبيل المثال إذا كانت $f(x) = x^2$ و $g(x) = x-2$ فإن:

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 2$$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-2) = (x-2)^2 \neq x^2 - 2$$

ولذا فإن $f\circ g \neq g\circ f$ □

مثال (١,١٦)

في النظام الجبري $(\mathbb{Z},-)$، علمية الطرح ليست إبدالية لأن: $3-5 = 2 \neq -2 = 5-3$. كذلك $-$ ليست عملية تجميعية لأن: $(7-3)-2 = 2 \neq 6 = 7-(3-2)$ □

مثال (١,١٧)

في النظام الجبري $(M_{mn}(\mathbb{R}),+)$، حيث $M_{mn}(\mathbb{R})$ هي مجموعة جميع المصفوفات من الدرجة $m\times n$ على $\mathbb{R}$ وحيث $+$ هي عملية جمع المصفوفات فإن $+$ عملية تجميعية وإبدالية، لأن:

$A+(B+C) = (A+B)+C$ وأن $A+B = B+A$ لكل $A,B,C \in M_{mn}(\mathbb{R})$ □

مثال (١,١٨)

في النظام $(\mathbb{Q}^+,*)$ حيث $a*b = \dfrac{ab}{2}$ لكل $a,b \in \mathbb{Q}^+$. $*$ تجميعية وإبدالية لأنه لكل $a,b,c \in \mathbb{Q}^+$

لدينا: $a*(b*c)=a*\frac{bc}{2}=\frac{abc}{4}$ وأن $(a*b)*c=\frac{ab}{2}*c=\frac{abc}{4}$. كذلك :

$$a*b=\frac{ab}{2}=\frac{ba}{2}=b*a \quad \square$$

مثال (١,١٩)

لتكن $G=\{x\in\mathbb{R}:x^2<1\}$. ولتكن * معرفة على G بالقاعدة $x*y=\frac{x+y}{1+xy}$. سنبرهن على أن * عملية ثنائية ابدالية وتجميعية على G . لاحظ أولاً أن :

$$\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2<1 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2<1+2xy+x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow 0<1+x^2y^2-x^2-y^2 \Leftrightarrow 0<(1-x^2)(1-y^2)<1$$

إذن، $x*y\in G$ ومن ثم فإن G مغلقة تحت *. من السهل أن نرى أن:

$$x*(y*z)=\frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}=(x*y)*z$$

وأن: $x*y=\frac{x+y}{1+xy}=\frac{y+x}{1+yx}=y*x$. إذن، * إبدالية وتجميعية $\square$

مثال (١,٢٠)

في النظام $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},*)$ حيث $(a,b)*(c,d)=(ac,b+d)$ تكون * تجميعية وإبدالية لأن:

$$[(a,b)*(c,d)]*(e,f)=(ac,b+d)*(e,f)=(ace,b+d+f)$$

$$(a,b)*[(c,d)*(e,f)]=(a,b)*(ce,d+f)=(ace,b+d+f)$$

كذلك: $(a,b)*(c,d)=(ac,b+d)=(ca,d+b)=(c,d)*(a,b)$ $\square$

مثال (١,٢١)

إذا كانت $G=\mathbb{Q}-\{-1\}$ فـإن النظام الرياضي $(G,*)$ حيث $a*b=a+b+ab$ تجميعي وإبـدالي وذلك لأن:

$$(a*b)*c=(a+b+ab)*c=a+b+ab+c+ac+bc+abc$$
$$=a+(b+c+bc)+a(b+c+bc)=a+(b*c)+a(b*c)=a*(b*c)$$

كذلك: $a*b=a+b+ab=b+a+ba=b*a$ □

إذا كانت A مجموعة منتهية وتحتوي على عدد قليل من العناصر فإن إحدى الطرائق المناسبة لتعريف عملية ثنائية عليها تكون بإستخدام جدول يسمى عادة جدول كيلي (**Cayley's table**)، على سبيل المثال، إذا كانت $A=\{a,b,c,d\}$ فإن الجدول التالي يعرف لنا عملية ثنائية $*$ على A :

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

ولإيجاد العنصر $x*y$ فإننا نبحث عن تقاطع صف x مع عمود y .

ملحوظة

إذا كانت $*$ عملية ثنائية على مجموعة معرفة بوساطة جدول كيلي فإنها تكون إبدالية إذا كان الجدول متماثلاً حول القطر الرئيسي.

ليكن $n\in\mathbb{Z}^{+}$. من السهل أن نرى أن علاقة التطابق قياس n والمعرفة على النحو التالي: $x\equiv_n y$ إذا وفقط إذا كان $n\mid(x-y)$ لكل $x,y\in\mathbb{Z}$ هي علاقة تكافؤ على المجموعة $\mathbb{Z}$. سنرمز لمجموعة فصول تكافؤ العلاقة بالرمز $\mathbb{Z}_n$. أي أن $\mathbb{Z}_n=\{[0],[1],[2],\ \dots\ ,[n-1]\}$.

مثال (١,٢٢)

النظام الرياضي $(\mathbb{Z}_n,+_n)$ تجميعي وإبدالي حيث $[a]+_n[b]=[a+b]$ لكل $[a],[b]\in\mathbb{Z}_n$.

الحل

للبرهان على أن $+_n$ عملية ثنائية على $\mathbb{Z}_n$ نفرض أن $[a],[b],[c],[d] \in \mathbb{Z}_n$ ولنفرض أن $[a]=[c]$ وأن $[b]=[d]$. عندئذ ، $n\,|\,(a-c)$ و $n\,|\,(b-d)$. أي أن $a-c=ns$ و $b-d=nt$ حيث $t,s \in \mathbb{Z}$. ومنه فإن $(a+b)-(c+d)=n(s+t)$. ولذا فإن، $n\,|\,((a+b)-(c+d))$. وبالتالي فإن $a+b \equiv_n c+d$، أي أن $[a+b]=[c+d]$ وهذا يثبت أن $+_n$ عملية ثنائية على $\mathbb{Z}_n$. الآن :

$$([a]+_n[b])+_n[c]=[a+b]+_n[c]=[(a+b)+c]$$
$$=[a+(b+c)]=[a]+_n[b+c]=[a]+_n([b]+_n[c])$$

ولذا فإن $+_n$ تجميعية. كذلك : $[a]+_n[b]=[a+b]=[b+a]=[b]+_n[a]$. ومنه فإن $+_n$ إبدالية.

إذا أخذنا على وجه الخصوص $\mathbb{Z}_6$ فإن جدول العملية $+_6$ يكون على الصورة:

$+_6$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]

□

مثال (١,٢٣)

الزوج المرتب $(\mathbb{Z}_n, \bullet_n)$ نظام تجميعي وإبدالي حيث $[a]\bullet_n[b]=[ab]$ لكل $[a],[b] \in \mathbb{Z}_n$

الحل

بصورة مماثلة للمثال (١,٢٢) نستطيع أن نبرهن على أن $\bullet_n$ عملية تجميعية وإبدالية ولذا سنكتفي بإثبات أن $\mathbb{Z}_n$ مغلقة تحت $\bullet_n$. لنفرض أن $[a],[b],[c],[d] \in \mathbb{Z}_n$ وأن $[a]=[c]$ و $[a]=[d]$. إذن، $a-c=ns$ و $b-d=nt$ حيث $s,t \in \mathbb{Z}$. ومنه فإن:

$$\begin{aligned}(a-c)(b-d)=n^2st &\Leftrightarrow ab+cd-bc-ad=n^2st\\ &\Leftrightarrow ab-cd=n^2st-2cd+bc+ad\\ &\Leftrightarrow ab-cd=n^2st+(bc-cd)+(ad-cd)\\ &\Leftrightarrow ab-cd=n^2st+c(b-d)+d(a-c)\\ &\Leftrightarrow ab-cd=n^2st+nct+nsd\\ &\Leftrightarrow ab-cd=n(nst+ct+sd)\end{aligned}$$

إذن، $n \mid (ab-cd)$. ومنه فإن، $[ab]=[cd]$. وبالتالي، فإن $\mathbb{Z}_n$ مغلقة تحت $\bullet_n$.

إذا أخذنا على وجه الخصوص $\mathbb{Z}_6$ فإن جدول العملية $\bullet_6$ يكون على الصورة:

$\bullet_6$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[2]	[0]	[2]	[4]	[0]	[2]	[4]
[3]	[0]	[3]	[0]	[3]	[0]	[3]
[4]	[0]	[4]	[2]	[0]	[4]	[2]
[5]	[0]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

□

مثال (١,٢٤)

لتكن X مجموعة ولتكن $P(X)$ مجموعة جميع المجموعات الجزئية من X . من السهل التحقق من أن كل من $(P(X),\cup)$ و $(P(X),\cap)$ نظام تجميعي وإبدالي □

تعريف (١,١٢)

لتكن $A,B \subseteq X$. يعرف الفرق التناظري(**symmetric difference**) للمجموعتين A و B ويرمز له بالرمز $A\Delta B$ على النحو التالي:

$$A\Delta B=[A\cap(X-B)]\cup[(X-A)\cap B]=(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$$

مثال (١,٢٥)

إذا كانت $P(X)$ كما في المثال (١,٢٤). فإن النظام الجبري $(P(X),\Delta)$ تجميعي وإبدالي.

الحل

لاحظ أولاً أن: $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)=(B\cup A)-(B\cap A)=B\Delta A$

إذن، Δ إبدالية. ولإثبات الخاصية التجميعية، نستخدم للسهولة الرمز $\overline{A}=X-A$ فنلاحظ أن:

$$\begin{aligned}A\Delta(B\Delta C)&=(A\cap(\overline{B\Delta C}))\cup(\overline{A}\cap(B\Delta C))\\&=(A\cap((B\cap\overline{C})\cup(\overline{B}\cap C)))\cup(\overline{A}\cap((B\cap\overline{C})\cup(\overline{B}\cap C)))\\&=(A\cap((\overline{B}\cup C)\cap(B\cup\overline{C})))\cup((\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C))\\&=(A\cap\overline{B}\cap B)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap C\cap B)\\&\cup(A\cap C\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\\&=(A\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\end{aligned}$$

وبالمثل نستطيع أن نبرهن أن:

$$(A\Delta B)\Delta C=(A\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C).$$

إذن، $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$ □

تمارين (١,٣)

في التمارين من (١) إلى (١٥) بين ما إذا كانت العملية المعرفة على المجموعة هي عملية ثنائية ، وإذا كانت كذلك، بين ما إذا كانت تجميعية أو إبدالية.

(١) $(\mathbb{Z},*)$ حيث $x*y=(x+y)-(xy)$ لكل $x,y\in\mathbb{Z}$.

(٢) $(\mathbb{R},*)$ حيث $x*y=\max(x,y)$ لكل $x,y\in\mathbb{R}$.

(٣) $(\mathbb{R},*)$ حيث $x*y=|x+y|$ لكل $x,y\in\mathbb{R}$.

(٤) $(\mathbb{N},*)$ حيث $x*y=x^y$ لكل $x,y\in\mathbb{N}$.

(٥) $(\mathbb{Z},*)$ حيث $x*y=x+y+1$ لكل $x,y\in\mathbb{Z}$.

(٦) $(\mathbb{N},*)$ حيث $x*y=\gcd(x,y)$ لكل $x,y\in\mathbb{N}$.

(٧) $(\mathbb{N},*)$ حيث $x*y=\text{lcm}(x,y)$ لكل $x,y\in\mathbb{N}$.

(٨) $(\mathbb{R},*)$ حيث $x*y=\min(x,y)$ لكل $x,y\in\mathbb{R}$.

(٩) $(\mathbb{R},*)$ حيث $x*y=|x|+|y|$ لكل $x,y\in\mathbb{R}$.

(١٠) $(\mathbb{Q},*)$ حيث $x*y=xy+1$ لكل $x,y\in\mathbb{Q}$.

(١١) $(\mathbb{Z},*)$ حيث $x*y=x^2+y^2$ لكل $x,y\in\mathbb{Z}$.

(١٢) $(\mathbb{Z},*)$ حيث $x*y=xy^2$ لكل $x,y\in\mathbb{Z}$.

(١٣) $(\mathbb{Z},*)$ حيث $x*y=xy-x$ لكل $x,y\in\mathbb{Z}$.

(١٤) $(M_2(\mathbb{Z}),*)$ حيث $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}u & v\\ w & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b+v & 0\\ 0 & c+w\end{bmatrix}$

(١٥) $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),*)$ حيث $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}:a,b\in\mathbb{Q}\}$ وحيث

$$(a+b\sqrt{2})*(c+d\sqrt{2})=(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})$$

(١٦) إذا كان $(A,*)$ نظاماً تجميعياً وإبدالياً فأثبت أن:

$(a*b)*(c*d)=[(d*c)*a]*b$ لكل $a,b,c,d\in A$.

(١٧) لتكن S مجموعة الأعداد الأولية التي تقل عن أو تساوي 13، ولتكن * معرفة على S كالتالي:

$p*q$ هو أكبر قاسم أولي للعدد $p+q-2$

(أ) أنشئ جدول العملية * (ب) هل * تجميعية؟

(١٨) لتكن $U_n=\{[a]\in\mathbb{Z}_n:\gcd(a,n)=1\}$. أنشئ جدول $\cdot_n$ لكل من $n=7,9,12,18$.

(١,٤) المجموعات المرتبة والشبكيات

Ordered Sets and Lattices

نقدم في هذا البند مفهوم الشبكيات التي تعتبر وسيلة رئيسة في فهم البنى الجبرية ومنها الزمر.

تعريف (١,١٣)

تكون العلاقة $\leq$ المعرفة على المجموعة A علاقة ترتيب جزئي **(partial order)** إذا تحقق ما يلي:

(أ) $\leq$ انعكاسية (**reflexive**)، أي أن $a \leq a$ لكل $a \in A$.

(ب) $\leq$ تخالفية (**antisymmetric**)، أي أنه إذا كان $a \leq b$ و $b \leq a$ فإن $a = b$ لكل $a, b \in A$.

(ج) $\leq$ متعدية (**transitive**)، أي أنه إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فإن $a \leq c$ لكل $a, b, c \in A$.

مثال (١,٢٦)

من الواضح أن العلاقة $\leq$ المعرفة على $P(S)$ على النحو التالي:

$A \leq B$ إذا وفقط إذا كان $A \subseteq B$ لكل $A, B \in P(S)$ علاقة ترتيب جزئي على $P(S)$ □

مثال (١,٢٧)

لتكن $\leq$ العلاقة المعرفة على $\mathbb{Z}^+$ كالتالي:

$a \leq b$ إذا وفقط إذا كان a يقسم b لكل $a, b \in \mathbb{Z}^+$. نستطيع التحقق وبسهولة من أن $\leq$ علاقة ترتيب جزئي على $\mathbb{Z}^+$ □

تعريف (١,١٤)

إذا كانت $\leq$ علاقة ترتيب جزئي على A فإننا نسمي الزوج المرتب $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً (**partially ordered set**).

تعريف (١,١٥)

تكون العلاقة $\leq$ المعرفة على A مترابطة (**connected**) إذا كان $a \leq b$ أو $b \leq a$ لكل $a, b \in A$. إذا كانت $\leq$ علاقة مترابطة فإننا نقول إن العنصرين a, b قابلان للمقارنة (**comparable**).

تعريف (١,١٦)

تكون المجموعة المرتبة جزئياً $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة كلياً (**totally ordered set**) إذا كانت $\leq$ مترابطة.

مثال (١,٢٨)

المجـــموعة المرتبة جزئياً $(P(S),\leq)$ في المثال (١,٢٦) ليست مجموعة مرتبة كلـــياً وذلـــك لأن العنصرين $\{a\},\{b\}$ حيث $a \neq b$ غير قابلين للمقارنة □

مثال (١,٢٩)

المجموعة المرتبة جزئياً $(\mathbb{Z}^+,\leq)$ في المثال (١,٢٧) ليست مجموعة مرتبة كلياً وذلك لأن العنصرين 2 و 5 غير قابلين للمقارنة □

مثال (١,٣٠)

لتكن $A=\{1,2,4,8,16,32\}$ والعلاقة $\leq$ معرفة كالتالي: $a \leq b$ إذا وفقط إذا كان a يقسم b. من الواضح أن $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة كلياً □

تعريف (١,١٧)

لتكن $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً. ولتكن $B \subseteq A$.

(أ) نقول إن $a \in A$ حد علوي **(upper bound)** للمجموعة B إذا كان $x \leq a$ لكل $x \in B$.
ونقول إن $a \in A$ حد سفلي **(lower bound)** للمجموعة B إذا كان $a \leq x$ لكل $x \in B$.

(ب) لـــيكن $a \in A$ حـــد علـــوي للمجموعـــة B. نقـــول إن a أصـــغر حـــد علـــوي **(least upper bound)** إذا كان $a \leq b$ لكل حد علوي b.

(ج) لـــيكن $a \in A$ حـــد ســـفلي للمجموعـــة B. نقـــول إن a أكـــبر حـــد ســـفلي **(greatest lower bound)** إذا كان $a \geq b$ لكل حد سفلي b.

ملحوظات

لتكن $(A;\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً و $B \subseteq A$ وليكن $a,b \in A$.

(١) من الممكن أن يكون للمجموعة B أكثر من حد علوي واحد. فمـــثلاً، 12,24,36 حـــدود علوية للمجموعة $\{4,6\}$ في المثال (١,٢٧).

(٢) من الممكن أن لا يوجد للمجموعة B حد علوي، وكذلك من الممكن أن لا يوجد لها أصغر حد علوي.

(٣) إذا وجد للمجموعة B أصغر حد علوي فإنه يجب أن يكون وحيداً. فمثلاً، إذا كان كل من a, b أصغر حد علوي للمجموعة B فإن $a \leq b$ و $b \leq a$ ومن ثم، فإن $a = b$.

(٤) الملحوظات (١)، (٢)،(٣) تبقى صحيحة في حالة الحد السفلي وأكبر حد سفلي.

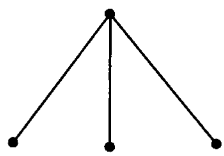
(٥) سنرمز لأصغر حد علوي (إن وجد) للمجموعة B بالرمز $\text{lub}(B)$ ولأكبر حد سفلي (إن وجد) بالرمز $\text{glb}(B)$. وعلى وجه الخصوص سنرمز لـ $\text{glb}\{a, b\}$ إن وجد بالرمز $a \wedge b$ و لـ $\text{lub}\{a, b\}$ إن وجد بالرمز $a \vee b$.

تعريف (١,١٨)

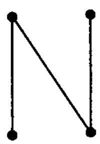
لتكن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً و $x, y \in A$. نقول إن y يغطي x **(covers)** إذا كان $x \leq y$ و $x \neq y$ وإذا وجد $z \in A$ بحيث يكون $x \leq z \leq y$ فإن $x = z$ أو $z = y$.

ملحوظة

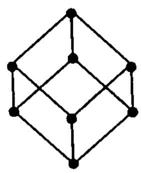
إذا كانت $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً فإننا نستطيع أن نستخدم فكرة الغطاء لتمثيلها بمخطط يدعى شكل هاس **(Hasse diagram)** كالتالي: نمثل عناصر A بنقاط المستوى وإذا كان $x \leq y$ فإن y يقع أعلى x ونصل بخط بين x و y إذا وفقط إذا كان y يغطي x . على سبيل المثال كل شكل من الأشكال التالية يمثل مجموعة مرتبة جزئياً



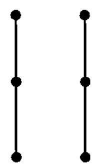
(أ)



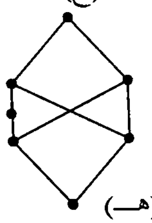
(ب)



(ج)



(د)



(هـ)

تعريف (١,١٩)

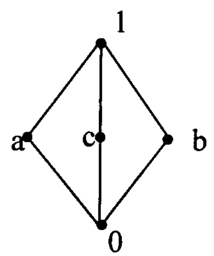
لتكن $(L,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً. نقول إن L شبكية **(Lattice)** إذا كان كل مـــن $a \vee b$ و $a \wedge b$ موجوداً لكل $a, b \in L$.

مثال (١,٣١)

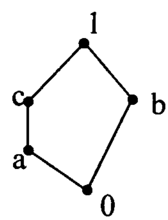
إذا كانت $(P(S),\leq)$ المجموعة المرتبة جزئياً المقدمة في المثال (١,٢٦) وكانت $A, B \in P(S)$ فإنه مـــن السهل أن نرى أن $A \wedge B = A \cap B$ وأن $A \vee B = A \cup B$ ولذا فإن $(P(S),\leq)$ شبكية □

مثال (١,٣٢)

من السهل أن نرى أن كل من المجموعتين المرتبتين جزئياً المبينتين في الشكلين أدناه شبكية .



M_5



N_5

تقدم لنا المبرهنة التالية بعض الخصائص الأساسية للشبكيات.

مبرهنة (١,٢٦)

إذا كانت $(L,\leq)$ شبكية وكان $a, b, c \in L$ فإن :

(ش١) (أ) $a \vee b = b \vee a$ (ب) $a \wedge b = b \wedge a$

(ش٢) (أ) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ (ب) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

(ش٣) (أ) $a \vee a = a$ (ب) $a \wedge a = a$

(ش٤) (أ) $a \vee (a \wedge b) = a$ (ب) $a \wedge (a \vee b) = a$

البرهان

سنبرهن الفقرتين (ش١)(أ) و (ش٤)(أ) ونترك باقي الفقرات كتمرين للقارئ.

(ش١) بما أن المجموعتين $\{a,b\}$ و $\{b,a\}$ متساويتين فإن :

$$a \vee b = \text{lub}\{a,b\} = \text{lub}\{b,a\} = b \vee a$$

(ش٤) بما أن $a \le a$ وأن $a \wedge b \le a$ فإن a حد علوي للمجموعة $\{a, a \wedge b\}$. ولذا نجد باستخدام تعريف الحد الأصغر أن $a \vee (a \wedge b) \le a$ وبما أن $a \vee (a \wedge b) = \text{lub}\{a, a \wedge b\}$ فإننا نجد أن $a \le a \vee (a \wedge b)$. وبالتالي نخلص إلى أن $a = a \vee (a \wedge b)$ ◆

مبرهنة (١,٢٧)

إذا كانت $(A, \le)$ مجموعة مرتبة جزئياً وكان $a, b \in A$ فإن العبارات التالية متكافئة :

(أ) $a \le b$ (ب) $a \vee b = b$ (ج) $a \wedge b = a$

البرهان

نحصل على التكافؤات مباشرة من تعريف الحد العلوي الأصغر والحد السفلي الأكبر ونترك التفاصيل للقارئ ◆

تعريف (١,٢٠)

نقول أن الشبكة $(L, \le)$ قياسية (**modular**) إذا تحقق الشرط التالي لكل $a, b, c \in L$:

$$a \le c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$$

مثال (١,٣٣)

كل من الشبكة المقدمة في المثال (١,٣١) والشبكة M_5 في المثال (١,٣٢) قياسية أما الشبكة N_5 في المثال (١,٣٢) فهي ليست قياسية لأن:

$a \le c$ ولكن $a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a \ne c = (a \vee b) \wedge c$ □

تعريف (١,٢١)

نقول إن الشبكية $(L,\leq)$ توزيعية (**distributive**) إذا حققت أحد الشرطين التاليين لكل $a,b,c \in L$:

ت١) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

ت٢) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

مثال (١,٣٤)

الشبكية المقدمة في المثال (١,٣١) توزيعية ولكن كل من الشبكتين M_5 و N_5 في المثال (١,٣٢) ليست توزيعية لأن $a \vee (c \wedge b) = a \vee 0 = a \neq (a \vee c) \wedge (a \vee b) = 1$ في كل منهما □

مبرهنة (١,٢٨)

إذا كانت الشبكية $(L,\leq)$ توزيعية فإنها قياسية .

البرهان

لنفرض أن $(L,\leq)$ توزيعية وأن $a,b,c \in L$ حيث $a \leq c$. عندئذ ،

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c$. وبالتالي فإن $(L,\leq)$ قياسية ◆

ملحوظة

عكس المبرهنة (١,٢٨) ليس صحيحاً ، على سبيل المثال ، الشبكية M_5 قياسية ولكنها ليست توزيعية لأن $a \vee (c \wedge b) = a \vee 0 = a \neq 1 = (a \vee c) \wedge (a \vee b)$.

تمارين (١,٤)

(١) لتكن A مجموعة والعلاقة $<$ على A متعدية وغير انعكاسية ($a \not< a$ لكل $a \in A$). ولتكن $\leq$ علاقة معرفة على A كالتالي: $a \leq b$ إذا وفقط إذا كان $a < b$ أو $a = b$. أثبت أن $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

(٢) لتكن $<$ معرفة على $\mathbb{Z}^+$ كالتالي: $m < n \Leftrightarrow 2m \mid n$.

(أ) أثبت أن $<$ غير انعكاسية ومتعدية.

(ب) استخدم تمرين (١) لتعريف علاقة ترتيب جزئي على $\mathbb{Z}^+$.

(ج) لتكن $V_{24} = \{n \in \mathbb{Z}^+ : 24 \text{ يقسم } n\}$ والعلاقة على V_{24} هي كما في الفقــرة (ب). ارســم شكل هاس للمجموعة المرتبة جزئياً $(V_{24}, \leq)$.

(د) هل $(V_{24}, \leq)$ شبكية؟ ولماذا؟

(٣) لتكن $\leq$ معرفة على $\mathbb{Q}^+$ كالتالي: $r \leq s \Leftrightarrow \frac{s}{r} \in \mathbb{Z}^+$.

(أ) أثبت أن $(\mathbb{Q}^+, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

(ب) إذا كانت $V = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 6\}$ فارسم شكل هاس للمجموعــة المرتبــة جزئيــاً $(V, \leq)$ حيث $\leq$ كما في الفقرة (أ).

(٤) إذا كانت $A = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ فأثبت أن $(A, \leq)$ شبكية قياسية حيث $\leq$ هي علاقة الترتيب الاعتيادية.

(٥) أثبت أي مجموعة مرتبة كلياً يجب أن تكون شبكية توزيعية.

(٦) إذا كانت $(L, \leq)$ شبكية وكان $a, b, c \in L$ فأثبت أن:

(أ) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$.

(ب) $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

(ج) $a \leq b \Rightarrow a \vee (b \wedge c) \leq b \wedge (a \vee c)$.

(٧) لتكن $(L, \leq)$ شبكية

(أ) أثبت أن L توزيعية إذا وفقط إذا كان $a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ لكل $a, b, c \in L$.

(ب) أثبت أن L توزيعية إذا وفقط إذا كان $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ لكل $a, b, c \in L$.

(ج) أثبت أن L قياسية إذا وفقط إذا كان $a \leq b \Rightarrow b \wedge (a \vee c) \leq a \vee (b \wedge c)$ لكل $a, b, c \in L$.

(د) أثبت أن L قياسية إذا و فقط إذا كان $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = b \wedge ((a \wedge b) \vee c)$ لكل $a, b, c \in L$.

(٨) إذا كانت $(L, \leq)$ شبكية توزيعية، وكان $a, b, c \in L$ حيث $a \wedge b = a \wedge c$ و $a \vee b = a \vee c$ فأثبت أن $b = c$.

(٩) إذا كانت $(L, \leq)$ شبكية قياسية وكان $a, b, c \in L$ حيث $a \wedge c = b \wedge c$، $a \vee c = b \vee c$ وحيث $a \leq b$ فأثبت أن $a = b$.

(١٠) إذا كانت $(L, \leq)$ شبكية فأثبت أن $(L, \leq)$ تحقق الشرط (ت١) إذا وفقط إذا كانت تحقق الشرط (ت٢).

الفصل الثاني

مفاهيم أساسية في الزمر
BASIC CONCEPTS IN GROUPS

تعد نظرية الزمر إحدى أهم الأنظمة الجبرية ، إذ يستخدم مفهوم الزمرة في العديد من فروع الرياضيات البحتة ، كالهندسة والتبولوجيا والتحليل الدالي وكثير غيرها . أما على صعيد الرياضيات التطبيقية ، فقد تم استخدامها في مجالات ميكانيكا الكم والأشعة السينية والتحليل الطيفي وعلم التعمية.

أصبحت نظرية الزمر أداة أساسية لا يمكن الإستغناء عنها ، ليس فقط لأنها تقودنا إلى اكتشافات جديدة ، ولكن لأنها أيضاً تختصر لنا العمليات الحسابية وتمكننا من وضع الكثير من النتائج الصعبة في صورة موجزة .

كان أول من استخدم مفهوم الزمرة هو الرياضي جوزيف لويس لاجرانج (**Joseph Louis Lagrange**) في العام ١٧٧٠م أثناء محاولته إيجاد جذور كثيرات الحدود حيث قادته هذه المحاولة لدراسة تبديلات هذه الجذور . أما الرياضي الفرنسي الشهير إيفرست جالوا (**Evariste Galois**) فكان أول من استخدم كلمة "زمرة" أثناء محاولته استكمال عمل لاجرانج ، حيث استطاع البرهان على استحالة استخدام طريقة استخلاص الجذور لحل معادلات كثيرات الحدود من الدرجة التي تزيد عن أربعة ، وكان ذلك في العام ١٨٣٠م . أثناء هذه الحقبة الزمنية كان اهتمام الرياضيين منصباً فقط على دراسة زمر التحويلات (مجموعة من التطبيقات تحت عملية التحصيل) ، حيث تبنى الرياضي فيلكس كلاين (**Felix Klein**) الذي عاش في الفترة بين عامي ١٨٤٩و١٩٢٥م ، مفهوم الزمرة لتوحيد جميع موضوعات الهندسة ، عندما أعلن أثناء إلقائه إحدى محاضراته عن إمكانية النظر إلى أي موضوع من مواضيع الهندسة على أنه مجموعة من اللامتغيرات من زمرة معينة من زمر التحويلات .

ويذكر المؤرخون أن من وضع أول محاولة لتعريف الزمرة باستخدام المسلمات فهو الرياضي الألماني ليوبولد كرونكر (**Leopold Kronecker**) في بحث كتبه عام ١٨٧٠م ولكنه لم يقم بنشره . وكان أول من نشر تعريفاً مجرداً للزمرة باستخدام المسلمات هو الرياضي ديكسون

(Dickson) في مجلة الجمعية الرياضية الأمريكية تحت عنوان " تعريف الزمرة والحقل بوساطة مسلمات مستقلة " ، وكان ذلك في العقد الأول من القرن العشرين .

ينقسم هذا الفصل إلى بندين ، في البند الأول نقدم تعريف الزمرة وندرس خصائصها الأساسية ونقدم بعض الأمثلة . والبند الثاني مخصص لدراسة الزمر الجزئية إضافة إلى صنف من الزمر الهامة والبسيطة التركيب ، ألا وهي الزمر الدورية .

(١ , ٢) تعريف الزمرة وخصائصها الأساسية
Definition And Basic Properties of The Group

ينصب اهتمامنا في هذا البند (بل في هذا الكتاب) على دراسة الأنظمة الرياضية المؤلفة من مجموعة غير خالية معرف عليها عملية ثنائية تحقق مجموعة من المسلمات ، وباستخدام هذه المسلمات ، نستطيع الحصول على الكثير من النتائج الهامة التي يتمتع بها هذا النظام . قبل أن نقدم التعريف المجرد للزمرة ، نستعرض بعض الأمثلة ، لإرشادنا إلى المسلمات التي يفترض أن تتحقق لكي نحصل على زمرة.

دعنا نحاول إيجاد حل المعادلة $x + a = b$ في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. لا شك في أن القارئ سبق وأن تعرض لهذه المعادلة في مرحلة التعليم المتوسط ، وتعلم أنه لحل هذه المعادلة يجب عليه أن يتبع الخطوات التالية :

$$\begin{aligned} x+a=b &\Leftrightarrow (x+a)+(-a)=b+(-a) \\ &\Leftrightarrow x+(a+(-a))=b-a \\ &\Leftrightarrow x+0=b-a \\ &\Leftrightarrow x=b-a \end{aligned}$$

لاحظ أن ما احتجناه لحل المعادلة هو أن عملية الجمع تجميعية ، وجود العدد 0 ووجود العدد $-a$.

وكمثال آخر ، لو حاولنا حل المعادلة $ax = b$ حيث $a \neq 0$ فإننا نتبع الخطوات نفسها حيث نستخدم الخاصية التجميعية للضرب ، خاصية العدد 1 وخاصية المقلوب $\frac{1}{a}$ لنحصل على $x = \frac{b}{a}$.

وأخيراً لو حاولنا حل المعادلة المصفوفية $AX = B$ حيث A مصفوفة قابلة للعكس فإننا نستخدم الخاصية التجميعية للمصفوفات ، خاصية المصفوفة المحايدة I_n وخاصية معكوس المصفوفة A^{-1} لنحصل على $X = A^{-1}B$.

إن ذلك يقترح علينا التعريف التالي :

تعريف (١ , ٢)

يكون النظام الرياضي $(G, *)$ حيث G مجموعة غير خالية و $*$ عملية ثنائية على G زمرة (**group**) إذا تحقق ما يلي :

(١) $\forall a, b, c \in G \,(a*(b*c)=(a*b)*c)$.

(٢) $\exists e \in G \,(\forall a \in G\,(a*e=e*a=a))$.

(٣) $\forall a \in G, \exists b \in G\,(a*b=b*a=e)$.

مبرهنة (١ , ٢)

إذا كانت $(G, *)$ زمرة فإن :

(١) العنصر e في الفقرة (٢) من التعريف (١ , ٢) وحيد .

(٢) العنصر b في الفقرة (٣) من التعريف (١ , ٢) وحيد .

البرهان

(١) لنفرض أن $e_1 \in G$ عنصر آخر يحقق : $\forall a \in G\,(a * e_1 = e_1 * a = a)$. عندئذ :

$e_1 = e_1 * e = e * e_1 = e$.

(٢) لنفرض أن $c \in G$ عنصر آخر يحقق : $\forall a \in G (a*c=c*a=e)$. عندئذ :

$$b=b*e=b*(a*c)=(b*a)*c=e*c=c \quad \blacklozenge$$

ملحوظات

(١) يسمى العنصر الوحيد الذي يحقق الفقرة (٢) من تعريف (٢,١) العنصر المحايد (**identity element**) ونرمز له عادة بالرمز e .

(٢) يسمى العنصر الوحيد الذي يحقق الفقرة (٣) من تعريف (٢,١) نظير العنصر a (**inverse of a**) ونرمز له عادة بالرمز a^{-1} .

(٣) في العادة إذا كانت $(G, *)$ زمرة فإننا نستخدم عملية الضرب بدلاً من $*$ ونكتب ab بدلاً من $a * b$.كما نكتب أحياناً G بدلاً من $(G, *)$.

(٤) نكتب عادة abc بدلاً من $a(bc)$ أو $(ab)c$.

تعريف (٢ , ٢)

إذا كانت G زمرة تحقق : $\forall a , b \in G (ab = ba)$ فإننا نقول إن G زمرة إبدالية أو آبلية **(commutative or abelian group)** .

قبل أن نقدم أمثلة على الزمر ، نستعرض بعض الخصائص الرئيسة لها .

مبرهنة (٢ , ٢)

إذا كانت G زمرة فإنه لكل $a , b \in G$ لدينا :

(١) $(a^{-1})^{-1} = a$.

(٢) $(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$.

(٣) G ابدالية إذا وفقط إذا كان $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$.

(٤) يوجد حل وحيد لكل من المعادلتين $ax = b$ و $ya = b$ في الزمرة G .

البرهان

(١) بما أن $a^{-1} a = e = a a^{-1}$ وأن a^{-1} وحيد فإننا نخلص إلى أن $(a^{-1})^{-1} = a$.

(٢) لاحظ أن : $(ab)(b^{-1} a^{-1}) = ((ab) b^{-1}) a^{-1} = (ae) a^{-1} = aa^{-1} = e$.

كما أن : $(b^{-1} a^{-1})(ab) = (b^{-1} (a^{-1} a)) b = (b^{-1} e) b = b^{-1} b = e$.

وباستخدام وحدانية النظير نحصل على : $(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$.

(٣) لنفرض أن G إبدالية . عندئذٍ بإستخدام الفقرة (٢) نجد أن :

$$(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1} = a^{-1} b^{-1} .$$

ولبرهان العكس ، نفرض أن $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$ لكل $a , b \in G$. عندئذٍ ،

$$b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1} .$$

ومنه فإن $ab = [(ab)^{-1}]^{-1} = [(ba)^{-1}]^{-1} = ba$.

وبالتالي فإن G إبدالية .

(٤) من الواضح أن $x = a^{-1}b$ حل للمعادلة $ax = b$ وأن $y = b a^{-1}$ حل للمعادلة $ya = b$. ولبرهان الوحدانية ، نفرض أن c حل آخر للمعادلة $ax = b$. عندئذٍ ، $c = ec = (a^{-1} a) c = a^{-1} (ac) = a^{-1} b$. ولذا فإن $x = a^{-1}b$ هو الحل الوحيد للمعادلة $ax = b$. وبالمثل يمكن برهان وحدانية $b a^{-1}$ ◆

المبرهنة التالية تدعى قانون الاختصار للزمر .

مبرهنة (٣ , ٢) [قانوني الاختصار (cancellation laws)]

إذا كانت G زمرة وكان $a, b, c \in G$ فإن :

(١) $ac = bc \Rightarrow a = b$ (٢) $ca = cb \Rightarrow a = b$

البرهان

(١) لاحظ أن :

$$ac = bc \Rightarrow (ac)c^{-1} = (bc)c^{-1} \Rightarrow a(cc^{-1}) = b(cc^{-1}) \Rightarrow ae = be \Rightarrow a = b$$

(٢) مماثل للفقرة (١) ◆

نتيجة (٤ , ٢)

إذا كانت G زمرة فإن كل عنصر من عناصر G يظهر مرة واحدة فقط في كل صف ومرة واحدة فقط في كل عمود في جدول كيلي .

البرهان

ليكن $b \in G$. ولنفرض أن b يظهر مرتين في صف يحتوي العنصر a . عندئذٍ ، يوجد $x, y \in G$ ، $x \neq y$ بحيث يكون : $ay = b$ و $ax = b$. ولذا فإن $ax = ay$. وباستخدام قانون الاختصار نجد أن $x = y$ وهذا تناقض . وبالمثل ، إذا ظهر b مرتين في عمود يحتوي العنصر a ◆

لتكن G زمرة ، $a \in G$ و $n \in \mathbb{Z}$. نعرف a^n استقرائياً (inductively) كالتالي :

$$a^0 = e$$

$$a^n = a\,a^{n-1} \text{ ، } n > 0$$

$$a^n = (a^{-1})^n \text{ ، } n < 0 \text{ .}$$

أما إذا استخدمنا عملية الجمع على G بدلاً من الضرب فإن a^n يكتب na ويكون تعريفه كالتالي :

$$0a = 0$$

$$na = a + (n-1)a \text{ ، } n > 0$$

$$na = (-n)(-a) \text{ ، } n < 0 \text{ .}$$

تزودنا المبرهنة التالية بالخصائص التقليدية لقوى عناصر الزمرة والتي نترك برهانها للقارئ .

مبرهنة (٥ , ٢)

إذا كانت G زمرة وكان $a , b \in G$ وكان $m , n \in \mathbb{Z}^+$ فإن :

(١) $a^m a^n = a^{m+n}$ (٢) $(a^n)^{-1} = a^{-n}$

(٣) $(a^m)^n = a^{mn}$ (٤) إذا كانت G إبدالية فإن $(ab)^n = a^n b^n$ ◆

مبرهنة (٦ , ٢)

إذا كانت G زمرة وكان $a , b \in G$ فإن $(a^{-1} b a)^n = a^{-1} b^n a$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

البرهان

باستخدام الاستقراء الرياضي على n . من الواضح أن العبارة صحيحة عندما $n = 1$.

نفرض الآن أن العبارة صحيحة عندما $n = k$. عندئذٍ ،

$$(a^{-1}ba)^{k+1} = (a^{-1}ba)^k (a^{-1}ba) = (a^{-1}b^k a)(a^{-1}ba)$$
$$= a^{-1}b^k eba = a^{-1}b^k ba = a^{-1}b^{k+1}a$$

وبالتالي فإن العبارة صحيحة عند $n = k + 1$ ◆

مبرهنة (٧ , ٢)

إذا كان G نظاماً رياضياً تجميعياً يحقق :

(١) يوجد عنصر $e \in G$ (يسمى محايد أيسر) بحيث يكون : $ea = a$ لكل $a \in G$

(٢) لكل $a \in G$ يوجد $b \in G$ (يسمى نظير a الأيسر) بحيث يكون $ba = e$

فإن G زمرة .

البرهان

لاحظ أولاً أن قانون الاختصار الأيسر محققاً تحت شروط المبرهنة .

لنفرض أن $a \in G$. بإستخدام (٢) ، يوجد $b \in G$ حيث $ba = e$. ولذا فإن :

$$ba = e = ee = (ba)e = b(ae) .$$

وباستخدام قانون الاختصار الأيسر نجد أن $a = ae$. إذن ، e محايد أيمن . كذلك ،

$$be = b = eb = (ba)b = b(ab) .$$

ولذا فإنه باستخدام قانون الاختصار الأيسر نجد أن $e = ab$. ولذا فإن b نظير أيمن للعنصر a .

وبالتالي فإننا نخلص إلى أن G زمرة ◆

مبرهنة (٨ , ٢)

ليكن G نظاماً رياضياً تجميعياً . إذا كان لكل من المعادلتين $ax = b$ و $ya = b$ حل في G لكل $a , b \in G$ فإن G زمرة .

البرهان

لنفرض أن $a \in G$. بما أن للمعادلة $ya = a$ حل في G فإنه يوجد $e \in G$ يحقق $ea = a$. سنبرهن أن e محايد أيسر . ولذا ، نفرض أن $b \in G$. بما أن للمعادلة $ax = b$ حل في G فإنه يوجد $c \in G$ يحقق $ac = b$. ولذا فإن :

$eb = e\,(ac) = (ea)\,c = ac = b$ لكل $b \in G$. ومنه فإن e محايد أيسر .

الآن ، للمعادلة $ya = e$ حل في G . إذن ، يوجد $d \in G$ يحقق $da = e$. ومنه فإن d نظير أيسر للعنصر a . وبالتالي ، فإن G زمرة استناداً للمبرهنة (٢,٧) ◆

تعريف (٣ , ٢)

إذا كانت G زمرة حيث G مجموعة منتهية فإننا نقول إن G زمرة منتهية (**finite group**) . وإذا كانت G مجموعة غير منتهية فإننا نقول إن G زمرة غير منتهية (**infinite group**) . سنرمز لعدد عناصر الزمرة G بالرمز $|G|$ ونسميه رتبة الزمرة G (**order of G**) .

تبين لنا المبرهنة التالية إمكانية استبدال مسلمتي العنصر المحايد والنظير بقانون الاختصار للزمر المنتهية .

مبرهنة (٩ , ٢)

ليكن G نظاماً رياضياً تجميعياً منتهياً . إذا حققت G قانوني الاختصار فإن G زمرة .

البرهان

لنفرض أن $G = \{ a_1 , a_2 , \dots , a_n \}$ وأن $a \in G$. عندئذٍ :

$H = \{ aa_1 , aa_2 , \dots , aa_n \} \subseteq G$.

إذا كان $aa_i = aa_j$ فإن $a_i = a_j$. إذن ، جميع عناصر H مختلفة . وبما أن $|G| = |H|$ فإن $H = G$.

وبما أن $a \in G$ فإن $a \in H$. ولذا فإن $aa_i = a$. ومنه فإن : $aa = (aa_i)a = a(a_ia)$.

وباستخدام قانون الاختصار ، نجد أن $a = a_i a$. ندعي أن a_i عنصر محايد أيسر.
وذلك لأنه لو كان $b \in G$ فإن $b = aa_j$. ولذا فإن :
$a_i b = a_i (aa_j) = (a_i a) a_j = aa_j = b$. إذن ، a_i محايد أيسر .
نبرهن الآن على وجود نظير أيسر لكل عنصر من عناصر G . لنفرض أن $c \in G$ عندئذ ، بطريقة مماثلة لما سبق نجد أن $G = \{ a_1 c , a_2 c , \ldots , a_n c \}$. الآن ، بما أن $a_i \in G$ فإنه يوجد j حيث $a_j c = a_i$. إذن ، a_j نظير أيسر للعنصر c . وبالتالي فإن G زمرة ◆

قبل الاسترسال في دراسة المزيد من الخصائص الأساسية للزمر نتوقف قليلاً لتقديم بعض الأمثلة .

مثال (١ , ٢)
كل من $(\mathbb{Z} , +)$ ، $(\mathbb{Q} , +)$ ، $(\mathbb{R} , +)$ و $(\mathbb{C} , +)$ زمرة إبدالية حيث 0 هو العنصر المحايد و $-a$ هو نظير a .كذلك كل من $(\mathbb{Q}^* , .)$ ، $(\mathbb{R}^* , .)$ ، $(\mathbb{C}^* , .)$ زمرة إبدالية حيث 1 هو العنصر المحايد و $\frac{1}{a}$ هو نظير a . لاحظ أن $(\mathbb{Z} - \{0\} , .)$ ليست زمرة لأنه على سبيل المثال ، لا يوجد نظير للعنصر 2 □

مثال (٢ , ٢)
إذا كانت $M_{mn}(\mathbb{R})$ هي مجموعة جميع المصفوفات من الدرجة $m \times n$ التي عناصرها أعداد حقيقية فإن $(M_{mn}(\mathbb{R}) , +)$ زمرة إبدالية حيث العنصر المحايد هو المصفوفة الصفرية ونظير المصفوفة A هو $-A$ □

مثال (٣ ، ٢)
إذا كانت $GL(n , \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$ فإن $(GL(n , \mathbb{R}) , .)$ زمرة غير إبدالية حيث العنصر المحايد هو I_n ونظير A هو A^{-1} . تعرف هذه الزمرة باسم الزمرة الخطية العامة من الدرجة n **(general linear group of degree n)** □

مثال (٤ , ٢)

($\mathbb{Z}_n , +_n$) زمرة إبدالية حيث العنصر المحايد هو[0] ونظير [a] هو[−a] □

مثال (٥ , ٢)

($\mathbb{Z}_6 -\{[0]\} , \cdot_6$) ليست زمرة لأنه على سبيل المثال ، لا يوجد نظير للعنصر [2] (تأكد من ذلك!) □

مثال (٦ , ٢)

إذا كانت $U_n = \{[a] \in \mathbb{Z}_n : \gcd(a , n) = 1\}$ فإن ($U_n , \cdot_n$) زمرة إبدالية . من الواضح أن العملية $\cdot_n$ تجميعية وإبدالية وأن [1] هو العنصر المحايد . وإذا كان $[a] \in U_n$ فإن $\gcd(a , n) = 1$. ولذا فإنه يوجد $x , y \in \mathbb{Z}$ حيث $ax + ny = 1$. ومنه فإن $ax \equiv 1 \pmod n$. أي أن $[1] = [x] \cdot_n [a] = [ax]$. وبالتالي ، فإن [x] هو نظير[a] □

مثال (٧ , ٢)

($S_n , \circ$)حيث S_n هي مجموعة التبديلات على { 1 , 2 , ... , n } و∘ هي عملية تحصيل التبديلات زمرة غير إبدالية لكل $n \geq 2$ وتسمى زمرة التبديلات □

لقد وجدنا في المثال (٤ , ١) عناصر S_3 وهي :

$$S_3 = \{(1),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2),(2\ 3),(1\ 3),(1\ 2)\} .$$

ومن السهل على القارئ أن يتحقق من أن جدول كيلي لهذه الزمرة هو :

∘	(1)	(1 2 3)	(1 3 2)	(2 3)	(1 3)	(1 2)
(1)	(1)	(1 2 3)	(1 3 2)	(2 3)	(1 3)	(1 2)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1)	(1 2)	(2 3)	(1 3)
(1 3 2)	(1 3 2)	(1)	(1 2 3)	(1 3)	(1 2)	(2 3)
(2 3)	(2 3)	(1 3)	(1 2)	(1)	(1 2 3)	(1 3 2)
(1 3)	(1 3)	(1 2)	(2 3)	(1 3 2)	(1)	(1 2 3)
(1 2)	(1 2)	(2 3)	(1 3)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1)

كذلك ، وجدنا في المثال (١١ , ١) عناصر الزمرة S_4 ، وندعو القارئ إلى التحقق من أن الجدول التالي هو جدول كيلي للزمرة S_4 :

o	(1)	(1234)	(13) o (24)	(1432)	(123)	(1342)	(243)	(14)	(132)	(34)	(124)	(1432)
(1)	(1)	(1234)	(13)o(24)	(1432)	(123)	(1342)	(243)	(14)	(132)	(34)	(124)	(1432)
(1234)	(1234)	(13)o(24)	(1432)	(1)	(1324)	(143)	(12)	(234)	(14)	(123)	(1342)	(243)
(13)o(24)	(13)o(24)	(1432)	(1)	(1234)	(142)	(23)	(134)	(1243)	(234)	(1324)	(143)	(12)
(1432)	(1432)	(1)	(1234)	(13)o(24)	(34)	(124)	(1423)	(132)	(1243)	(142)	(23)	(134)
(123)	(123)	(1342)	(243)	(14)	(132)	(34)	(124)	(1432)	(1)	(1234)	(13) o (24)	(1432)
(1342)	(1342)	(243)	(14)	(123)	(24)	(14)o(23)	(13)	(12)o(34)	(1423)	(132)	(34)	(124)
(243)	(243)	(14)	(123)	(1342)	(143)	(12)	(234)	(1324)	(12)o(34)	(24)	(14)o(23)	(13)
(14)	(14)	(123)	(1342)	(243)	(1234)	(13)o(24)	(1432)	(1)	(1324)	(143)	(12)	(234)
(132)	(132)	(34)	(124)	(1423)	(1)	(1234)	(13)o(24)	(1432)	(123)	(1342)	(243)	(14)
(34)	(34)	(124)	(1423)	(132)	(1243)	(142)	(23)	(134)	(1432)	(1)	(1234)	(13)o(24)
(124)	(124)	(1423)	(132)	(34)	(14)o(23)	(13)	(12)o(34)	(24)	(134)	(1243)	(142)	(23)
(1423)	(1423)	(132)	(34)	(124)	(1342)	(243)	(14)	(123)	(24)	(14)o(23)	(13)	(12)o(34)
(12)	(12)	(234)	(1324)	(143)	(23)	(134)	(1243)	(142)	(13)	(12)o(34)	(24)	(14)o(23)
(234)	(234)	(1324)	(143)	(12)	(13)o(24)	(1432)	(1)	(1234)	(142)	(23)	(134)	(1243)
(1324)	(1324)	(143)	(12)	(234)	(14)	(123)	(1342)	(243)	(1234)	(13)o(24)	(1432)	(1)
(143)	(143)	(12)	(234)	(1324)	(12)(34)	(24)	(14)o(23)	(13)	(243)	(14)	(123)	(1342)
(23)	(23)	(134)	(1243)	(142)	(13)	(12)o(34)	(24)	(14)o(23)	(12)	(234)	(1342)	(143)
(134)	(134)	(1243)	(142)	(23)	(124)	(1423)	(132)	(34)	(14)o(23)	(13)	(12)o(34)	(24)
(1243)	(1243)	(142)	(23)	(134)	(1432)	(1)	(1234)	(13)o(24)	(34)	(124)	(1423)	(132)
(142)	(142)	(23)	(134)	(1243)	(234)	(1324)	(143)	(12)	(13)o(24)	(1432)	(1)	(1234)
(13)	(13)	(12)o(34)	(24)	(14)o(23)	(12)	(234)	(1324)	(143)	(23)	(134)	(1243)	(142)
(12)o(34)	(12)o(34)	(24)	(14)o(23)	(13)	(243)	(14)	(123)	(1342)	(143)	(12)	(234)	(1324)
(24)	(24)	(14)o(23)	(13)	(12)o(34)	(1423)	(132)	(34)	(124)	(1342)	(243)	(14)	(123)
(14)o(23)	(14)o(23)	(13)	(12)o(34)	(24)	(134)	(1243)	(142)	(23)	(124)	(1423)	(132)	(34)

o	(12)	(234)	(1324)	(143)	(23)	(134)	(1243)	(142)	(13)	(12) o (34)	(24)	(14) o (23)
(1)	(12)	(234)	(1324)	(143)	(23)	(134)	(1243)	(142)	(13)	(12)o(34)	(24)	(14)o(23)
(1234)	(134)	(1243)	(142)	(23)	(124)	(1423)	(132)	(34)	(14)o(23)	(13)	(12)o(34)	(24)
(13)o(24)	(1423)	(132)	(34)	(124)	(1342)	(243)	(14)	(123)	(24)	(14)o(23)	(13)	(12)o(34)
(1432)	(243)	(14)	(123)	(1342)	(143)	(12)	(234)	(1324)	(12)o(34)	(24)	(14)o(23)	(13)
(123)	(13)	(12)o(34)	(24)	(14)o(23)	(12)	(234)	(1324)	(143)	(23)	(134)	(1243)	(142)
(1342)	(234)	(1324)	(143)	(12)	(13)o(24)	(1432)	(1)	(1234)	(142)	(23)	(134)	(1243)
(243)	(1432)	(1)	(1234)	(13)o(24)	(34)	(124)	(1423)	(132)	(1243)	(142)	(23)	(134)
(14)	(124)	(1423)	(132)	(34)	(14)o(23)	(13)	(12)o(34)	(24)	(134)	(1243)	(142)	(23)
(132)	(23)	(134)	(1243)	(142)	(13)	(12)o(34)	(24)	(14)o(23)	(12)	(234)	(1324)	(143)
(34)	(12)o(34)	(24)	(14)o(23)	(13)	(243)	(14)	(123)	(1342)	(143)	(12)	(234)	(1324)
(124)	(14)	(123)	(1342)	(243)	(1234)	(13)o(24)	(1432)	(1)	(1324)	(143)	(12)	(234)
(1423)	(13)o(24)	(1432)	(1)	(1234)	(142)	(23)	(134)	(1243)	(234)	(1324)	(143)	(12)
(12)	(1)	(1234)	(13)o(24)	(1432)	(123)	(1342)	(243)	(14)	(132)	(34)	(124)	(1423)
(234)	(1342)	(243)	(14)	(123)	(24)	(14)o(23)	(13)	(12)o(34)	(1423)	(132)	(34)	(124)
(1324)	(14)o(23)	(13)	(12)o(34)	(24)	(134)	(1243)	(142)	(23)	(124)	(1423)	(132)	(34)
(143)	(1243)	(142)	(23)	(134)	(1432)	(1)	(1234)	(13)o(24)	(34)	(124)	(1423)	(132)
(23)	(132)	(34)	(124)	(1423)	(1)	(1234)	(13)o(24)	(1432)	(123)	(1342)	(243)	(14)
(134)	(1234)	(13)o(24)	(1432)	(1)	(1324)	(143)	(12)	(234)	(14)	(123)	(1342)	(243)
(1243)	(143)	(12)	(234)	(1324)	(12)o(34)	(24)	(14)o(23)	(13)	(243)	(14)	(123)	(1342)
(142)	(24)	(14)o(23)	(13)	(12)o(34)	(1423)	(132)	(34)	(124)	(1342)	(243)	(14)	(123)
(13)	(123)	(1342)	(243)	(14)	(132)	(34)	(124)	(1423)	(1)	(1234)	(13)o(24)	(1432)
(12)o(34)	(34)	(124)	(1423)	(132)	(1243)	(142)	(23)	(134)	(1432)	(1)	(1234)	(13)o(24)
(24)	(142)	(23)	(134)	(1243)	(234)	(1324)	(143)	(12)	(13)o(24)	(1432)	(1)	(2134)
(14)o(23)	(1324)	(143)	(12)	(234)	(14)	(123)	(1342)	(243)	(1234)	(13)o(24)	(1432)	(1)

مثال (٢ , ٨)

لتكن $V=\{e,a,b,c\}$ مجموعة ولتكن . علمية ثنائية معرفة على V بواسطة جدول كيلي :

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

من السهل التحقق من أن $(V,.)$ زمرة ابدالية. يطلق على هذه الزمرة ، زمرة كلاين الرابعة **(Klein 4-group)** □

مثال (٢ , ٩)

إذا كانت X مجموعة غير خالية فقد بينا في المثال (١,٢٥) أن النظام $(P(X),\Delta)$ تجميعي وإبدالي. لاحظ أيضاً أنه لكل $A\in P(X)$ لدينا :

$$A\,\Delta\,\phi = (A-\phi)\cup(\phi-A) = A$$

وأن $A\,\Delta\,A = (A-A)\cup(A-A) = \phi\cup\phi = \phi$.

ولذا فإن ϕ هو العنصر المحايد ونظير A هو A . وبالتالي فإن $(P(X),\Delta)$ زمرة ابدالية □

مثال (٢ , ١٠)

لقد بينا في المثال (١,١٨) أن النظام $(\mathbb{Q}^+ , *)$ حيث $a*b=\dfrac{ab}{2}$ تجميعي وإبدالي . لاحظ أيضاً أنه لكل $a\in\mathbb{Q}^+$ لدينا : $a*2=\dfrac{(a)(2)}{2}=a$. كما أن $2 = \dfrac{(a)(\frac{4}{a})}{2} = a*\dfrac{4}{a}$.

ولذا فإن 2 هو العنصر المحايد وإن نظير a هو $\dfrac{4}{a}$. إذن ، $(\mathbb{Q}^+ , *)$ زمرة إبدالية □

مثال (٢ , ١١)

لقد بينا في المثال (١,١٩) أن النظام $(G, *)$ حيث $G=\{x\in\mathbb{R}: x^2<1\}$ وحيث

$x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$ نظام تجميعي وإبدالي . لاحظ أيضاً أنه لكل $x\in G$ لدينا :

$x*0=\dfrac{x+0}{1+0x}=x$. كما أن : $x*(-x)=\dfrac{x+(-x)}{1+(x)(-x)}=0$.

إذن ، العنصر المحايد هو 0 ونظير x هو $-x$. وبالتالي فإن $(G , *)$ زمرة إبدالية □

المبرهنة التالية تقدم لنا طريقة لإنشاء زمرجديدة من زمر معلومة .

مبرهنة (١٠ , ٢)

لتكن $G_1 , G_2 , \ldots, G_n$ زمراً . ولتكن $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$. ولنعرف العملية الثنائية على G على النحو التالي :

$(a_1 , a_2 , \ldots, a_n)(b_1 , b_2 , \ldots, b_n) = (a_1b_1 , a_2b_2 , \ldots, a_nb_n)$. عندئذ :

(أ) G زمرة (ب) إذا كانت G_i إبدالية لكل i فإن G إبدالية .

البرهان

(أ) لكل $(a_1 , a_2 , \ldots, a_n), (b_1 , b_2 , \ldots, b_n), (c_1 , c_2 , \ldots, c_n) \in G$ لدينا :

$$\begin{aligned}
&(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)[(b_1 , b_2 , \ldots , b_n)(c_1 , c_2 , \ldots , c_n)]\\
&= (a_1 , a_2 , \ldots , a_n)(b_1c_1 , b_2c_2 , \ldots , b_nc_n)\\
&=(a_1 (b_1 c_1), a_2 (b_2 c_2),\ldots,a_n(b_n c_n))\\
&= ((a_1b_1) c_1 , (a_2b_2) c_2 , \ldots , (a_nb_n) c_n)\\
&= (a_1b_1 , a_2b_2 , \ldots , a_nb_n)(c_1 , c_2 , \ldots , c_n)\\
&= [(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)(b_1 , b_2 , \ldots , b_n)](c_1 , c_2 , \ldots , c_n)
\end{aligned}$$

إذن ، النظام تجميعي .

العنصر المحايد هو $(e_1 , e_2 , \ldots, e_n)$ حيث e_i هو محايد G_i لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ لأن

$(a_1 , a_2 , \ldots, a_n)(e_1 , e_2 , \ldots, e_n) = (a_1 , a_2 , \ldots, a_n)$.

وأخيراً ، $(a_1 , a_2 , \ldots, a_n)^{-1} = (a_1^{-1} , a_2^{-1} , \ldots, a_n^{-1})$ لأن :

$$(a_1 , a_2 , \ldots, a_n)(a_1^{-1}, a_2^{-1} , \ldots, a_n^{-1}) = (a_1a_1^{-1} , a_2a_2^{-1} , \ldots, a_na_n^{-1}) = (e_1 , e_2 , \ldots, e_n)$$

إذن ، G زمرة .

(ب) لنفرض أن كل من G_i إبدالية . الآن :

$$\begin{aligned}
(a_1 , a_2 , \ldots, a_n)(b_1 , b_2 , \ldots, b_n) &= (a_1b_1 , a_2b_2 , \ldots, a_nb_n)\\
&= (b_1a_1 , b_2a_2 , \ldots, b_na_n) = (b_1 , b_2 , \ldots, b_n)(a_1 , a_2 , \ldots, a_n)
\end{aligned}$$

ولذا ، فإن G إبدالية ◆

تسمى الزمرة G في المبرهنة (٢,١٠) ، زمرة الضرب المباشر الخارجي

(**external direct product**) للزمر $G_1 , G_2 , \ldots, G_n$ ، وسندرس خواصها بتفصيل أكثر في وقت لاحق من هذا الكتاب .

ننتقل الآن إلى مفهوم هام جداً في دراسة الزمر وهو مفهوم رتب عناصر الزمرة .

تعريف (٤ , ٢)

لتكن G زمرة وليكن $a \in G$. إذا وجد عدداً صحيحاً موجباً n بحيث يكون $a^n = e$ فإن أصغر عدد صحيح موجب يحقق ذلك يسمى رتبة (**order**) العنصر a . وإذا استحال وجود مثل هذا العدد n فإننا نقول إن a ذو رتبة غير منتهية (**of infinite order**) . نرمز لرتبة العنصر a بالرمز $o(a)$.

سنرى في فصول قادمة أن معرفة رتب عناصر الزمرة يقودنا إلى معرفة الكثير عن البنية الجبرية للزمرة، وفي مواضيع كثيرة يصنف لنا هذه الزمرة .

ليكن $a \in G$ ذو رتبة غير منتهية . من الواضح أن رتبة العنصر a^k لكل $k \geq 1$ غير منتهية أيضاً . ولكن الوضع مختلف إذا كانت رتبة a منتهية حيث تقدم لنا المبرهنة التالية طريقة لحساب رتبة a^k بدلالة رتبة a .

مبرهنة (١١ , ٢)

لتكن G زمرة وليكن $a \in G$ حيث $o(a) = n$. عندئذ :

(أ) إذا كان $a^m = e$ حيث $m \in \mathbb{Z}^+$ فإن $n \mid m$.

(ب) إذا كان $t \in \mathbb{Z}^+$ حيث $\gcd(t, n) = d$ فإن $o(a^t) = \dfrac{n}{d}$.

البرهان

(أ) باستخدام خوارزمية القسمة يوجد عددان صحيحان q , r يحققان :

$m = nq + r$ ، $0 \leq r < n$.

الآن : $a^r = a^{m-nq} = a^m a^{-nq} = a^m (a^n)^{-q} = e(e)^{-q} = e$. وبما أن n هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق $a^n = e$ فإننا نخلص إلى أن $r = 0$. ولذا فإن $m = nq$. وبالتالي ، فإن $n \mid m$.

(ب) بما أن $\gcd(t, n) = d$ فإن يوجد عددان صحيحان u , v حيث :

$\gcd(u,v)=1$ ، $n=dv,\ t=du$. لنفرض أن $o(a^t)=k$. سنبرهن أن $k=\frac{n}{d}$. الآن،
$a^{kt}=e$. إذن ، بإستخدام الفقـــرة (أ) نجــد أن $n\,|\,kt$. أي أن $kt=nr$ حيـــث $r\in\mathbb{Z}$.
الآن، $kt=nr \Rightarrow kdu=dvr \Rightarrow ku=vr$. إذن ، $v\,|\,ku$ و $\gcd(u,v)=1$. ولـــــــذا
فإن $v\,|\,k$. أي أن $\frac{n}{d}\,|\,k$. ومن ناحية أخرى لدينا :
$(a^t)^{\frac{n}{d}}=a^{\frac{nt}{d}}=a^{\frac{ndu}{d}}=a^{nu}=(a^n)^u=e^u=e$. إذن ، بإســـتخدام الفقـــرة (أ) نجـــد
أن $k=o(a^t)\,|\,\frac{n}{d}$. وبما أن k و $\frac{n}{d}$ موجبان فإننا نخلص إلى أن $k=\frac{n}{d}$ ◆

نتيجة (١٢ , ٢)
إذا كان $a\in G$ حيث $o(a)=n$ فإن : $o(a^t)=n$ إذا وفقط إذا كان $\gcd(t,n)=1$.

البرهان
لنفرض أولاً أن $o(a^t)=n$. باستخدام المبرهنة (١١ , ٢) نجد أن :
$n=o(a^t)=\dfrac{n}{\gcd(t,n)}$. ولذا فإن $\gcd(t,n)=1$. ولبرهان العكس ، نفرض
أن $\gcd(t,n)=1$. إذن ، $o(a^t)=\dfrac{n}{\gcd(t,n)}=\dfrac{n}{1}=n$ ◆

تزودنا النتيجة التالية بطريقة سهلة لحساب رتب عناصر الزمر الإبدالية .

نتيجة (١٣ , ٢)
لتكن G زمرة إبدالية ولتكن $a,b,a_1,a_2,\ldots,a_k\in G$ حيث $o(a_i)=r_i$ لكل
$i=1,2,\ldots,k$ ، $o(b)=s$ و $o(a)=r$. عندئذٍ :
(أ) $o(ab)=\ell cm(r,s)$.
(ب) $o(a_1a_2\ldots a_k)=\ell cm(r_1,r_2,\ldots,r_k)$.

البرهان
(أ) لنفرض أن $m=\ell cm(r,s)$ وأن $n=o(ab)$. باستخدام المبرهنة (٢,٥) نجد
أن $(ab)^m=a^m b^m=ee=e$. إذن ، $n\,|\,m$. و من ناحية أخرى لدينا :

. $o(ab) = n \Rightarrow (ab)^n = e \Rightarrow a^n b^n = e$

ومنه فإن $a^n = b^n = e$ (لأنه لو كان $a^n \neq e$ فإن $a^n = b^{-n} \neq e$. ولذا فإن $a^n b^n \neq e$).

إذن، $s|n$ و $r|n$. ولذا فإن $\ell cm(r, s) = m|n$. وبالتالي ، نخلص إلى أن $m = n$.

(ب) استخدم الفقرة (أ) والاستقراء الرياضي على k لتحصل على المطلوب ◆

ملحوظة

لاحظ أن النتيجة (١٣ , ٢) ليست بالضرورة صحيحة إذا كانت G ليست إبدالية . على سبيل المثال ، إذا كان $a = (2\ 3\ 4), b = (2\ 3) \in S_4$ فإن $ab = (2\ 4)$. ولكن

. $2 = o(ab) \neq 6 = \ell cm(o(a), o(b))$

(١ , ١ , ٢) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

إذا كان $(G, *)$ نظاماً رياضياً حيث $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ وحيث

$(a, b) * (c, d) = (ac, b + d)$ لكل $(a, b), (c, d) \in G$ فأثبت أن :

(١) $(G, *)$ زمرة إبدالية (٢) G تحتوي على عنصر واحد فقط من الرتبة 2.

(٣) G لا تحتوي على عناصر من الرتبة 3 .

الحل

(١) من السهل التحقق من أن * عملية تجميعية وإبدالية . العنصر المحايد هو $(1, 0) \in G$ لأن :

$(1, 0) * (a, b) = (1a, 0 + b) = (a, b)$ لكل $(a, b) \in G$.

وأخيراً نظير العنصر $(a, b) \in G$ هو $(\frac{1}{a}, -b)$ لأن :

$(\frac{1}{a}, -b) * (a, b) = (\frac{1}{a}a, -b + b) = (1, 0)$. بالتالي فإن $(G, *)$ زمرة إبدالية.

(٢) لاحظ أولاً أن $(-1, 0) \in G$ من الرتبة 2 لأن $(1, 0) = (-1, 0) * (-1, 0)$.

لنفرض الآن أن (a, b) من الرتبة 2 . عندئذ ، $(a, b) * (a, b) = (a^2, b + b) = (1, 0)$.

ومنه فإن $a^2 = 1$ و $b = 0$. أي أن : $b = 0, a = \pm 1$. إذا كان $a = 1$ فإن $(a, b) = (1, 0)$ وهذا مستحيل . إذن ، $a = -1$. وبالتالي $(-1, 0)$ هو العنصر الوحيد من الرتبة 2 .

(٣) لنفرض أن $(a, b) \in G$ من الرتبة 3 . عندئذ ، $(a, b)^3 = (a^3, 3b) = (1, 0)$.

ومنه فإن $a = 1$ و $b = 0$. أي أن $(a, b) = (1, 0)$. وبالتالي فإن G لا تحتوي على عناصر من

الرتبة 3 Δ

تمرين (٢)

إذا كانت G زمرة حيث $a^2 = e$ لكل $a \in G$ فأثبت أن G زمرة إبدالية .

الحل

لاحظ أولاً أن $a = a^{-1}$ لكل $a \in G$. لنفرض الآن أن $a , b \in G$. عندئذ :

$(ab)^2 = e \Rightarrow abab = e \Rightarrow ab = b^{-1}a^{-1} = ba$. وبالتالي فإن G إبدالية Δ

تمرين (٣)

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها $2n$ فأثبت أنه يوجد $e \neq a \in G$ حيث $a^2 = e$.

الحل

لنفرض أن $S = \{g \in G : g \neq g^{-1}\}$. عندئذ ، $e \notin S$. وإذا كان $g \in S$ فإن $g^{-1} \in S$. ولذا فإن $|S|$ زوجي. ومنه فإن $|\{e\} \cup S|$ فردي. وبما أن $\{e\} \cup S \subseteq G$ وعدد عناصر G زوجي فإنه يوجد $a \in G$ حيث $a \notin \{e\} \cup S$. ومنه فإن $a \neq e$ وأن $a \notin S$. وبالتالي فإن $a = a^{-1}$. أي أن $a^2 = e$ Δ

تمرين (٤)

إذا كانت G زمرة حيث $(ab)^3 = a^3 b^3$ و $(ab)^5 = a^5 b^5$ لكل $a , b \in G$ فأثبت أن G زمرة إبدالية .

الحل

لاحظ أن : $(ab)^3 = a^3b^3 \Rightarrow ababab = a\,a^2b^2b \Rightarrow (ba)^2 = a^2 b^2$.

وبالمثل ، بما أن $(ab)^5 = a^5 b^5$ فإن $(ba)^4 = a^4 b^4$. الآن :

$a^4 b^4 = (ba)^4 = [(ba)^2]^2 = (a^2 b^2)^2 = a^2 b^2 a^2 b^2$. ومنه فإن

$a^2 b^2 = b^2 a^2 = (ab)^2 = abab$. وبالتالي فإن $ab = ba$ لكل $a , b \in G$ Δ

تمرين (٥)

إذا كانت G زمرة وكان $a , b \in G$ حيث $a^{-1}b^2 a = b^3$ و $a^2 = e$ فأثبت أن $b^5 = e$.

الحل

بما أن $a^2 = e$ فإن $a = a^{-1}$. الآن :

$$a^{-1}b^2a = b^3 \Rightarrow b^2a = ab^3 \Rightarrow a = b^{-2}\,a\,b^3 \ .$$

$$e = a^2 = b^{-2}a\,b^3b^{-2}\,a\,b^3 = b^{-2}\,ab\,ab^3 \Rightarrow b^2 = abab^3 \ .$$

$$b^2 = abab^3 \Rightarrow e = abab \Rightarrow a^{-1} = bab \Rightarrow a = bab \ .$$

$$b^3 = a^{-1}b^2a = abba \Rightarrow b^5 = babbab = aa = a^2 = e \quad \Delta$$

تمارين (١ , ٢)

بين أياً من الأنظمة الجبرية في التمارين من (١) إلى (١٥) زمرة . إذا كان النظام زمرة فبين فيما إذا كانت إبدالية ، وإذا لم يكن زمرة فبين أي الشروط غير محققة .

(١) $(\mathbb{Z}, *)$ حيث $x * y = x - y$.

(٢) $(\mathbb{Z}, *)$ حيث $x * y = x + y + xy$.

(٣) $(\mathbb{N}, *)$ حيث $x * y = x + y$.

(٤) $(\mathbb{Z}, *)$ حيث $x * y = x + y - xy$.

(٥) $(\mathbb{N}, *)$ حيث $x * y = x^y$.

(٦) $(\mathbb{Z}, *)$ حيث $x * y = x + y + 1$.

(٧) $(\mathbb{N}, *)$ حيث $x * y = \gcd(x, y)$.

(٨) $(\mathbb{Z}, *)$ حيث $x * y = x^2 + y^2$.

(٩) $(\mathbb{Z}, *)$ حيث $x * y = xy^2$.

(١٠) $(\mathbb{Z}, *)$ حيث $x * y = xy - x$.

(١١) $(\mathbb{Q}, *)$ حيث $x * y = xy + 1$.

(١٢) $(\mathbb{Q} - \{-1\}, *)$ حيث $x * y = x + y + xy$.

(١٣) $(Q_5, *)$ حيث $x * y = x + y$ وحيث

$$Q_5 = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : \gcd(a, b) = 1 \wedge 5 \mid b \right\} \ .$$

(١٤) $(\mathbb{R}, *)$ حيث $x * y = |x + y|$.

(١٥) $(G,*)$ حيث $x*y=y$ وحيث G مجموعة تحتوي على أكثر من عنصر.

(١٦) لتكن $U=\{1, w, w^2, \dots, w^{n-1}\}$ حيث $w=\cos(\frac{2\pi}{n})+i\sin(\frac{2\pi}{n})$.
أثبت أن $(U, *)$ زمرة إبدالية حيث * هي عملية ضرب الأعداد المركبة الاعتيادية .

(١٧) لتكن $G=\{L_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ حيث $L_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تطبيقاً معرفاً بالقاعدة $L_{a,b}(x)=ax+b$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

(أ) أثبت أن $(G, \circ)$ زمرة غير إبدالية .

(ب) إذا كانت $H=\{L_{a,b} \in G : a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R}\}$ فأثبت أن $(H, \circ)$ زمرة غير إبدالية .

(ج) إذا كانت $K=\{L_{1,b} \in G : b \in \mathbb{R}\}$ فأثبت أن $(K, \circ)$ زمرة إبدالية .

(د) أثبت أن $L_{a,b} \circ Y \circ L^{-1}_{a,b} \in H$ لكل $L_{a,b} \in G$ و $Y \in H$.

(هـ) جد جميع $L_{a,b} \in G$ حيث $L_{a,b} \circ L_{1,x} = L_{1,x} \circ L_{a,b}$ لكل $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

(١٨) لتكن $G=\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ والعملية الثنائية معرفة على G على النحو التالي :

$$(a,b)*(c,d)=(a+bc, bd).$$

أثبت أن $(G, *)$ زمرة غير إبدالية .

(١٩) لتكن $SL(n, \mathbb{R})=\{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$. أثبت أن $(SL(n, \mathbb{R}), .)$ زمرة غير إبدالية . تسمى هذه الزمرة ، الزمرة الخطية الخاصة من الدرجة n ‏(**special linear group of degree** n) .

(٢٠) لتكن $G=\left\{\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z}\right\}$. أثبت أن G زمرة إبدالية حيث العملية الثنائية هي ضرب المصفوفات . أثبت أيضاً أن رتبة كل عنصر(عدا المحايد) في G غير منتهية .

(٢١) أثبت أن رتبة جميع عناصر (ما عدا المحايد) الزمرة $(\mathbb{Q}, +)$ غير منتهية .

(٢٢) هل يوجد عنصر (عدا المحايد) في الزمرة $(\mathbb{Q}^*, .)$ رتبته منتهية ؟

(٢٣) ليكن p عدداً أولياً ولتكن $Q_P=\left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : \gcd(b, p) = 1\right\}$. أثبت أن $(Q_P, +)$ زمرة إبدالية رتبة جميع عناصرها (ما عدا المحايد) غير منتهية .

(٢٤) ليكن p عدداً أولياً ولتكن $Q^P=\left\{\frac{a}{p^n} : \frac{a}{p^n} \in \mathbb{Q}\right\}$. أثبت أن $(Q^P, +)$ زمرة إبدالية رتبة جميع عناصرها (ما عدا المحايد) غير منتهية .

(٢٥) لتكن $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

(أ) هل النظام $(G,*)$ زمرة حيث $(a,b)*(c,d)=(ac+bd, ad+bd)$ ؟

(ب) هل النظام $(G,*)$ زمرة حيث $(a,b)*(c,d)=(ac-bd, ad+bc)$ ؟

(٢٦) أثبت أن النظام $(\mathbb{R}^*, *)$ زمرة حيث

$$a*b=\begin{cases} ab\ , & a>0 \\ \dfrac{a}{b}\ , & a<0 \end{cases}.$$

(٢٧) لتكن $G = GL(2, \mathbb{Q})$.

(أ) عين رتبة كل من العناصر $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\dfrac{-1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

(ب) جد عنصر في G رتبته 2 .

(ج) أثبت أن رتبة $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ غير منتهية .

(د) جد $A, B, C \in G$ بحيث يكون $AB=BA$ ، $BC=CB$ ولكن $AC \neq CA$.

(٢٨) ليكن $(G,*)$ نظاماً رياضياً حيث $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ وحيث $(a,b)*(c,d)=(ac, bc+d)$.

أثبت أن G زمرة تحتوي على عدد غير منته من العناصر التي رتبة كل منها 2 . هل يوجد $a \in G$ حيث $o(a) = 3$ ؟

(٢٩) إذا كانت G زمرة وكان $a \in G$ حيث $a^2 = a$ فأثبت أن $a=e$.

(٣٠) إذا كانت G زمرة غير إبدالية فأثبت أن $|G| \geq 6$.

(٣١) إذا كانت G زمرة و $a, b \in G$ حيث $ab=ba$ فأثبت أن :

(أ) $ab^{-1} = b^{-1}a$.

(ب) $(xax^{-1})(xbx^{-1}) = (xbx^{-1})(xax^{-1})$ لكل $x \in G$.

(٣٢) إذا كانت G زمرة حيث $(ab)^2 = a^2b^2$ لكل $a, b \in G$ فأثبت أن G إبدالية .

(٣٣) لتكن G زمرة . إذا كان $(ab)^n = a^n b^n$ ، $(ab)^{n+1} = a^{n+1} b^{n+1}$ و $(ab)^{n+2} = a^{n+2} b^{n+2}$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ ولكل $a, b \in G$ فأثبت أن G إبدالية .

(٣٤) إذا كانت G زمرة وكان $a, b, c \in G$ حيث $abc=e$ فأثبت أن $bca=e$.

(٣٥) إذا كانت G زمرة وكان $a, b \in G$ حيث $ab = ba^{-1}$, $ba = ab^{-1}$ فأثبت أن

. $a^4 = b^4 = e$

(٣٦) إذا كانت G زمرة وكان $a , b \in G$ حيث $a^2b = ba , a^4 = e$ فأثبت أن $a = e$.

(٣٧) إذا كانت G زمرة وكان $a , b \in G$ حيث $a^2b = ba$ و $b^2a = ab$ فأثبت أن $a = b = e$.

(٣٨) إذا كانت G زمرة وكان $a , b \in G$ حيث $ab^2 = b^3a$, $ba^2 = a^3b$ فأثبت أن $a = b = e$.

(٣٩) إذا كان $a , b \in G$ حيث $b^6 = a$, $ab = b^4a$ فأثبت أن $ab = ba$.

(٤٠) إذا كان G نظاماً رياضياً تجميعاً يحقق :

(أ) $\forall a \in G \exists b \in G$ ($bab = b$ و $aba = a$) .

(ب) يوجد عنصر وحيد $e \in G$ حيث $ea = a$ لكل $a \in G$ فأثبت أن G زمرة .

(٤١) إذا كانت G زمرة وكان $a , b \in G$ حيث $ab = ba^2$ فأثبت أن $a^nb = ba^{2^n}$ وأن $ab^n = b^na^{2^n}$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$. استنتج أن $(ba^n)^2$ يتبدل مع كل من a و b .

(٤٢) إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها n فأثبت أنه لكل $a \in G$ يوجد $m \in \mathbb{Z}^+$ حيث $a^m = e$.

(٤٣) إذا كانت G زمرة وكان $x \in G$ حيث $o(x) = mn$ و $\gcd(m , n) = 1$ فأثبت أنه يوجد $y , z \in G$ حيث $o(y) = m$ ، $o(z) = n$ و $x = yz = zy$.

(٤٤) إذا كانت G زمرة وكان $a , b \in G$ فأثبت أن :

(أ) $o(a) = o(a^{-1})$.

(ب) $o(a) = o(b^{-1}ab)$.

(ج) $o(ab) = o(ba)$.

(٤٥) إذا كانت G زمرة وكان $a \in G$ حيث $o(a) = n$ فأثبت أن $o(a^t) = \dfrac{\ell cm(n , t)}{t}$ لكل $t \geq 1$.

(٤٦) لتكن G زمرة منتهية وليكن $g,h \in G$ حيث $ghg^{-1} = h^2 , g^5 = e$. أثبت أن $o(h) = 31$.

(٤٧) لتكن G زمرة لا تحتوي على عناصر من الرتبة 2 وتحقق $(xy)^2 = (yx)^2$ لكل $x , y \in G$. أثبت أن G إبدالية .

(٤٨) (أ) إذا كانت G زمرة فأثبت أنه لكل $a \in G$ يوجد عنصر وحيد $b \in G$ بحيث يكون $aba = a$.

(ب) إذا كان G نظاماً رياضياً تجميعياً وكان لكل $a \in G$ يوجد عنصر وحيد $b \in G$ بحيث يكون $aba = a$ فأثبت أن :

(i) G تحتوي على عنصر وحيد a يحقق $a^2 = a$ (ii) G زمرة .

(٢ , ٢) الزمر الجزئية والزمر الدورية

Subgroups and Cyclic Groups

في هذا البند سنتطرق إلى دراسة فكرة بناء جزئي من الزمرة يدعى الزمر الجزئية . إن دراسة الزمر الجزئية يمكننا ، في معظم الأحيان ، من القاء الضوء على الخصائص الجبرية للزمرة الأم . سبق وأن تعرضنا في البند الأول إلى أمثلة على زمر جزئية ، فمثلاً $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}, +)$. في هذا البند نقوم بدراسة مفهوم الزمر الجزئية ونقدم خصائصها الأساسية . كما أننا سنقدم صنف هام من الزمر ألا وهو الزمر الدورية .

لتكن $(G, .)$ زمرة ، ولتكن H مجموعة جزئية غير خالية من G . نقول إن H مغلقة **(closed)** تحت عملية الزمرة الثنائية إذا كان $ab \in H$ لكل $a, b \in H$. على سبيل المثال ، إذا كانت الزمرة هي $(\mathbb{R}, +)$ والمجموعة هي $\mathbb{Z}$ فإن $\mathbb{Z}$ مغلقة تحت عملية الجمع + ، وذلك لأن مجموع أي عددين صحيحين هو عدد صحيح أيضاً .

لاحظ أنه لو كانت H مغلقة تحت عملية G الثنائية فإن قصر العلمية الثنائية على H يولد علمية ثنائية على H . وإذا حصل وأن كانت $(H, .)$ زمرة فإننا نقول إن H زمرة جزئية من G ونلخص ذلك بالتعريف التالي :

تعريف (٢ , ٥)

لتكن $(H, .)$ زمرة ولتكن $\phi \neq H \subseteq G$. إذا كانت H مغلقة تحت عملية G الثنائية بحيث تكون $(H, .)$ زمرة فإننا نقول إن H زمرة جزئية (**subgroup**) من G .

ملحوظات

(١) إذا كانت $(H,.)$ زمرة جزئية من $(G,.)$ فإننا عادة ما نعبر عن ذلك بكتابة $H \leq G$. وإذا كانت $H \neq G$ فإننا نقول إن H زمرة جزئية فعلية من G (**proper subgroup of G**) ونكتب $H < G$.

(٢) من الواضح أن $(G,.)$ و $(\{e\},.)$ زمرتان جزئيتان من G . تسمى الأخيرة منها زمرة جزئية تافهة (**trivial subgroup**) .

(٣) إذا كان e هو محايد G وكان e_H هو محايد H فإن $e_H e_H = e_H = e_H e$. وبإستخدام قانون الاختصار نخلص إلى أن $e_H = e$. أي أن المحايدان متساويان .

(٤) إذا كان $h \in H$ و h_1 هو نظير h في H وكان h^{-1} هو نظير h في G فإن :

$$h_1 = h_1 e = h_1 (h h^{-1}) = (h_1 h) h^{-1} = e h^{-1} = h^{-1} .$$

ولذا فإن نظير h في H ونظير h في G متساويان .

تزودنا المبرهنة التالية باختبار سهل لمعرفة متى تكون مجموعة جزئية من زمرة G هي بالفعل زمرة جزئية من G .

مبرهنة (٢ , ١٤)

إذا كانت G زمرة وكانت $\phi \neq H \subseteq G$ فإن :

$H \leq G$ إذا وفقط إذا كان $ab^{-1} \in H$ لكل $a, b \in H$.

البرهان

لنفرض أولاً أن $H \leq G$ وأن $a, b \in H$. بما أن H زمرة فإن $b^{-1} \in H$ ، ومن ثم فإن $ab^{-1} \in H$. ولبرهان العكس ، نفرض أن $ab^{-1} \in H$ لكل $a, b \in H$. بما أن $H \neq \phi$ فإنه يوجد $a \in H$ ، ولذا فإن $e = aa^{-1} \in H$. إذن ، H تحتوي على العنصر المحايد . الآن ، لكل $b \in H$ لدينا $b^{-1} = eb^{-1} \in H$. إذن ، لكل $a, b \in H$ يكون $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$. وأخيراً فإن الخاصية التجميعية كونها محققة في G فلا بد وأن تكون محققة في H. وبالتالي فإن H زمرة ◆

نتيجة (٢ , ١٥)

إذا كانت G زمرة وكانت H مجموعة جزئية منتهية غير خالية من G فإن :

$H \le G$ إذا وفقط إذا كان $ab \in H$ لكل $a, b \in H$.

البرهان

إذا كانت $H \le G$ فإنه من الواضح أن $ab \in H$ لكل $a, b \in H$. ولبرهان العكس ، نفرض أن $ab \in H$ لكل $a, b \in H$. ليكن $h \in H$. عندئذ : $\{h, h^2, h^3, \dots, h^n, \dots\} \subseteq H$. وبما أن H مجموعة منتهية فإنه يوجد $0 \le r < s$ حيث $h^r = h^s$ ولذا فإن : $hh^{s-r-1} = h^{s-r} = e \in H$. وعليه فإن $h^{-1} = h^{s-r-1}$. وبالتالي فإننا نخلص إلى أنه إذا كان $a, b \in H$ فإن $a, b^{-1} \in H$. ولذا فإن $ab^{-1} \in H$. إذن ، $H \le G$ ◆

نقدم الآن بعض الأمثلة على الزمر الجزئية .

مثال (٢ , ١٢)

من الواضح أن : $(2\mathbb{Z}, +) \le (\mathbb{Z}, +) \le (\mathbb{Q}, +) \le (\mathbb{R}, +) \le (\mathbb{C}, +)$

وأن $(\mathbb{Q}^*, .) \le (\mathbb{R}^*, .) \le (\mathbb{C}^*, .)$ □

مثال (٢ , ١٣)

إذا كانت $H = \{[0],[2]\}$ فإن H ليست زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ وذلك لأن $[2]+[2]=[4] \notin H$. ولكن من السهل التحقق من أن كل من $L = \{[0],[3]\}$ و $K = \{[0],[2],[4]\}$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ □

مثال (٢ , ١٤)

إذا كانت $V = \{e, a, b, c\}$ هي زمرة كلاين الرابعة فإنه من السهل التحقق من أن كل من $\{e, c\}$ ، $\{e, b\}$ و $\{e, a\}$ زمرة جزئية من V ولكن $\{e, b, c\}$ ليست زمرة جزئية من V □

مثال (٢ , ١٥)

إذا كان $n \ge 2$ وكانت A_n هي مجموعة التبديلات الزوجية من S_n فإن $A_n \le S_n$. وذلك لأن $e = (1\ 2) \circ (1\ 2) \in A_n$ ومن ثم فإن $A_n \ne \phi$. كما أنه إذا كان $\sigma, \mu \in A_n$

فإن $\sigma \circ \mu^{-1} \in A_n$ (لماذا!). تسمى الزمرة A_n زمرة التناوبات (**alternating group**) على $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ $\square$

مثال (٢ , ١٦)

إذا كانت $GL(2, \mathbb{R}) \supseteq H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} : ad \neq 0 \right\}$ فإن $H \leq GL(2, \mathbb{R})$.

وذلك لأنه لو كان $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ 0 & g \end{bmatrix} \in H$ فإن :

$$AB^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/e & -f/eg \\ 0 & 1/g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a/e & -af/eg + b/g \\ 0 & d/g \end{bmatrix} \in H \quad \square$$

مثال (٢ , ١٧)

إذا كانت $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ حيث $(a, b)(c, d) = (ac, bc + d)$ فإن

$H = \{(a, 0) : a > 0\}$ زمرة جزئية من G . لأنه لو كان $(a, 0), (c, 0) \in H$

فإن $(a, 0)(c, 0)^{-1} = (a, 0)(\frac{1}{c}, 0) = (\frac{a}{c}, 0) \in H$.

أما المجموعة الجزئية $K = \{(a, 3a^3) : a \neq 0\}$ فإنها ليست زمرة جزئية من G وذلك لأن العنصر المحايد $(1, 0)$ لا ينتمي إلى K $\square$

مثال (٢ , ١٨)

المجموعة الجزئية $H = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Q}^*, .)$. وذلك لأنه لو كان $x = 2^n, y = 2^m \in H$ فإن $xy^{-1} = 2^m 2^{-n} = 2^{m-n} \in H$ $\square$

تعريف (٢ , ٦)

لتكن G زمرة و $a \in G$. يعرف ممركز a (**centralizer of a**) بأنه المجموعة $C(a) = \{x \in G : xa = ax\}$. كما يعرف مركز G (**center of G**) بأنه المجموعة $Z(G) = \{x \in G : xa = ax \ \forall a \in G\}$.

المثال التالي يبين أن كل من الممركز والمركز زمرة جزئية من أي زمرة G .

مثال (٢ , ١٩)

إذا كانت G زمرة و $a \in G$ فإن $C(a) \leq G$ وإن $Z(G) \leq G$.

الحل

بما أن $aa = aa$ فإن $a \in C(a)$. ولذا فإن $C(a) \neq \phi$. نفرض الآن أن $x, y \in C(a)$. عندئذٍ ، $xa = ax$ و $ya = ay$. ولذا فإن $y^{-1}a = ay^{-1}$. كما أن :

$$xy^{-1}a = x(y^{-1}a) = x(ay^{-1}) = (xa)y^{-1} = (ax)y^{-1} = axy^{-1} .$$

وبالتالي فإن $C(a) \leq G$. بالمثل ، يمكن إثبات أن $Z(G) \leq G$ □

مثال (٢ , ٢٠)

إذا كانت $H \leq G$ وكان $a \in G$ فإن المجموعة الجزئية $aHa^{-1} = \{aha^{-1} : h \in H\}$ زمرة جزئية من G .

الحل

بما أن $aea^{-1} = e$ فإن $e \in aHa^{-1}$. ولذا فإن $aHa^{-1} \neq \phi$.

نفرض الآن أن $ah_1a^{-1} , ah_2a^{-1} \in aHa^{-1}$. عندئذٍ :

$$(ah_1a^{-1})(ah_2a^{-1})^{-1} = ah_1a^{-1}ah_2^{-1}a^{-1} = ah_1h_2^{-1}a^{-1} \in aHa^{-1}$$

وبالتالي فإن $aHa^{-1} \leq G$ □

مبرهنة (٢ , ١٦)

إذا كانت $\{H_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ عائلة غير خالية من الزمر الجزئية من G فإن $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma \leq G$.

البرهان

لنفرض أن $H = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma$. بما أن $e \in H_\gamma$ لكل $\gamma \in \Gamma$ فإن $e \in H$. ولذا فإن $H \neq \phi$. لنفرض الآن أن $a, b \in H$. حينئذٍ ، $a, b \in H_\gamma$ لكل $\gamma \in \Gamma$. وبما أن $H_\gamma \leq G$ فإن $ab^{-1} \in H_\gamma$ لكل $\gamma \in \Gamma$. ولذا فإن $ab^{-1} \in H$. وبالتالي فإن $H \leq G$ ◆

تعريف (٢ , ٧)

لتكن G زمرة و S مجموعة جزئية من G . تعرف الزمرة الجزئية المولدة بالمجموعة S

(**subgroup generated by S**) ويرمز لها بالرمز $\langle S\rangle$ على أنها :

$$\langle S\rangle = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \{H_\gamma : S \subseteq H_\gamma \le G\}.$$

أي أن ، $\langle S\rangle$ هي الزمرة الجزئية التي نحصل عليها من تقاطع جميع زمر G الجزئية التي تحتوي S .

ملحوظات

(١) إذا كانت $G = \langle S\rangle$ فإننا نقول إن المجموعة S تولد G (أو أن G مولدة بالمجموعة S) .

(٢) إذا كانت $S = \phi$ أو كانت $S = \{e\}$ فإنه من الواضح أن $\langle S\rangle = \{e\}$.

(٣) إذا كانت G زمرة فإن $\langle G\rangle = G$.

(٤) إذا كانت $G = \langle S\rangle$ وكانت S منتهية فإننا نقول إن G منتهية التوليد (**finitely generated**).

(٥) التعريف (٧ , ٢) هو التعريف المستخدم لأي نظام رياضي مهما كان عدد العمليات المعرفة عليه ، ولكن لبعض الأنظمة (كما هو الحال في الزمر) يكون بالإمكان إعطاء وصف للزمرة الجزئية $\langle S\rangle$ باستخدام عناصر الزمرة ، وهذا ما سنقوم به الآن .

مبرهنة (١٧ , ٢)

إذا كانت S مجموعة جزئية غير خالية من الزمرة G فإن $H = \langle S\rangle$ حيث

$$H = \{a_1^{e_1}a_2^{e_2}\dots a_n^{e_n} : a_i \in S , e_i = \pm 1 , 1 \le i \le n , n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

البرهان

من الواضح أن $S \subseteq H$ لأنه إذا كان $a \in S$ فإن $a = a^1 \in H$. سنبرهن الآن أن $H \le G$. لنفرض أن $a_1^{e_1}a_2^{e_2}\dots a_m^{e_m} , b_1^{f_1} b_2^{f_2}\dots b_n^{f_n} \in H$. عندئذ : $(a_1^{e_1} a_2^{e_2}\dots a_m^{e_m})(b_1^{f_1} b_2^{f_2}\dots b_n^{f_n})^{-1} = a_1^{e_1}\dots a_m^{e_m} b_n^{-f_n}\dots b_1^{-f_1} \in H$. ولذا فإن $H \le G$ وأخيراً إذا كانت $S \subseteq K \le G$ وكان $a_1^{e_1}\dots a_m^{e_m} \in H$ فإن $a_1 ,\dots, a_m \in S$. ولذا فإن $a_1 ,\dots, a_m \in K$.وبما أن $K \le G$ فإن $a_1^{e_1}\dots a_m^{e_m} \in K$.وبالتالي فإن $H \subseteq K$. وباستخدام تعريف $\langle S\rangle$ نخلص إلى أن $H = \langle S\rangle$ ◆

تعريف (٨ , ٢)

تعرف زمرة المرباعيات (**quaternion group**) على أنها الزمرة Q_8 المولدة بالعنصرين a و b حيث $o(a) = 4$ ، $a^2 = b^2$, $ba = a^3b = a^{-1}b$.

مبرهنة (١٨ , ٢)

Q_8 زمرة غير إبدالية رتبتها 8 .

البرهان

باستخدام المبرهنة (١٧ , ٢) نجد أن :

$$Q_8 = \{a^{i_1}b^{j_1}\ a^{i_2}b^{j_2} \dots\ a^{i_n}b^{j_n} : i_t\ , j_t \in \mathbb{Z}\ , 1 \le t \le n\ , n \in \mathbb{Z}^+\} .$$

بما أن $ba = a^3b = a^{-1}b$ فإن عناصر Q_8 يجب أن تكون على الصورة $a^n b^m$ حيث $m, n \in \mathbb{Z}$. وبما أن $a^4 = e$ وأن $a^2 = b^2$ فإن $0 \le n < 4$ وأن $0 \le m < 2$.

إذن ، $|Q_8| \le 8$. ولكن e, a, a^2, a^3 جميعها عناصر مختلفة ، ولذا فإن b, ab, a^2b, a^3b جميعها عناصر مختلفة . وبملاحظة أن $\{e, a, a^2, a^3\} \cap \{b , ab , a^2b , a^3b\} = \phi$

(لأن $a^{-1} = a^3$ ، $a^2 = b^2$ و $a \ne b \ne e$) فإننا نجد أن :

$Q_8 = \{ e , a , a^2, a^3, b , ab , a^2b , a^3b\}$. إذن $|Q_8| = 8$. كما أن Q_8 ليست إبدالية

لأن $ab \ne ba$ (لأنه لو كان $ab = ba$ فإن $ab = a^3b$ ومن ثم نحصل على التناقض $a^2 = e$)

◆

من السهل التحقق من أن جدول كيلي للزمرة Q_8 هو :

	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
e	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	e	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	e	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	e	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	a^2	a	e	a^3
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a^3	a^2	a	e
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	e	a^3	a^2	a
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a	e	a^3	a^2

تعريف (٩ , ٢)

تعرف الزمرة الزوجية من الدرجة $n \geq 3$ (**dihedral group of degree n**) ويرمز لها بالرمز D_n على أنها الزمرة المولدة بالعنصرين a , b حيث $o(a) = n$ ، $o(b) = 2$ وتحقق العلاقة $ba = a^{-1}b$.

مبرهنة (١٩ , ٢)

D_n زمرة غير إبدالية رتبتها $2n$ حيث $n \geq 3$.

البرهان

باستخدام المبرهنة (١٧ , ٢) نجد أن :

$D_n = \{a^{i_1} b^{j_1} a^{i_2} b^{j_2} \ldots a^{i_n} b^{j_n} : i_t , j_t \in \mathbb{Z} , 1 \leq t \leq n , n \in \mathbb{Z}^+\}$. بما أن $ba = a^{-1}b = a^{n-1}b$ فإن عناصر D_n تأخذ الشكل $a^k b^m$ حيث $k , m \in \mathbb{Z}$. وبما أن $a^n = e$ ، $b^2 = e$ و $a^{-1} = a^{n-1}$ فإن $0 \leq k < n$ و $0 \leq m < 2$. إذن ، $|D_n| \leq 2n$. الآن ، $e , a , a^2 , \ldots , a^{n-1}$ جميعها عناصر مختلفة ، ولذا فإن $b, ab, a^2b, \ldots, a^{n-1}b$ جميعها عناصر مختلفة . وبما أن $\{e , a , a^2, \ldots , a^{n-1}\} \cap \{b , ab , a^2b , \ldots , a^{n-1}b\} = \phi$. فإننا نخلص إلى أن $D_n = \{e , a , a^2, \ldots , a^{n-1}, b , ab , a^2b , \ldots , a^{n-1}b\}$. إذن ، $|D_n| = 2n$.

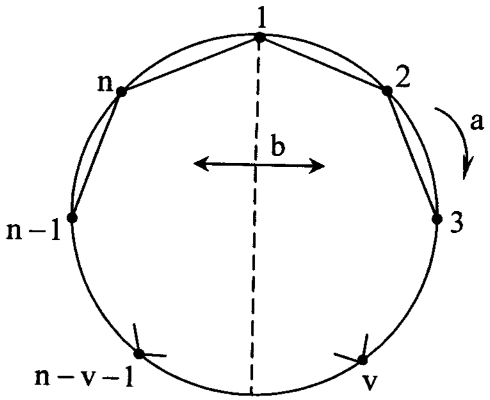
وأخيراً D_n ليست إبدالية لأن $ab \neq ba$ ◆

من السهل التحقق من أن جدول كيلي للزمرة D_4 هو :

	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
e	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	e	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	e	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	e	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	e	a^3	a^2	a
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a	e	a^3	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	a^2	a	e	a^3
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a^3	a^2	a	e

ملحوظة

لاحظ أن D_4 ماهي إلا زمرة تناظرات المربع المقدمة في المثال (١,٥) ولذا فإن $D_4 \leq S_4$. وبصورة عامة من الممكن اعتبار الزمرة D_n حيث $n \geq 3$ هي زمرة تناظرات المضلع المنـتظم الـذي عـدد أضلاعه n حيث نفرض أن a هو دوران المضلع بزاوية $\frac{2\pi}{n}$ راديان وأن b هو الانعكـاس حول القطر المار بالنقطة 1 كما هو مبين في الشكل أدناه.



ولذا فإن $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ، $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$

وبالتالي فإن $a^n = I$ ، $b^2 = I$ و $ba = a^{-1}b$. ونخلص إلى أنه من الممكن اعتبـار الزمـرة D_n كزمرة جزئية من زمرة التبديلات S_n .

نقدم الآن مفهوم ضرب زمرتين جزئيتين .

تعريف (١٠ , ٢)

لتكن G زمرة ولتكن كل من H و K مجموعة جزئية غير خالية من G . يعرف حاصل ضرب H مع K **(product of H and K)** بأنه المجموعة $HK = \{hk : h \in H , k \in K\}$. وبالمثل يعـرف ضرب المجموعات الجزئية غير الخالية $H_1 , H_2 , \dots , H_n$ من G بأنه المجموعة :

$H_1 H_2 \dots H_n = \{h_1 h_2 \dots h_n : h_i \in H_i , 1 \leq i \leq n\}$.

ملحوظة

إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية من G فإننا نلفت انتباه القارئ بأنه ليس من الـــضروري أن تكون HK زمرة جزئية من G وهذا ما يوضحه المثال التالي :

مثال (٢١ , ٢)

كل من $H = \{e , a^2b\}$ و $K = \{e , ab\}$ زمرة جزئية من D_4 (لماذا ؟) . ولكن $HK = \{e , ab , a^2b , a\}$ ليست زمرة جزئية من D_4 لأن $(a)(a^2b) = a^3b \notin HK$ □

تزودنا المبرهنة التالية بالشروط اللازمة والكافية لكي تكون HK زمرة جزئية من G .

مبرهنة (٢٠ , ٢)

إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية من الزمرة G فإن العبارات التالية متكافئة :

(أ) $HK \leq G$ (ب) $HK = KH$ (ج) $HK = \langle H \cup K \rangle$

البرهان

(أ) $\Leftarrow$ (ب) : لنفرض أن $HK \leq G$. ولنفرض أن $kh \in KH$ حيث $k \in K$ و $h \in H$. بما أن $HK \leq G$ وأن $h = he \in HK$ وأن $k = ek \in HK$ فإن $KH \subseteq HK$. ومن ناحية أخرى ، إذا كان $hk \in HK$ فإن $(hk)^{-1} \in HK$. ولذا فإن $(hk)^{-1} = h_1k_1$ حيث $h_1 \in H , k_1 \in K$. حينئذ ، $hk = (h_1k_1)^{-1} = k_1^{-1}h_1^{-1} \in KH$. ومنه فإن $HK \subseteq KH$. إذن ، $HK = KH$.

(ب) $\Leftarrow$ (ج) : لنفرض أن $HK = KH$. سنبرهن أولاً أن $HK \leq G$. ولهذا الغرض نفرض أن $h_1k_1 , h_2k_2 \in HK$ حيث $k_1,k_2 \in K , h_1, h_2 \in H$. الآن :

$(h_1k_1)(h_2k_2)^{-1} = h_1\,k_1\,k_2^{-1}\,h_2^{-1}$. ولكن $k_2^{-1}\,h_2^{-1} \in KH = HK$. ومنه فإن $k_2^{-1}\,h_2^{-1} = h_3k_3$ حيث $h_3 \in H$ و $k_3 \in K$. ولذا فإن :

$(h_1k_1)(h_2k_2)^{-1} = h_1\,k_1\,k_2^{-1}\,h_2^{-1} = h_1k_1h_3k_3$. كذلك ، $k_1h_3 \in KH = HK$.

إذن ، $k_1h_3 = h_4k_4$ حيث $h_4 \in H$ و $k_4 \in K$. ولذا فإن :

$(h_1k_1)(h_2k_2)^{-1} = h_1\,h_4\,k_4\,k_3 \in HK$. إذن ، $HK \leq G$.

لاحظ أن $H \cup K \subseteq HK$ وذلك لأن $H , K \subseteq HK$. وبما أن $\langle H \cup K \rangle$ هي أصغر زمرة جزئية من G تحتوي $H \cup K$ فإننا نخلص إلى أن $\langle H \cup K \rangle = HK$.

(ج) $\Leftarrow$ (أ) : لنفرض أن $HK = \langle H \cup K \rangle$. بما أن $\langle H \cup K \rangle$ زمرة جزئية من G فإننا نخلص إلى أن $HK \leq G$ ◆

مبرهنة (٢ , ٢١)

لتكن G زمرة ولتكن S(G) هي مجموعة جميع الزمر الجزئية من G. عندئذ $(S(G), \subseteq)$ شبكية.

البرهان

من الواضح أن $(S(G), \subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً . سنبرهن الآن أن $A \vee B = \langle A \cup B \rangle$ وأن $A \wedge B = A \cap B$ لكل $A, B \in S(G)$. بما أن $A, B \subseteq \langle A \cup B \rangle$ فإن $\langle A \cup B \rangle$ حد علوي لكل من A و B . لنفرض الآن أن $C \in S(G)$ حيث $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$. حينئذٍ ، $A \cup B \subseteq C$. ولذا فإن $\langle A \cup B \rangle \subseteq C$.وبالتالي فإن $\langle A \cup B \rangle$ هو أصغر حد علوي لكل من A و B . إذن ، $A \vee B = \langle A \cup B \rangle$.

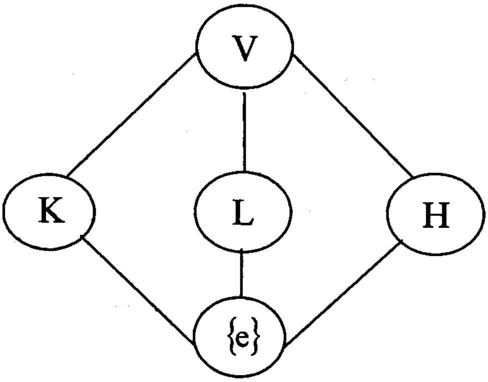
وأخيراً ، لاحظ أن $A \cap B \subseteq A, B$. ولذا فإن $A \cap B$ حد سفلي لكل من A و B . وإذا كان $D \in S(G)$ حيث $D \subseteq A$ و $D \subseteq B$ فإن $D \subseteq A \cap B$. إذن ، $A \cap B$ أكبر حد سفلي لكل من A و B وبالتالي فإن $A \wedge B = A \cap B$ ◆

ملحوظة

يسمى شكل هاس للشبكية $(S(G), \subseteq)$ بالمخطط الشبكي للزمر الجزئية من G (**the lattice diagram of subgroups of G**) .

مثال (٢ , ٢٢)

سنجد المخطط الشبكي للزمر الجزئية من زمرة كلاين الرابعة $V = \{e, a, b, c\}$. أنه ليس من الصعب التحقق من أن الزمر الجزئية الفعلية من V هي $L = \{e, c\}$ ، $K = \{e, b\}$ ، $H = \{e, a\}$. ولذا ، فإن المخطط الشبكي لزمر V الجزئية هو :



□

ننتقل الآن إلى دراسة صنف هام جداً من الزمر ألا وهو الزمر الدورية .

تعريف (١١ , ٢)

لتكن G زمرة وليكن $a \in G$. تسمى الزمرة الجزئية من G المولدة بالعنصر a الزمرة الجزئية الدورية (**cyclic subgroup**) ويرمز لها بالرمز $\langle a \rangle$. أي أن $\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$. وتكون الزمرة G زمرة دورية إذا وجد $a \in G$ بحيث يكون $G = \langle a \rangle$.

تحتل الزمر الدورية أهمية خاصة في دراسة الزمر وذلك لانفرادها دون غيرها من الزمر ببعض الخواص الخاصة التي تسهل علينا عملية التعرف على هذه الزمر واستخدامها في تصنيف بعض الزمر الأخرى .

مثال (٢٣ , ٢)

الزمرة $(\mathbb{Z}\ ,\ +)$ دورية وذلك لأن $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$. كذلك الزمرة $(\mathbb{Z}_n\ ,\ +_n)$ دورية لأن $\mathbb{Z}_n = \langle [1] \rangle$ □

مثال (٢٤ , ٢)

زمرة كلاين الرابعة $V = \{e\ ,\ a\ ,\ b\ ,\ c\}$ ليست دورية لأن $a^2 = b^2 = c^2 = e$ ، ولذا فإنه لا يمكن إيجاد عنصر يولد V □

مثال (٢٥ , ٢)

الزمرة $(\mathbb{Q}\,,\,+)$ ليست دورية . لأنه لو وجد $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ حيث $\mathbb{Q} = \langle \frac{a}{b} \rangle$ وحيث $\gcd(a\,,b) = 1$ فـإن $\frac{a}{2b} \in \mathbb{Q}$. ولـذا فـإن $\frac{a}{2b} = n\frac{a}{b}$ حيـث $0 \neq n \in \mathbb{Z}$. ومنـه فـإن $n = \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ وهذا مستحيل □

المبرهنة التالية تبين لنا أن الزمر الدورية يجب أن تكون إبدالية .

مبرهنة (٢٢ , ٢)

إذا كانت $G = \langle a \rangle$ زمرة دورية فإن G إبدالية .

البرهان

لنفرض أن $x\,, y \in G$. عندئذ ، $x = a^m$ و $y = a^n$ حيث $m\,, n \in \mathbb{Z}$. ولذا فإن :

$$xy = a^m a^n = a^{m+n} = a^{n+m} = a^n a^m = yx \quad \blacklozenge$$

تبين لنا المبرهنة التالية أن الزمر الجزئية من الزمرة الدورية ترث هذه الخاصية .

مبرهنة (٢٣ , ٢)

كل زمرة جزئية من زمرة دورية يجب أن تكون دورية .

البرهان

لنفرض أن $G = \langle a \rangle$ وأن $H \leq G$. إذا كانت $H = \{e\}$ فإن $H = \langle e \rangle$. ولذا فإنها دورية . نفرض إذن أن $H \neq \{e\}$. باستخدام مبدأ الترتيب الحسن نستطيع إيجاد أصغر عدد صحيح موجب n بحيث يكون $a^n \in H$. سنبرهن الآن أن $H = \langle a^n \rangle$. لنفرض إذن أن $x \in H$. عندئذ ، $x \in G$. ولـذا فـإن $x = a^k$ حيـث $k \in \mathbb{Z}$. باسـتخدام خوارزميـة القـسمة نـستطيع إيجـاد $q\,, r \in \mathbb{Z}$ حيث $k = nq + r$ ، $0 \leq r < n$. الآن ، بما أن $a^n, a^k \in H$ فإن :

$a^r = a^{k-nq} = a^k\,(a^n)^{-q} \in H$. ولذا فإننا نجد أن $r = 0$. وبالتالي فإن $H = \langle a^n \rangle$ ◆

مثال (٢٦ , ٢)

$(\mathbb{R}, +)$ ليست دورية . وذلك لأنه لو كانت $(\mathbb{R}, +)$ دورية فإن الزمرة الجزئية $(\mathbb{Q}, +)$ يجب أن تكون دورية ايضاً وهذا تناقض □

سندرس الآن خصائص الزمر الدورية المنتهية .

مبرهنة (٢٤ , ٢)

إذا كانت $G = \langle a \rangle$ زمرة دورية منتهية رتبتها n فإن $G = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$.

البرهان

لاحظ أن $G = \langle a \rangle = \{a^i : i \in \mathbb{Z}\}$. وبما أن G منتهية فإنه يوجد $i,j \in \mathbb{Z}$ $i < j$ و $a^i = a^j$. إذن ، $a^{j-i} = e$. لنفرض الآن أن m هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق $a^m = e$. إذن ، لكل $0 \le i < j < m$ نجد أن $a^i \ne a^j$. ولذا فإن عناصر المجموعة $H = \{e, a, a^2, \dots a^{m-1}\}$ جميعها مختلفة . لنفرض الآن أن $a^k \in G = \langle a \rangle$. باستخدام خوارزمية القسمة نستطيع إيجاد $q, r \in \mathbb{Z}$ حيث : $k = qm + r$ ، $0 \le r < m$. عندئذ ، $a^k = a^{qm+r} = (a^m)^q a^r = ea^r = a^r \in H$. ولذا فإن $G \subseteq H$. ولكن $H \subseteq G$. إذن ، $H = G$. وبما أن جميع عناصر H مختلفة وأن $o(a) = n$ فإن $m = n$. وبالتالي فإن $G = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ ◆

ملحوظة

يتضح من برهان المبرهنة (٢٤ , ٢) أنه إذا كانت $\langle a \rangle$ زمرة دورية منتهية فإن $o(a) = |\langle a \rangle|$.

نتيجة (٢٥ , ٢)

إذا كانت $G = \langle a \rangle$ زمرة دورية منتهية رتبتها $n > 1$ وكانت $H \le G$ فإن $|H|$ يقسم n .

البرهان

باستخدام المبرهنة (٢٣, ٢) نجد أن $H = \langle a^k \rangle$ حيث k هو أصغر عدد صحيح موجب يحقق $a^k \in H$. وباستخدام خوارزمية القسمة نستطيع إيجاد $q, r \in \mathbb{Z}$ حيث :

$$0 \le r < k \text{ ، } n = qk + r$$

حينئــذ ، $a^r = a^{n-qk} = a^n((a^k)^{-1})^q = e((a^k)^{-1})^q = ((a^k)^{-1})^q \in H$. ولــذا فــإن $r = 0$ ، ومنه فإن k يقسم n . وأخيراً باستخدام المبرهنة (١١ , ١) نجد أن :

$\dfrac{n}{k} = \dfrac{n}{\gcd(n,k)} = o(a^k) = |H|$. ولذا فإن $|H|$ يقسم n ◆

ملحوظة

نلفت نظر القارئ إلى أن النتيجة (٢٥ , ٢) ما هـي إلا حالـة خاصـة مـن مبرهنـة هامـة جداً ، يعتبرها الكثير من علماء الجبر ألف باء نظرية الزمر ، ألا وهي مبرهنة لاجرانج والتي نقدمها في الفصل الثالث من هذا الكتاب. وسنقدم لاحقاً مثالاً يبين أن عكس مبرهنة لاجرانج ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً في الحالة العامة ولكن في حالة الزمر الـدورية فإن العكس صحيح وهذا هو فحـوى المبرهنة التالية :

مبرهنة (٢٦ , ٢)

إذا كانت $G = \langle a \rangle$ زمرة دورية منتهية رتبتها n فإنه لكل قاسم موجب d للعدد n توجد زمرة جزئية وحيدة من G رتبتها d .

البرهان

بما أن d يقـسم n فـإن $n = kd$ حيـث $k \in \mathbb{Z}$. وباسـتخدام المبرهنـة (١١ , ١) نجـد أن $\dfrac{n}{k} = d = \dfrac{o(a)}{\gcd(k,n)} = o(a^k)$. إذن ، $H = \langle a^k \rangle$ زمرة جزئية من G رتبتـها d .

ولبرهان الوحدانيـة ، نفـرض أن $K \le G$ حيـث $|K| = d$. عندئـذ ، $K = \langle a^t \rangle$ حيـث t هو أصغر عدد صحيح موجب يحقـق $a^t \in K$. الآن : $d = |K| = o(a^t) = \dfrac{o(a)}{\gcd(t,n)}$.

ومنه فإن ، $\gcd(n,t) = \dfrac{n}{d} = k$. ولذا فإن k يقسم t . أي أن ، $t = km$ حيث $m \in \mathbb{Z}$. ولذا فإن $a^t = a^{km} = (a^k)^m \in H$. ومنه فـإن $K \subseteq H$. وبمـا أن $|K| = |H|$ فإننـا نخلـص إلى أن $K = H$ ◆

النتيجة التالية تبين لنا كيفية إيجاد جميع مولدات الزمرة الدورية المنتهية .

نتيجة (٢٧ , ٢)

إذا كانت $G = \langle a \rangle$ زمرة دورية منتهية رتبتها n فإن a^k يولد G إذا وفقط إذا كان $\gcd(n , k) = 1$.

البرهان

لنفرض أولاً أن a^k يولد G . بما أن $|G| = n$ فإن $o(a^k) = n$. ولكن

$n = o(a^k) = \dfrac{n}{\gcd(k , n)}$. إذن ، $\gcd(k , n) = 1$. وبالعكس ، إذا كان

$\gcd(n , k) = 1$ فإن $o(a^k) = \dfrac{n}{\gcd(k , n)} = n$. ولذا فإن $|\langle a^k \rangle| = n = |G|$.

ولكن $\langle a^k \rangle \subseteq G$. وبالتالي فإننا نخلص إلى أن $G = \langle a^k \rangle$ ◆

نتيجة (٢٨ , ٢)

إذا كانت $G = \langle a \rangle = \{ e , a , a^2, \ldots, a^{n-1} \}$ زمرة دورية رتبتها n فإن $a^r = a^t$ إذا وفقط إذا كان $r \equiv t \pmod n$.

البرهان

لنفرض أن $r > t$. عندئذ: $a^r = a^t \Leftrightarrow a^{r-t} = e \Leftrightarrow n \mid (r - t) \Leftrightarrow r \equiv t \pmod n$ ◆

مثال (٢٧ , ٢)

عين جميع الزمر الجزئية من $(\mathbb{Z}_{18} , +_{18})$ ثم ارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية .

الحل

لنجد أولاً مولدات $\mathbb{Z}_{18}$. بما أن $\mathbb{Z}_{18} = \langle [1] \rangle$ وأن $|\mathbb{Z}_{18}| = 18$ فإننا نجد باستخدام النتيجة (٢٧ , ٢) أن $k[1]$ مولداً للزمرة $\mathbb{Z}_{18}$ إذا وفقط إذا كان $\gcd(k , 18) = 1$. أي أن $k = 1, 5, 7, 11, 13, 17$. وبالتالي فإن :

$$\mathbb{Z}_{18} = \langle [1] \rangle = \langle [5] \rangle = \langle [7] \rangle = \langle [11] \rangle = \langle [13] \rangle = \langle [17] \rangle \text{ .}$$

نجد الآن $\langle [2] \rangle$. من السهل أن نرى أن :

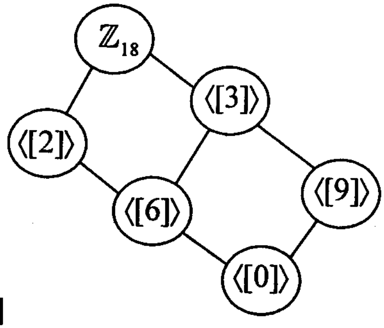
$$\langle [2] \rangle = \{ [0] , [2] , [4] , [6] , [8] , [10] , [12] , [14] , [16] \}$$

زمرة جزئية من $\mathbb{Z}_{18}$ رتبتها 9 . ولذا فإن مولداتها هي $k[2]$ حيث $\gcd(k , 9) = 1$. أي أن: $\langle [2] \rangle = \langle [4] \rangle = \langle [8] \rangle = \langle [10] \rangle = \langle [14] \rangle = \langle [16] \rangle$. ننتقل الآن إلى الزمرة الجزئية $\langle [6] \rangle$.

لاحظ أن $\langle [6] \rangle = \{ [0] , [6] , [12] \}$ ومولداتها على الصورة $k[6]$ حيث $\gcd(k , 3) = 1$. أي أن $\langle [6] \rangle = \langle [12] \rangle$. نجد الآن $\langle [3] \rangle$. لاحظ أن:

$\langle[3]\rangle = \{[0], [3], [6], [9], [12], [15]\}$ ومولداتها على الصورة $k\,[3]$ حيث $\gcd(k, 6) = 1$. أي أن $\langle[3]\rangle = \langle[15]\rangle$. وأخيراً لدينا $\langle[9]\rangle = \{[0], [9]\}$.

وبتجميع هذه المعلومات نخلص إلى أن المخطط الشبكي للزمر الجزئية من الزمرة $(\mathbb{Z}_{18}, +_{18})$ هو :



□

مثال (٢ , ٢٨)

جد جميع الزمر الجزئية من Q_8 ثم ارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية .

الحل

لاحظ أن $Q_8 = \langle a, b \rangle$ حيث $o(a) = 4$ ، $a^2 = b^2$ و $ba = a^3b$. ولقد وجدنا في المبرهنة (٢ , ١٨) أن $Q_8 = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. لإيجاد جميع الزمر الجزئية من Q_8 ، نجد أولاً الزمر الجزئية الدورية وهي :

$\{e\} = \langle e \rangle$ ، $H_1 = \langle a^2 \rangle = \{e, a^2\}$ ، $H_2 = \langle a \rangle = \{e, a, a^2, a^3\}$ ،

$H_3 = \langle b \rangle = \{e, b, a^2, a^2b\}$ ، $H_4 = \langle ab \rangle = \{e, ab, a^2, a^3b\}$.

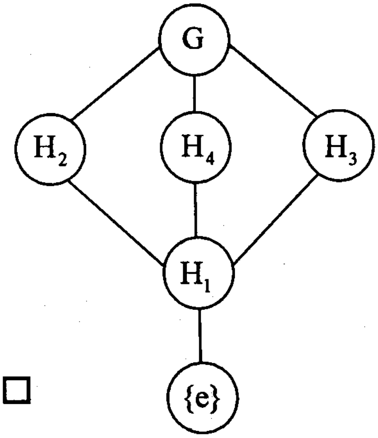
سنبين الآن أن هذه هي جميع الزمر الجزئية الدورية من Q_8 .

بما أن $a^3 \in \langle a \rangle$ فإن $\langle a^3 \rangle \subseteq \langle a \rangle$. ولكن $o(a^3) = 4$. إذن ، $\langle a^3 \rangle = \langle a \rangle$.

بما أن $a^2b \in \langle b \rangle$ فإن $\langle a^2b \rangle \subseteq \langle b \rangle$. ولكن $o(a^2b) = o(b)$ إذن ، $\langle a^2b \rangle = \langle b \rangle$.

بما أن $a^3b \in \langle ab \rangle$ فإن $\langle a^3b \rangle \subseteq \langle ab \rangle$. ولكن $o(a^3b) = o(ab)$. إذن ، $\langle a^3b \rangle = \langle ab \rangle$.

وبالتالي فإن $\{e\}, H_1, H_2, H_3, H_4$ هي جميع الزمر الجزئية الدورية من Q_8 . الآن ، بما أن $H_1 \cup H_i = H_i$ لكل $i = 2, 3, 4$ فإن $\langle H_1 \cup H_i \rangle = H_i$. وبما أن، $H_2 \cup H_3 = \{e, a, a^2, a^3, b, a^2b\}$ فإن $\langle H_2 \cup H_3 \rangle = Q_8$. بالمثل ، $\langle H_2 \cup H_4 \rangle = \langle H_3 \cup H_4 \rangle = Q_8$. وبالتالي فإن المخطط الشبكي لزمر Q_8 الجزئية هو :



□

مثال (٢٩ , ٢)

جد جميع الزمر الجزئية من D_4 ثم ارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية .

الحل

لقد بينا في المبرهنة (١٩ , ٢) أن : $D_4 = \langle a , b\rangle = \{e , a , a^2 , a^3 , b , ab , a^2b , a^3b\}$ حيث $o(a) = 4$ ، $o(b) = 2$, $ba = a^3b$. من الواضح أن الزمر الجزئية الدورية من D_4 هي :

$\langle e\rangle = \{e\}$ ، $H_1 = \langle a^2\rangle = \{e,a^2\}$ ، $H_2 = \langle b\rangle = \{e,b\}$ ، $H_3 = \langle ab\rangle = \{e , ab\}$ ، $H_4 = \langle a^2b\rangle = \{e , a^2b\}$ ، $H_5 = \langle a^3b\rangle = \{e , a^3b\}$ ، $T_1 = \langle a\rangle = \{e , a , a^2, a^3\}$.

لاحظ أن $H_1 \subseteq T_1$ وباقي الزمر الجزئية الدورية غير قابلة للمقارنة . الآن :

$\{a , b\} \subset \langle T_1 \cup H_2\rangle \Rightarrow \langle T_1 \cup H_2\rangle = D_4$

$\{a , ab\} \subset \langle T_1 \cup H_3\rangle \Rightarrow \{a , b = a^{-1} ab\} \subset \langle T_1 \cup H_3\rangle \Rightarrow \langle T_1 \cup H_3\rangle = D_4$

$\{a , a^2b\} \subset \langle T_1 \cup H_4\rangle \Rightarrow \{a , ab = a^2ba\} \subset \langle T_1 \cup H_4\rangle \Rightarrow \langle T_1 \cup H_4\rangle = D_4$

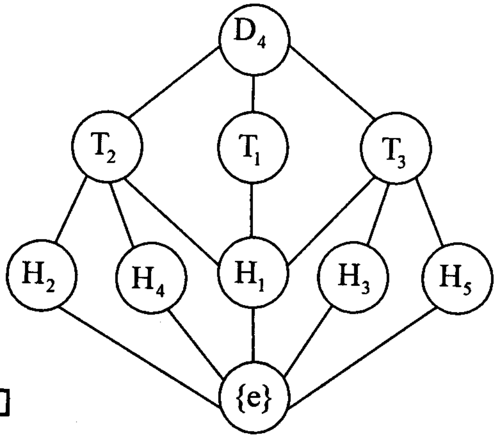
$\{a , a^3b\} \subset \langle T_1 \cup H_5\rangle \Rightarrow \{a , a^2b = a^3ba\} \subset \langle T_1 \cup H_5\rangle \Rightarrow \langle T_1 \cup H_5\rangle = D_4$

كذلك نستطيع بسهولة أن نثبت أن :

$\langle H_2 \cup H_3\rangle = \langle H_2 \cup H_5\rangle = \langle H_4 \cup H_3\rangle = \langle H_4 \cup H_5\rangle = D_4$.

الآن: $\{e , a^2 , b\} \subset \langle H_1 \cup H_2\rangle \Rightarrow T_2 = \{e , a^2 , b , a^2b \} \subset \langle H_1 \cup H_2\rangle$

وبما أن $T_2 \le D_4$ فإن $T_2 = \langle H_1 \cup H_2 \rangle$. بالمثل ، $T_2 = \langle H_2 \cup H_4 \rangle$. وبأسلوب مماثل نستطيع أن نثبت وبسهولة أن $\langle H_3 \cup H_5 \rangle = \langle H_1 \cup H_3 \rangle = \{e , a^2, ab , a^3b\} = T_3$. وكذلك $\langle T_1 \cup T_2 \rangle = \langle T_1 \cup T_3 \rangle = \langle T_2 \cup T_3 \rangle = D_4$. ولذا فإننا نخلص إلى أن المخطط الشبكي للزمر الجزئية من D_4 هو :



□

مثال (٢ , ٣٠)

جد جميع زمر A_4 الجزئية وارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية .

الحل

$$A_4 = \{ e , \sigma_1 = (1\ 3) \circ (2\ 4) , \sigma_2 = (1\ 4) \circ (2\ 3) , \sigma_3 = (1\ 2) \circ (3\ 4) ,$$
$$\tau_1 = (2\ 3\ 4) , \tau_2 = (2\ 4\ 3) , \tau_3 = (1\ 3\ 4) , \tau_4 = (1\ 4\ 3) , \tau_5 = (1\ 2\ 4) ,$$
$$\tau_6 = (1\ 4\ 2) , \tau_7 = (1\ 2\ 3) , \tau_8 = (1\ 3\ 2) \}$$

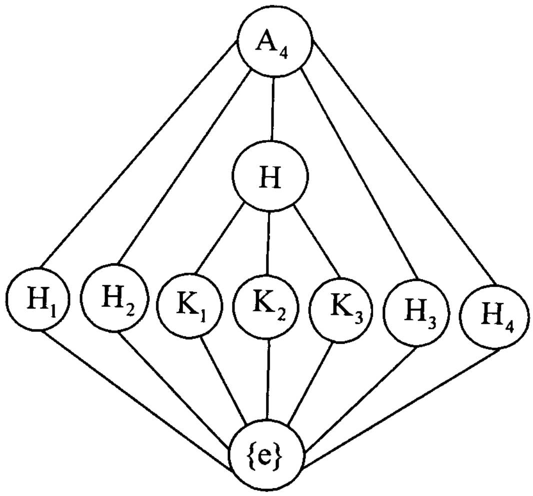
لاحظ ايضاً أن $o(\sigma_i) = 2$ وأن $o(\tau_j) = 3$. إذن ،كل من $K_1 = \langle \sigma_1 \rangle$ ، $K_2 = \langle \sigma_2 \rangle$ ، $K_3 = \langle \sigma_3 \rangle$ زمرة جزئية دورية من الرتبة 2 . وأن كل من :

$$H_1 = \langle \tau_1 \rangle = \langle \tau_2 \rangle ، H_2 = \langle \tau_3 \rangle = \langle \tau_4 \rangle ، H_3 = \langle \tau_5 \rangle = \langle \tau_6 \rangle ، H_4 = \langle \tau_7 \rangle = \langle \tau_8 \rangle$$

زمرة جزئية دورية من الرتبة 3 .

من السهل أن نرى أن $H = \{e , \sigma_1 , \sigma_2 , \sigma_3\} \le A_4$. وبصورة مماثلة لما اتبعناه في الأمثلة السابقة نستطيع أن نثبت أن : $\langle K_i \cup K_j \rangle = H$ وأن $\langle H_i \cup H_j \rangle = \langle H_i \cup H \rangle = A_4$.

وبالتالي يكون المخطط الشبكي للزمر الجزئية من A_4 هو :



□

ننهي هذا البند بدراسة الزمر الدورية غير المنتهية .

مبرهنة (٢٩ , ٢)

لتكن $G=\langle a\rangle$ زمرة دورية غير منتهية .

(أ) إذا كانت $\{e\}\neq H\leq G$ فإن H غير منتهية ايضاً .

(ب) $a^r=a^t$ إذا وفقط إذا كان $r=t$ لكل $r,t\in\mathbb{Z}$.

(ج) a و a^{-1} هما المولدان الوحيدان للزمرة G .

البرهان

(أ) بما أن $H\leq G$ فإن $H=\langle a^k\rangle$. وبما أن رتبة a غير منتهية فإن رتبة a^k غير منتهية . ولذا فإن H زمرة غير منتهية .

(ب) لنفرض أولاً أن $a^r=a^t$ وأن $r>t$. عندئذ ، $a^{r-t}=e$. ولذا فإن $o(a)$ منته وبالتالي فإن G زمرة منتهية وهذا تناقض . إذن ، $r=t$. وبرهان العكس واضح .

(ج) لنفرض أن $G=\langle a\rangle=\langle b\rangle$. بما أن $a\in\langle b\rangle$ و $b\in\langle a\rangle$ فإن $a=b^r$ وأن $b=a^t$ حيث $r,t\in\mathbb{Z}$. إذن ، $a=b^r=a^{rt}$. ولذا فإن $rt=1$. ومنه فإن $r=t=\pm1$ وبالتالي فإن $b=a$ أو $b=a^{-1}$ ◆

مثال (٢ , ٣١)

عين جميع الزمر الجزئية من $(\mathbb{Z}\ ,\ +)$.

الحل

إذا كانت $H \le \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ فإن $H = \langle k \times 1 \rangle$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. إذن ، $H = k\mathbb{Z}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ □

(١ , ٢ , ٢) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $H , K \le G$ حيث $\gcd(|H|,|K|) = 1$ فأثبت أن $H \cap K = \{e\}$. عين الزمرة $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$.

الحل

لنفرض أن $x \in H \cap K$. بما أن $o(x) \mid |H|$ وأن $o(x) \mid |K|$ فإن $o(x) \mid \gcd(|H|,|K|)$. ولذا فإن $o(x) = 1$. أي أن $x = e$.

بما أن $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$ فإنه يوجد $k \in \mathbb{Z}$ حيث $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$. سنبرهن الآن أن $k = \ell cm(m,n)$. بما أن $k \in m\mathbb{Z}$ و $k \in n\mathbb{Z}$ فإنه يوجد $r , s \in \mathbb{Z}$ حيث $k = mr$ و $k = ns$. ومنه فإن $m \mid k$ و $n \mid k$. لنفرض الآن أن $m \mid u$ و $n \mid u$. عندئذ : $u \in m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$. ولذا فإن $u \in k\mathbb{Z}$. ومنه فإن $k \mid u$. وبالتالي فإننا نخلص إلى أن $k = \ell cm(m,n)$ Δ

تمرين (٢)

أثبت أن $S_n = \langle (1\ \ 2) , (1\ \ 3) , \ldots , (1\ \ n) \rangle$.

الحل

لنفرض أن $\sigma \in S_n$. عندئذ ، σ حاصل ضرب مناقلات . ولذا فإنه يكفي أن نثبت أنه إذا كانت $(i\ j)$ مناقلة في S_n حيث $i < j$ فإن $(i\ j) \in \langle (1\ 2) , (1\ 3) , \ldots , (1\ n) \rangle$.

ولكن هذا صحيحاً لأن $(i\ j) = (1\ i) \circ (1\ j) \circ (1\ i)$ Δ

تمرين (٣)

إذا كانت G زمرة وكان $a , x \in G$ فأثبت أن $C(xax^{-1}) = xC(a)x^{-1}$.

الحل

لاحظ أن $C(xax^{-1}) = \{g \in G : gxax^{-1} = xax^{-1}g\}$ وأن $xC(a)x^{-1} = \{xgx^{-1} : ga = ag\}$. لنفرض أن $h \in xC(a)x^{-1}$. عندئذٍ ، $h = xgx^{-1}$ حيث $ga = ag$. الآن :

$hxax^{-1} = (xgx^{-1})(xax^{-1}) = xgax^{-1} = xagx^{-1} = (xax^{-1})(xgx^{-1}) = xax^{-1}h$.

ولذا فإن $h \in C(xax^{-1})$. وبالعكس ، إذا كان $h \in C(xax^{-1})$ فإن $hxax^{-1} = xax^{-1}h$.

وبوضع $g = x^{-1}hx$ فإننا نجد أن $h = xgx^{-1}$. بقي أن نثبت أن $ga = ag$.ولهذا الغرض لاحظ أن

$$\begin{aligned} hxax^{-1} = xax^{-1}h &\Rightarrow x^{-1}hxax^{-1} = ax^{-1}h \Rightarrow gax^{-1} = ax^{-1}h \\ &\Rightarrow gax^{-1}h^{-1}x = a \Rightarrow ga(x^{-1}hx)^{-1} = a \\ &\Rightarrow gag^{-1} = a \Rightarrow ga = ag \end{aligned}$$

وبالتالي فإن $h \in xC(a)x^{-1}$ Δ

تمرين (٤)

لتكن $(\mathbb{Q} , +)$ زمرة الأعداد الكسرية وليكن $r_1 , r_2 , \ldots , r_n \in \mathbb{Q}$.

(أ) أثبت أن $\langle r_1 , r_2 , \ldots , r_n \rangle$ زمرة جزئية دورية .

(ب) أثبت أن $\mathbb{Q}$ غير منتهية التوليد .

(ج) إذا كانت $H_n = \langle 1/n! \rangle \leq \mathbb{Q}$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$ فأثبت أن $H_n \subseteq H_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

(د) أثبت أن الاحتواء في الفقرة (ج) فعلي .

(هـ) أثبت أن $\mathbb{Q}$ هي اتحاد زمر جزئية دورية .

الحل

(أ) لنفرض أن $r_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ حيث $\gcd(p_i , q_i) = 1$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ عندئذ ،

$$r_i = p_i\, q_1\, q_2 \cdots q_{i-1}\, q_{i+1} \cdots q_n \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_n} \in \left\langle \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_n} \right\rangle .$$

ولذا فإن $\left\langle \frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_n} \right\rangle \subseteq \langle r_1 , r_2 , \ldots , r_n \rangle$. وبالتالي فإنها كزمرة جزئية من زمرة دورية يجب أن يكون دورية .

(ب) إذا كانت $\mathbb{Q}$ منتهية التوليد فإننا نجد من الفقرة (أ) أن $\mathbb{Q}$ يجب أن تكون دورية وهذا مستحيل .

(ج) بما أن $\frac{1}{n!} = (n+1) \frac{1}{(n+1)!} \in H_{n+1}$ فإننا نخلص إلى أن $H_n \subseteq H_{n+1}$.

(د) بما أن $\frac{1}{(n+1)!} \notin H_n$ فإن الإحتواء فعلي .

(هـ) إذا كانت $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ فإن $\frac{a}{b} = (b-1)!\, a \frac{1}{b!} \in H_b$. وبالتالي فإن $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \geq 1} H_n$ Δ

تمارين (٢ , ٢)

(١) أثبت أن $H = \{a + bi : a^2 + b^2 = 1\} \leq (\mathbb{C}^*, .)$.

(٢) إذا كانت G_1 و G_2 زمرتين وكانت $G = G_1 \times G_2$ فأثبت أن $H = \{(a, e_2) : a \in G\}$ زمرة جزئية من G .

(٣) لتكن G هي الزمرة $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ حيث العملية الثنائية معرفة بالقاعدة $(a, b)(c, d) = (a + bc, bd)$. أثبت أن كل من المجموعات التالية هي زمرة جزئية من G وبين أياً منها إبدالية .

(أ) $H = \{(a, b) \in G : a = 0\}$ (ب) $K = \{(a, b) \in G : b > 0\}$

(ج) $L = \{(a, b) \in G : b = 1\}$

(٤) لتكن $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ حيث $(a, b)(c, d) = (ac, bc + d)$. بين أياً من المجموعات التالية زمرة جزئية من G .

(أ) $H = \{(a, 3(a-1)) : a \neq 0\}$ (ب) $K = \{(a, 0) : a > 0\}$

(ج) $L = \{(a, 3a^3) : a \neq 0\}$ (د) $M = \{(1, b) : b \in \mathbb{R}\}$

(٥) أثبت أن كل من المجموعات التالية هي زمرة جزئية من $GL(2, \mathbb{R})$.

(أ) $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad - bc = 1 \right\}$ (ب) $K = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \neq 0 \right\}$

(ج) $L=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}: a\neq 0$ أو $b\neq 0\right\}$ (د) $M=\left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}: a^2+b^2\neq 0\right\}$

(٦) أثبت أن $H=\left\{\dfrac{1+2n}{1+2m}: m,n\in\mathbb{Z}\right\}$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$.

(٧) لتكن $G=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ حيث $(a,b)(c,d)=(a+(-1)^b c, b+d)$

(أ) أثبت أن G زمرة غير إبدالية .

(ب) أثبت أن كل من $H=\{(a,b):b=0\}$ و $K=\{(a,b):a=0\}$ زمرة جزئية من G

(٨) لتكن $Y\subseteq X$ وليكن $y\in Y$. بين أياً من المجموعات التالية هي زمرة جزئية من S_X .

(أ) $H=\{\sigma\in S_X:\sigma(y)=y\}$ (ب) $K=\{\sigma\in S_X:\sigma(y)\in Y\}$

(ج) $M=\{\sigma\in S_X:\sigma(Y)\subseteq Y\}$ (د) $N=\{\sigma\in S_X:\sigma(Y)=Y\}$

(٩) إذا كانت $H=\{\sigma\in S_3:\sigma^2=e\}$ فهل $H\leq S_3$ ؟

(١٠) عين جميع الزمر الجزئية وارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية لكل من الزمرتين $(\mathbb{Z}_6,+_6)$ و $(U_9,\cdot_9)$. ماذا تلاحظ ؟

(١١) عين جميع الزمر الجزئية $(U_{16},\cdot_{16})$ وارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية .

(١٢) عين جميع الزمر الجزئية للزمر $(U_{27},\cdot_{27})$ وارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية .

(١٣) ارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية لكل من الزمر الدورية $\mathbb{Z}_4$،$\mathbb{Z}_8$،$\mathbb{Z}_{16}$ و$\mathbb{Z}_{32}$. ماذا تلاحظ ؟

(١٤) ارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية لكل من الزمر الدورية $\mathbb{Z}_6$،$\mathbb{Z}_{10}$،$\mathbb{Z}_{15}$،$\mathbb{Z}_{21}$ ، $\mathbb{Z}_{35}$.
ماذا تلاحظ ؟

(١٥) ارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية للزمرة $\mathbb{Z}_{12}$.

(١٦) ارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية للزمرة $\mathbb{Z}_{36}$.

(١٧) بين أياً من الزمرالتالية دورية . عين جميع مولدات الزمر الدورية منها :
U_8 ، U_9 ، U_{17} ، U_{18} ، U_{20} ، U_{25} ، U_{27} .

(١٨) جد المخطط الشبكي للزمر الجزئية لكل من S_3 و D_3 . ماذا تلاحظ ؟

(١٩) في الزمرة S_4 عين :

(أ) جميع الزمر الجزئية الدورية من الرتبة 4 (ب) ثلاث زمر جزئية غير دورية من الرتبة 4

(ج) أربع زمر جزئية من الرتبة 6 (د) ثلاث زمر جزئية من الرتبة 8

(هـ) زمرة جزئية من الرتبة 12

(٢٠) أثبت أن :

(أ) $S_n = \langle (1\ 2), (2\ 3), (2\ 4), \ldots, (2\ n), (1\ 2\ \ldots\ n) \rangle$.

(ب) $S_n = \langle (1\ 2), (1\ 2\ \ldots\ n) \rangle$.

(٢١) ليكن $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4)$ و $\beta = (2\ 4)$ عنصرين في S_4 .

(أ) أحسب $o(\alpha)$ و $o(\beta)$ وأثبت أن $\beta \circ \alpha = \alpha^3 \circ \beta$.

(ب) أثبت أن $H = \langle \alpha, \beta \rangle$ زمرة غير إبدالية رتبتها 8 .

(٢٢) أثبت أن $Z(S_n) = \{e\}$ لكل $n \geq 3$.

(٢٣) لتكن $G = \langle x, y \rangle$ حيث $o(x) = o(y) = 3$ و $(xy)^2 = e$.

(أ) أثبت أن $G = \{e, x, x^2, y, y^2, xy, yx, x^2y, xy^2, xy^2x, yx^2, y^2x\}$.

(ب) أثبت أن جميع زمر G الجزئية هي :

$\{e\}, \langle x \rangle, \langle x^2y \rangle, \langle yx^2 \rangle, \langle xy \rangle, \langle yx \rangle, \langle xy^2x \rangle, \langle y \rangle, H = \{e, xy, yx, xy^2x\}$

و G .

(ج) ارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية . قارن المخطط مع المخطط الشبكي للزمر الجزئية من الزمرة A_4 . ماذا تلاحظ ؟

(٢٤) لتكن $T = \langle x, y \rangle$ حيث $o(x) = 6$ ، $x^3 = y^2$ و $yx = x^{-1}y$.

(أ) أثبت أن $G = \{x^i y^j : 0 \leq i \leq 5, j = 0, 1\}$.

(ب) أثبت أن جميع زمر G الجزئية هي :

$\langle x \rangle, \langle x^2y \rangle, \langle xy \rangle, \langle y \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle x^3 \rangle, \{e\}$ و G .

(ج) ارسم المخطط الشبكي للرمز الجزئية من الزمرة G .

(٢٥) أثبت أن جميع زمر D_6 الجزئية هي :

$\langle a^2 \rangle, \langle b \rangle, \langle a^2b \rangle, \langle a^4b \rangle, \langle a^3b \rangle, \langle a^5b \rangle, \langle ab \rangle, \langle a^3, a^2b \rangle, \langle a^3, b \rangle,$

$\langle a^2, b \rangle, \langle a^2, ab \rangle, \langle a \rangle, \langle a^3 \rangle, \langle a^3, a^4b \rangle, \{e\}, D_6$

ثم ارسم المخطط الشبكي للزمر الجزئية .

(٢٦) أثبت أن كل من الزمرتين $(\mathbb{Q}^*, .)$, $(\mathbb{R}^*, .)$ ليست دورية.

(٢٧) أعط مثالاً لزمرة غير إبدالية بحيث تكون جميع زمرها الجزئية الفعلية دورية.

(٢٨) أعط مثالاً لزمرة غير منتهية تحتوي على زمرة جزئية فعلية دورية ومنتهية.

(٢٩) إذا كانت G زمرة منتهية فأثبت أن عدد الزمر الجزئية من G يجب أن يكون منتهياً . هل توجد زمرة غير منتهية وعدد زمرها الجزئية منته ؟

(٣٠) عين الزمرة الجزئية $\langle 4 , 6 \rangle$ من $\langle \mathbb{Z} , + \rangle$.

(٣١) عين الزمرة الجزئية $\langle 4 , 5 \rangle$ من $\langle \mathbb{Z} , + \rangle$.

(٣٢) لتكن $H \leq G$ و $K \leq G$. متى تكون $K \cup H \leq G$؟

(٣٣) إذا كانت الزمرة G تحتوي على زمرتين جزئيتين فعليتين على الأكثر فأثبت أن G دورية .

(٣٤) أثبت أن $\mathbb{Z}_p$ حيث p عدد أولي لا تحتوي على زمر جزئية فعلية .

(٣٥) لتكن $H \leq S_n$ حيث $n > 2$. برهن على أن جميع عناصر H إما أن تكون تبديلات زوجية أو أن عدد التبديلات الزوجية في H يساوي عدد التبديلات الفردية في H .

(٣٦) إذا كانت G زمرة وكان $a \in G$ وكان $\lambda_a : G \to G$ تطبيقاً معرفاً بالقاعدة $\lambda_a (g) = g a$ لكل $g \in G$ فأثبت أن $\lambda_a \in S_G$ وأن $H = \{ \lambda_a : a \in G \} \leq G$.

(٣٧) لتكن G زمرة إبدالية وليكن $n \in \mathbb{N}$. أثبت أن :

(أ) $nG = \{nx : x \in G\} \leq G$ (ب) $G[n] = \{ x \in G : nx = e \} \leq G$.

(٣٨) لتكن G زمرة .

(أ) إذا كانت $H \leq G$ فأثبت أن $HH = H$.

(ب) إذا كانت S مجموعة جزئية منتهية من G حيث $SS = S$ فأثبت أن $S \leq G$.

(ج) بين أن الفقرة (ب) ليست بالضرورة صحيحة إذا كانت S مجموعة غير منتهية .

(٣٩) إذا كانت G زمرة إبدالية وكانت $H = \{ a \in G : o(a) < \infty \}$ فأثبت أن $H \leq G$.

(٤٠) إذا كانت G زمرة وكان $a \in G$ هو العنصر الوحيد الذي رتبته n فأثبت أن $a \in Z(G)$.

(٤١) إذا كانت $H \leq G$ فأثبت أن $Z(G) \leq Z(H)$.

(٤٢) إذا كانت $H \leq G$ وكانت $\sim$ علاقة معرفة على G كالتالي :

$a \sim b$ إذا وفقط إذا كان $ab^{-1} \in H$ لكل $a , b \in G$. فأثبت أن $\sim$ علاقة تكافؤ على G.

(٤٣) إذا كان $H , N \leq G$ وكان $h^{-1}Nh \subset N$ لكل $h \in H$ فأثبت أن $NH \leq G$.

(٤٤) إذا كانت $H \leq G$ وكانت $N = \bigcap_{x \in G} x^{-1}Hx$ فأثبت أن $N \leq G$ وأن $y^{-1}Ny = y$ لكل $y \in G$.

(٤٥) إذا كان $H , K \leq G$ وكان $x^{-1}Hx \subseteq H$ و $x^{-1}Kx \subseteq K$ لكل $x \in G$ فأثبت أن $HK \leq G$ وأن $x^{-1}(HK)x \subseteq HK$ لكل $x \leq G$.

(٤٦) إذا كانت $H \leq G$ وكانت $x^{-1}Hx \subset H$ لكل $x \in G$ فأثبت أن $x^{-1}Hx = H$.

(٤٧) لنفرض أن $H , K \leq G$ حيث $x^{-1}Hx = H$ و $x^{-1}Kx = K$ لكل $x \in G$ وحيث $H \cap K = \{e\}$. أثبت أن $hk = kh$ لكل $h \in H$ و $k \in K$.

(٤٨) لتكن $H \leq G$ ولتكن $H \leq K \leq G$, $x^{-1}Hx$ حيث $x \in G$ وحيث K زمرة دورية منتهية أثبت أن $x^{-1}Hx = H$.

(٤٩) إذا كان m يقسم n فـأثبت أن للمعادلة $m[x]=[0]$ بالضبط m من الحلول المختلفة في الزمرة $(\mathbb{Z}_n , +_n)$.

(٥٠) إذا كان $1 < m < n$ وكان m لا يقسم n فأثبت أن للمعادلة $m[x]=[0]$ بالضبط d من الحلول المختلفة في الزمرة $(\mathbb{Z}_n , +_n)$ حيث $\gcd(n, m) = d$.

(٥١) لتكن G زمرة إبدالية وكل من H و K زمرة جزئية دورية منتهية حيث $|H| = r$ و $|K| = s$

(أ) إذا كان $\gcd(r, s) = 1$ فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية دورية رتبتها rs.

(ب) إذا كان $\gcd(r, s) = d$ فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية دورية رتبتها $\ell cm(r, s)$.

(٥٢) إذا كانت G زمرة دورية منتهية وكان $a \in G$ هو المولد الوحيد للزمرة G فأثبت أن $|G| \leq 2$.

(٥٣) بين أياً من العبارات التالية صحيحة وأيها خاطئة :

(أ) كل من عناصر الزمرة الدورية G يولد الزمرة G .

(ب) G زمرة إبدالية إذا وفقط إذا كانت G زمرة دورية .

(ت) كل زمرة جزئية من زمرة إبدالية يجب ان تكون إبدالية .

(ث) كل عنصر a في زمرة G يولد زمرة جزئية من G .

(ج) S_n ليست دورية لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

(ح) إذا كانت G زمرة غير إبدالية فإن جميع الزمر الجزئية الفعلية من G غير إبدالية .

(خ) كل زمرة G رتبتها أقل من أو يساوي 4 هي زمرة دورية .

(د) A_3 زمرة دورية .

(ذ) إذا كانت جميع الزمر الجزئية الفعلية من الزمرة G دورية فإن G دورية .

(ر) جميع الزمر الجزئية الفعلية غير التافهة من $(\mathbb{Z} , +)$ زمر غير منتهية .

(ز) إذا كان $H , K , L \leq G$ حيث $H \cup K \subseteq L$ فإن $HKL \subseteq L$.

(س) إذا كانت G زمرة غير إبدالية فإن $Z (G) = \{e\}$.

(ش) توجد زمرة جزئية فعلية H من $(\mathbb{Z} , +)$ تحتوي كل من $3\mathbb{Z}$ و $4\mathbb{Z}$.

(ص) إذا كانت H زمرة جزئية من $(\mathbb{Q} , +)$ حيث $\mathbb{Z} \subset H$ فإن $H = \mathbb{Q}$.

(ض) إذا كانت H زمرة جزئية من $(\mathbb{Q}^* , .)$ حيث $\mathbb{Z} - \{0\} \subseteq H$ فإن $H = \mathbb{Q}^*$.

(ط) يوجد زمرة غير منتهية تحتوي على زمرة جزئية غير تافهة دورية منتهية .

(ظ) S_4 تحتوي على زمرة جزئية دورية رتبتها 6 .

(ع) جميع الزمر الجزئية الفعلية من A_4 دورية .

(غ) جميع الزمر الجزئية الفعلية من $(\mathbb{R} , +)$ دورية .

(ف) عدد مولدات الزمرة $(\mathbb{Z}_n , +_n)$ هو $\varphi(n)$ حيث $\varphi(n)$ هي دالة أويلر.

الفصل الثالث

التشاكلات وزمر خارج القسمة
HOMOMORPHISMS AND FACTOR GROUPS

(٣,١) تشاكلات الزمر ومبرهنة كيلي
Homomorphisms of Groups and Cayley's Theorem

نقوم في هذا البند بدراسة علاقة بين زمرتين G_1 و G_2 تأخذ شكل تطبيق $\varphi : G_1 \to G_2$ يحافظ على التركيب الداخلي للزمر ويطلق عليه تشاكل الزمر . في البداية نقوم بتعريف هذا التشاكل وندرس خواصه الأساسية ، ثم نقدم حالة خاصة من التشاكلات تسمى التماثلات ونلقي الضوء على بعض الزمر المتماثلة. إن لمفهوم التماثل في الزمر فوائد كثيرة من أهمها تصنيف الزمر وتمثيلها بدلالة زمر بسيطة التركيب يسهل التعرف عليها . وفي نهاية هذا البند نوظف مفهوم التماثل بتقديم إحدى المبرهنات الأساسية في نظرية الزمر ، آلا وهي مبرهنة كيلي التي تبين لنا العلاقة الوثيقة بين الزمر بشكلها العام وبين زمرة التبديلات التي كما اسلفنا كانت اول زمرة تتم دارستها قبل تطور نظرية الزمر بشكلها الحالي .

تعريف (٣,١)

لتكن G_1 و G_2 زمرتين وليكن $\varphi : G_1 \to G_2$ تطبيقاً. نقول إن φ تشاكل (**homomorphism**) إذا كان: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ لكل $a, b \in G_1$.

مثال (٣,١)

من الواضح أن التطبيق $\varphi : G_1 \to G_2$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x) = e_2$ لكل $x \in G_1$ تشاكل . يعرف هذا التشاكل عادة بالتشاكل التافه (**trivial homomorphism**). كذلك التطبيق $I : G \to G$ المعرف بالقاعدة $I(x) = x$ لكل $x \in G$ تشاكل . يعرف هذا التشاكل بالتشاكل المحايد (**identity homomorphism**) □

مثال (٣,٢)

التطبيق $\varphi:(\mathbb{R}^*,+)\to(\mathbb{R}^+,.)$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x)=e^x$ لكل $x\in\mathbb{R}$ تشاكل ، لأنه لكل $x,y\in\mathbb{R}$ لدينا : $\varphi(x+y)=e^{x+y}=e^xe^y=\varphi(x)\varphi(y)$ □

مثال (٣,٣)

التطبيق $\varphi:(\mathbb{R}^*,.)\to(\mathbb{R}^+,.)$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x)=|x|$ لكل $x\in\mathbb{R}^*$ تشاكل ، لأنه لكل $x,y\in\mathbb{R}^*$ لدينا : $\varphi(xy)=|xy|=|x||y|=\varphi(x)\varphi(y)$ □

مثال (٣,٤)

التطبيق $\varphi:(\mathbb{Z},+)\to(2\mathbb{Z},+)$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x)=2x$ لكل $x\in\mathbb{Z}$ ، لأنه لكل $x,y\in\mathbb{Z}$ لدينا : $\varphi(x+y)=2(x+y)=2x+2y=\varphi(x)+\varphi(y)$ □

مثال (٣,٥)

ليكن $m\in\mathbb{Z}^+$. التطبيق $\varphi_m:(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{Z},+)$ المعرف بالقاعدة $\varphi_m(x)=mx$ لكل $x\in\mathbb{Z}$ تشاكل ، لأنه لكل $x,y\in\mathbb{Z}$ لدينا :

$$\varphi_m(x+y)=m(x+y)=mx+my=\varphi_m(x)+\varphi_m(y) \quad \square$$

مثال (٣,٦)

التطبيق $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$ المعرف بالقاعدة $\varphi(m)=[m]$ لكل $m\in\mathbb{Z}$ تشاكل حيث $[m]$ هو فصل التكافؤ قياس n ، لأنه لكل $m,k\in\mathbb{Z}$ فإن :

$$\varphi(m+k)=[m+k]=[m]+[k]=\varphi(m)+\varphi(k) \quad \square$$

مثال (٣,٧)

التطبيق $\varphi:S_n\to\mathbb{Z}_2$ المعرف بالقاعدة :

$$\varphi(\sigma)=\begin{cases}[1] & , \text{فردي } \sigma \\ [0] & , \text{زوجي } \sigma\end{cases}$$

تشاكل لأنه لكل $\sigma,\mu\in S_n$ فإن : $\varphi(\sigma\circ\mu)=\varphi(\sigma)+\varphi(\mu)$ (تحقق من ذلك) □

مثال (٣,٨)

التطبيق $\varphi : (\mathbb{R}^*,.) \to (\{-1,1\},.)$ المعرف بالقاعدة :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

تشاكل لأنه من السهل التحقق من أن : $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ لكل $x,y \in \mathbb{R}^*$ □

مثال (٣,٩)

لتكن $H \leq G$ وليكن $a \in G$. التطبيق $\varphi : H \to aHa^{-1}$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x) = axa^{-1}$ لكل $x \in H$ تشاكل ، لأنه لو كان $x, y \in H$ فإن :

$$\varphi(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = \varphi(x)\varphi(y) \quad \square$$

مثال (٣,١٠)

التطبيق $\varphi : GL(n,\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^*,.)$ المعرف بالقاعدة $\varphi(A) = \det A$ لكل $A \in GL(n,\mathbb{R})$ تشاكل، لأنه لو كان $A,B \in GL(n,\mathbb{R})$ فإن :

$$\varphi(AB) = \det(AB) = (\det A)(\det B) = \varphi(A)\varphi(B) \quad \square$$

قبل أن نستعرض بعض الخواص الأساسية للتشاكلات يلزمنا التعريف التالي :

تعريف (٣,٢)

ليكن $\varphi : G_1 \to G_2$ تشاكلاً ولتكن $H_1 \subseteq G_1$ و $H_2 \subseteq G_2$.تسمى المجموعة $\varphi(H_1) = \{\varphi(h) : h \in H_1\}$ صورة H_1 (**image of** H_1) . وتسمى المجموعة $\varphi^{-1}(H_2) = \{g \in G_1 : \varphi(g) \in H_2\}$ الصورة العكسية للمجموعة H_2 (**preimage of** H_2). كما تسمى المجموعة $Ker\varphi = \{g \in G_1 : \varphi(g) = e_2\}$ نواة التشاكل φ (**kernel of** φ) .

مبرهنة (٣,١)

إذا كان $\varphi : G_1 \to G_2$ تشاكلاً فإن :

(١) $\varphi(e_1) = e_2$ (٢) $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$

(٣) إذا كانت $H \le G_1$ فإن $\varphi(H) \le G_2$ (٤) إذا كانت $K \le G_2$ فإن $\varphi^{-1}(K) \le G_1$

(٥) $\mathrm{Ker}\varphi \le G_1$ (٦) $\mathrm{Ker}\varphi = \{e_1\}$ إذا وفقط إذا كان φ آحادياً

(٧) إذا كانت G_1 إبدالية فإن $\varphi(G_1)$ إبدالية

(٨) إذا كان $a \in G_1$ وكان $o(a) = n$ فإن $o(\varphi(a))$ يقسم n

البرهان

(١) لاحظ أن : $\varphi(e_1)\varphi(e_1) = \varphi(e_1e_1) = \varphi(e_1) = \varphi(e_1)e_2$. ولذا فإن $\varphi(e_1) = e_2$.

(٢) لاحظ أن : $\varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(e_1) = e_2$. وأن :

$\varphi(a^{-1})\varphi(a) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(e_1) = e_2$.

وبالتالي باستخدام وحدانية النظير نجد أن: $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

(٣) لنفرض أن $H \le G_1$. بما أن $e_1 \in H$ وأن $e_2 = \varphi(e_1)$ فإن $e_2 \in \varphi(H)$. ولذا فإن $\varphi(H) \neq \phi$. لنفرض الآن أن $\varphi(a), \varphi(b) \in \varphi(H)$ حيث $a, b \in H$. بما أن $H \le G_1$ فإن $ab^{-1} \in H$. ولذا فإن: $\varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(ab^{-1}) \in \varphi(H)$. ومنه فإن $\varphi(H) \le G_2$.

(٤) لنفرض أن $K \le G_2$. لاحظ أن $e_1 \in \varphi^{-1}(K)$. ولذا فإن $\varphi^{-1}(K) \neq \phi$. لنفرض الآن أن $a,b \in \varphi^{-1}(K)$. عندئذ ، $\varphi(a),\varphi(b) \in K$. ولذا فإن $\varphi(a)\varphi(b)^{-1} \in K$ وإن : $\varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1} \in K$. إذن ، $ab^{-1} \in \varphi^{-1}(K)$. أي أن $\varphi^{-1}(K) \le G_1$.

(٥) لاحظ أن $\mathrm{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\{e_2\})$. وبما أن $\{e_2\} \le G_2$ فإننا نجد بإستخدام الفقرة (٤) أن $\mathrm{Ker}\varphi \le G_1$.

(٦) لنفرض أولاً أن $\mathrm{Ker}\varphi = \{e_1\}$. إذا كان $a, b \in G_1$ فإن :

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = e_2 \Rightarrow \varphi(ab^{-1}) = e_2 \Rightarrow ab^{-1} \in \mathrm{Ker}\varphi$$

ولذا فإن $ab^{-1} = e_1$. أي أن $a = b$. وبالتالي فإن φ أحادي .

ولبرهان العكس ، نفرض أن φ أحادي . وليكن $a \in \mathrm{Ker}\varphi$. الآن:

$a \in \mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(a) = e_2 = \varphi(e_1) \Rightarrow a = e_1$. إذن ، $\mathrm{Ker}\varphi = \{e_1\}$.

(٧) لنفرض أن G_1 إبدالية وأن $\varphi(a), \varphi(b) \in \varphi(G_1)$. عندئذ:

$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) = \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a)$. ولذا فإن $\varphi(G_1)$ إبدالية .

(٨) لاحظ أن : $(\varphi(a))^n = \varphi(a^n) = \varphi(e_1) = e_2$. إذن ، $o(\varphi(a))$ يقسم n ◆

تبين لنا المبرهنة التالية أن التشاكل الوحيد من الزمرة $(\mathbb{Q},+)$ إلى الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ هو التشاكل التافه.

مبرهنة (٣,٢)

إذا كان $\varphi:(\mathbb{Q},+)\to(\mathbb{Z},+)$ تشاكلاً فإن $\varphi(x)=0$ لكل $x\in\mathbb{Q}$.

البرهان

سنبرهن أولاً أن $\varphi(1)=0$. لنفرض لغرض التناقض أن $\varphi(1)\neq 0$. عندئذ ، لكل $n\in\mathbb{Z}-\{0\}$ لدينا:

$$\varphi(1)=\varphi\left(\frac{n}{n}\right)=\varphi\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+\ldots+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$$

ولذا فإن n يقسم $\varphi(1)$ لكل $n\in\mathbb{Z}-\{0\}$. ومن ثم فإنه يوجد عدد غير منته من القواسم للعدد $\varphi(1)$ وهذا مستحيل . وبالتالي فإن $\varphi(1)=0$. لنفرض الآن أن $m,n\in\mathbb{Z}-\{0\}$. عندئذ :

$$m\varphi(1)=m\varphi\left(\frac{n}{n}\right)=mn\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=n\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$$. وبالتالي فإن $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)=0$ ◆

تعريف (٣,٣)

ليكن $\varphi:G_1\to G_2$ تشاكلاً .

(١) نقول إن φ تشاكل غامر أو شامل (**epimorphism**) إذا كان φ تطبيقاً غامراً . وفي هـــذه الحالة نقول إن G_2 صورة تشاكلية (**homomorphic image**) للزمرة G_1 .

(٢) نقول إن φ تشاكل أحادي (**monomorphism**) إذا كان φ تطبيقاً أحادياً .

(٣) نقول إن φ تماثل (**isomorphism**) إذا كان φ تقابلاً (أي أحادياً وشاملاً) .

(٤) نقول إن الزمرتين G_1 و G_2 متماثلتان (**isomorphic**) ونكتب $G_1\cong G_2$ إذا وجد تماثل $\varphi:G_1\to G_2$.

مثال (٣,١١)

لقد بينا في المثال (٣,٢) أن التطبيق $\varphi:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}^+,.)$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x)=e^x$ تشاكلاً. الآن : $\operatorname{Ker}\varphi=\{x\in\mathbb{R}:\varphi(x)=1\}=\{x\in\mathbb{R}:e^x=1\}=\{0\}$. ولذا فإن ، φ أحادي . كما أن ، φ شامل لأنه لكل $y\in\mathbb{R}^+$ لدينا : $\varphi(\ln y)=e^{\ln y}=y$.

إذن ، $(\mathbb{R},+)\cong(\mathbb{R}^+,.)$ □

مثال (٣,١٢)

لقد بينا في المثال (٣,٣) أن التطبيق $\varphi:(\mathbb{R}^*,.)\to(\mathbb{R}^+,.)$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x)=|x|$ تشاكلاً. الآن : $\operatorname{Ker}\varphi=\{x\in\mathbb{R}^*: |x|=1\}=\{-1,1\}$. ولذا فإن φ ليس أحادياً . لاحظ أن φ تشاكل غامر □

مثال (٣,١٣)

لقد بينا في المثال (٣,٤) أن التطبيق $\varphi:(\mathbb{Z},+)\to(2\mathbb{Z},+)$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x)=2x$ تشاكلاً. الآن : $\operatorname{Ker}\varphi=\{x\in\mathbb{Z}:2x=0\}=\{0\}$. إذن ، φ أحادي . كذلك φ شامل لأنه إذا كان $y\in 2\mathbb{Z}$ فإن $y=2x$ حيث $x\in\mathbb{Z}$. ولذا فإن $\varphi(x)=2x=y$. إذن، $(\mathbb{Z},+)\cong(2\mathbb{Z},+)$ □

مثال (٣,١٤)

لقد بينا في المثال (٣,٦) أن التطبيق $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$ المعرف بالقاعدة $\varphi(m)=[m]$ تشاكل . من الواضح أن φ شامل . الآن :

$$\operatorname{Ker}\varphi=\{a\in\mathbb{Z}:\varphi(a)=[a]=[0]\}=\{a\in\mathbb{Z}:a \text{ يقسم } n\}$$
$$=\{a\in\mathbb{Z}:a=kn,k\in\mathbb{Z}\}=\{nk:k\in\mathbb{Z}\}=n\mathbb{Z}$$

ولذا فإن φ ليس أحادياً □

مثال (٣,١٥)

لقد بينا في المثال (٣,٧) أن التطبيق $\varphi:S_n\to\mathbb{Z}_2$ المعرف بالقاعدة :

$\varphi(\sigma)=\begin{cases}1 & , \sigma \text{ فردي}\\ 0 & , \sigma \text{ زوجي}\end{cases}$ تشاكل. من الواضح أن φ شامل . الآن :

$\operatorname{Ker}\varphi=\{\sigma\in S_n:\varphi(\sigma)=0\}=A_n$. إذن ، φ ليس أحادياً □

مثال (٣,١٦)

إذا كانت $H\le G$ وكان $a\in G$ فقد بينا في المثال (٣,٩) أن التطبيق $\varphi:H\to aHa^{-1}$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x)=axa^{-1}$ تشاكل . الآن : $\operatorname{Ker}\varphi=\{x\in H:axa^{-1}=e\}=\{e\}$. ولذا فإن φ أحادي . من الواضح أن φ شامل . إذن ، $H\cong aHa^{-1}$ □

مثال (٣,١٧)

لقد بينا في المثال (٣,١٠) أن التطبيق $\varphi : GL(n,\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^*,.)$ المعرف بالقاعدة $\varphi(A) = \det A$ تشاكل . الآن :

$\operatorname{Ker}\varphi = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\} = SL(n,\mathbb{R})$. ولذا فإن φ ليس أحادياً □

مثال (٣,١٨)

سنبين في هذا المثال أنه لا يمكن أن تكون $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$ صورة تشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$. ولذا نفرض أنه يوجد تشاكل غامر $\varphi : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$. لاحظ أن رتبة العنصر $a = ([7],[0]) \in \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$ هي 8 . وبما أن φ غامر فإنه يوجد $b \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ حيث $\varphi(b) = a$. وباستخدام المبرهنة (٣,٢) نجد $o(\varphi(b)) = o(a) = 8$ يقسم $o(b)$ وهذا مستحيل لأن رتب b الممكنة هي 1,2,4 . إذن ، φ ليس تشاكلاً غامراً . وبالتالي فإنه لا يمكن أن تكون $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$ صورة تشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ □

المبرهنة التالية تبين لنا أن علاقة التماثل بين الزمر هي علاقة تكافؤ .

مبرهنة (٣,٣)

لتكن Γ مجموعة جميع الزمر ولتكن ~ علاقة معرفة على Γ كالتالي :

$G_1 \sim G_2$ إذا وفقط إذا كان $G_1 \cong G_2$ لكل $G_1, G_2 \in \Gamma$. عندئذ ~ علاقة تكافؤ .

البرهان

(١) ~ انعكاسية لأن التطبيق المحايد $I : G \to G$ المعرف بالقاعدة $I(x) = x$ لكل $x \in G$ تماثل. ولذا فإن $G \cong G$.

(٢) لإثبات أن العلاقة تناظرية نفرض أن $\varphi : G_1 \to G_2$ تماثل . بما أن φ تقابل فإن $\varphi^{-1} : G_2 \to G_1$ تقابل أيضاً . كذلك ، إذا كان $a, b \in G_2$ فإنه يوجد $x, y \in G_1$ بحيث يكون $\varphi(x) = a$ و $\varphi(y) = b$. ولذا فإن : $ab = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$. ومنه فإن :

$\varphi^{-1}(ab) = xy = \varphi^{-1}(a)\varphi^{-1}(b)$. أي أن φ^{-1} تشاكل. وبالتالي فإنه تماثل .

(٣) لإثبات أن ~ متعدية نفرض أن $\varphi: G_1 \to G_2$ و $\psi: G_2 \to G_3$ تماثلان . إذن ، $\psi \circ \varphi: G_1 \to G_3$ تقابل . كذلك ، إذا كان $a, b \in G_1$ فإن :

$$(\psi \circ \varphi)(ab) = \psi(\varphi(ab)) = \psi(\varphi(a)\varphi(b)) = \psi(\varphi(a))\psi(\varphi(b)) = (\psi \circ \varphi)(a)(\psi \circ \varphi)(b)$$

ولذا فإن $\psi \circ \varphi$ تشاكل وبالتالي فهو تماثل ◆

ملحوظات

(١) بما أن علاقة التماثل على مجموعة الزمر هي علاقة تكافؤ فإنها تجزئ مجموعة جميع الزمر إلى فصول تكافؤ بحيث تكون جميع الزمر في فصل التكافؤ الواحد متماثلة وأي زمرتين في فصلين مختلفين تكونان غير متماثلتين . ولذا فإن تصنيف الزمر يتم عادة باستخدام علاقة التماثل هذه . فعندما نقول مثلاً أنه توجد زمرتان (باستثناء التماثل **up to isomorphism**) نعني بذلك أن علاقة التكافؤ تجزئ مجموعة الزمر إلى فصلي تكافؤ فقط وكل زمرة تنتمي إلى أحد هذين الفصلين .

(٢) إذا كانت G_1 و G_2 زمرتين فلكي نثبت أنهما متماثلتان نتبع عادة الخطوات التالية :

(أ) نعرف تطبيق $\varphi: G_1 \to G_2$ (ب) نثبت أن φ تماثل (أي تشاكل وأحادي وشامل).

مثال (٣,١٩)

دعنا نثبت أن $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong V$. لاحظ أن :

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{([0],[0]),([0],[1]),([1],[0]),([1],[1])\}$ وأن $V = \{e,a,b,c\}$ حيث $ac = ca = b$ و $bc = cb = a$ و $a^2 = b^2 = c^2 = e$. نعرف التطبيق $\varphi: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to V$ كالتالي : $\varphi(([0],[0])) = e, \varphi(([0],[1]) = a, \varphi(([1],[0])) = b, \varphi(([1],[1]) = c$. أنه ليس بالأمر العسير أن نبين أن φ تماثل □

مثال (٣,٢٠)

سنثبت أن $(\mathbb{C},+) \cong (\mathbb{R}\times\mathbb{R},+)$. نعرف التطبيق $\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ بالقاعدة $\varphi(x+iy) = (x,y)$ لكل $x+iy \in \mathbb{C}$. عندئذ لكل $a+ib, c+id \in \mathbb{C}$ لدينا:

$$\varphi((a+ib)+(c+id)) = \varphi((a+c)+i(b+d)) = (a+c, b+d) = (a,b)+(c,d)$$

ولذا فإن φ تشاكل . ومن الواضح أنه أحادي وشامل. ولذا فإن φ تقابل وبالتالي فإن $(\mathbb{C},+) \cong (\mathbb{R}\times\mathbb{R},+)$ □

لقد رأينا في الفصل الثاني أن $(\mathbb{Z},+)$ زمرة دورية غير منتهية وأن $(\mathbb{Z}_n,+_n)$ زمرة دورية منتهية رتبتها n . سنبرهن الآن أن هذه هي جميع الزمر الدورية (باستثناء التماثل) .

مبرهنة (٣,٤)

لتكن $G=\langle a\rangle$ زمرة دورية .

(أ) إذا كانت G منتهية رتبتها n فإن $G\cong\mathbb{Z}_n$.

(ب) إذا كانت G غير منتهية فإن $G\cong\mathbb{Z}$.

البرهان

(أ) ليكن $\varphi:G\to\mathbb{Z}_n$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(a^i)=[i]$ لكل $a^i\in G$. لإثبات أن φ تشاكل نفرض أن $a^i,a^j\in G$. عندئذ :

$$\varphi(a^ia^j)=\varphi(a^{i+j})=[i+j]=[i]+_n[j]=\varphi(a^i)+_n\varphi(a^j)\ .$$

ولذا فإن ، φ تشاكل . ولإثبات أن φ أحادي لاحظ أن :

$\varphi(a^i)=\varphi(a^j)\Rightarrow[i]=[j]\Rightarrow n\,|\,(j-i)\Rightarrow a^{j-i}=e\Rightarrow a^j=a^i$. ولكن $0\le i,j\le n-1$.

ولذا فإن $|j-i|\le n-1$. وبما أن $n\,|\,|j-i|$ فإننا نستنتج أن $i=j$.

إذن ، φ أحادي . وبما أن $|\mathbb{Z}_n|=|G|=n$ فإن φ شامل. ولذا فإن φ تماثل . وبالتالي فإن $G\cong\mathbb{Z}$.

(ب) ليكن $\varphi:G\to\mathbb{Z}$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(a^i)=i$ لكل $a^i\in G$. لاحظ أن :

$$a^i=a^j\Leftrightarrow a^{i-j}=e\Leftrightarrow i-j=0\Leftrightarrow i=j$$

لذا فإن φ تطبيق أحادي. من الواضح أن φ شامل . كذلك :

$\varphi(a^ia^j)=\varphi(a^{i+j})=i+j=\varphi(a^i)+\varphi(a^j)$. إذن ، $G\cong\mathbb{Z}$ ◆

لقد وضحنا الخطوات التي يجب علينا اتباعها لإثبات أن زمرتين متماثلتان. دعنا نلقي الآن الضوء على كيفية معرفة أن الزمرتين غير متماثلتين . إذا كانت كل من G_1 و G_2 زمرتين منتهيتين وكان $|G_1|\ne|G_2|$ فإنه لا يمكن أن يوجد تطبيق أحادي من G_1 إلى G_2 ولذا فإنهما غير متماثلتين (نستخدم الرمز $G_1\not\cong G_2$ ليدل على أن الزمرتين غير متماثلين) . فيما عدا ذلك فإنه لمعرفة أن الزمرتين غير متماثلتين فإنه يفترض أن نجرب جميع التطبيقات الاحادية والشاملة من G_1 إلى G_2 والتأكد من أنها لا تحقق شروط التماثل . وأعتقد أن القارئ يدرك أن ذلك في عداد المستحيل في معظم

الأحوال . ولكننا لو أمعنا النظر في معنى العبارة "الزمرتان G_1 و G_2 متماثلتان" لوجدنا أن الزمرة G_1 هي نفس الزمرة G_2 ما عدا في تسمية عناصر كل منها ، أي أن G_1 و G_2 تتمتعان بنفس "الصفات الزمرية" ولذا ، لكي تكون الزمرتان غير متماثلتين يكفي أن نجد صفة واحدة تتمتع بها إحدى الزمرتين ولا تتمتع بها الأخرى والمبرهنة التالية تساعدنا على تحقيق ذلك .

مبرهنة (٣,٥)

ليكن التطبيق $\varphi : G_1 \to G_2$ تماثلاً . عندئذ :

(أ) G_1 إبدالية إذا وفقط إذا كانت G_2 إبدالية .

(ب) $o(a) = o(\varphi(a))$ لكل $a \in G_1$.

(ج) G_1 دورية إذا وفقط إذا كانت G_2 دورية .

(د) للمعادلة $x^n = a$ حل في الزمرة G_1 إذا وفقط إذا كان للمعادلة $[\varphi(x)]^n = \varphi(a)$ حل في الزمرة G_2 لكل $a \in G_1$.

البرهان

(أ) لنفرض أن G_1 إبدالية ولنفرض أن $x, y \in G_2$. بما أن φ شامل فإنه يوجد $a, b \in G_1$ بحيث يكون $\varphi(a) = x$ و $\varphi(b) = y$. الآن :

$xy = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) = \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a) = yx$. ولذا فإن G_2 إبدالية.

ولبرهان العكس ، نفرض أن G_2 إبدالية وأن $a, b \in G_1$. عندئذ:

$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a) = \varphi(ba)$ ولذا فإن $ab = ba$. وبالتالي فإن G_1 إبدالية .

(ب) ليكن $a \in G$. لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ لدينا : $a^n = e_1 \Leftrightarrow \varphi(a^n) = \varphi(e_1) \Leftrightarrow (\varphi(a))^n = e_2$.

إذن ، $o(a)$ منته إذا وفقط إذا كان $o(\varphi(a))$ منته . لنفرض الآن أن $o(a) = m$ وأن $o(\varphi(a)) = n$. بما أن $a^m = e_1$ فإن $(\varphi(a))^m = e_2$. ولذا فإن n يقسم m. كذلك ، بما أن $(\varphi(a))^n = e_2$ فإن $a^n = e_1$. ومنه فإن m يقسم n . إذن ، $m = n$.

(ج) لنفرض أن $G_1 = \langle a \rangle$ دورية. بما أن $\varphi(a) \in G_2$ فإن $\langle \varphi(a) \rangle \subseteq G_2$. لنفرض الآن أن $b \in G_2$. بما أن φ شامل فإنه يوجد $c \in G_1$ بحيث يكون $\varphi(c) = b$. إذن $c = a^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}$. ولذا فإن : $b = \varphi(c) = \varphi(a^n) = (\varphi(a))^n \in \langle \varphi(a) \rangle$. إذن ، $G_2 = \langle \varphi(a) \rangle$.

أما برهان العكس ، فنحصل عليه بملاحظة أن φ^{-1} تماثل أيضاً .

(د) لاحظ أن : $x^n = a \Leftrightarrow \varphi(x^n) = \varphi(a) \Leftrightarrow (\varphi(x))^n = \varphi(a)$.

ولذا فإن $x^n = a$ لها حل في G_1 إذا وفقط إذا كان للمعادلة $(\varphi(x))^n = \varphi(a)$ حل في G_2 ◆

مثال (٣,٢١)

لقد بينا سابقاً أن $(\mathbb{Q},+)$ ليست دورية ولذا فإن $(\mathbb{Z},+) \not\cong (\mathbb{Q},+)$ □

مثال (٣,٢٢)

$(\mathbb{Q}^*,.) \not\cong (\mathbb{Q},+)$. وذلك لأن رتبة أي عنصر ما عدا المحايد من عناصر $(\mathbb{Q},+)$ غير منتهية ولكن $(-1)^2 = 1$. ولذا فإن رتبة -1 تساوي 2 في الزمرة $(\mathbb{Q}^*,.)$ □

مثال (٣,٢٣)

$(\mathbb{Q}^*,.) \not\cong (\mathbb{R}^*,.)$ لأن للمعادلة $x^2 = 2$ حل في $\mathbb{R}^*$ ولكن ليس لها حل في $\mathbb{Q}^*$ □

مثال (٣,٢٤)

$(\mathbb{R}^*,.) \not\cong (\mathbb{C}^*,.)$ لأن للمعادلة $x^2 = -1$ حل في $\mathbb{C}^*$ لكن ليس لها حل في $\mathbb{R}^*$ □

مثال (٣,٢٥)

$(\mathbb{R}^*,.) \not\cong (\mathbb{R},+)$ لأن للمعادلة $x + x = -1$ حل في $\mathbb{R}$ ولكن ليس للمعادلة $x.x = -1$ حل في $\mathbb{R}^*$ □

مثال (٣,٢٦)

$D_4 \not\cong Q_8$ لأن D_4 تحتوي على خمسة عناصر رتبة كل منها 2 بينما Q_8 تحتوي على عنصر واحد فقط من الرتبة 2 □

مثال (٣,٢٧)

$\mathbb{Z}_4 \not\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ لأن $\mathbb{Z}_4$ دورية بينما $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ليست دورية □

ننهي هذا البند بتقديم مبرهنة كيلي (**Cayley's Theorem**) .

مبرهنة (٣,٦) [كيلي]

لتكن G زمرة . وليكن $a \in G$.

(أ) التطبيق $\lambda_a : G \to G$ المعرف بالقاعدة $\lambda_a(x) = ax$ لكل $x \in G$ تبديلاً

(ب) $H = \{\lambda_a : a \in G\} \leq S_G$ (ج) $G \cong H$

البرهان

(أ) لاحظ أنه لكل $x, y \in G$ لدينا : $\lambda_a(x) = \lambda_a(y) \Leftrightarrow ax = ay \Leftrightarrow x = y$

ولذا فإن λ_a تطبيق أحادي . وإذا كان $y \in G$ فإن $\lambda_a(a^{-1}y) = a(a^{-1}y) = y$. ومنه فإن λ_a شامل . إذن ، λ_a تبديل .

(ب) لاحظ أن $\lambda_e \in H$ ولذا فإن $H \neq \phi$. لاحظ ايضاً انه إذا كان $\lambda_a \in H$ فإنه لكل $x \in G$ وأن $\lambda_{a^{-1}}(x) = a^{-1}x$ و $\lambda_a(a^{-1}x) = x$. ولذا فإن $\lambda_a \circ \lambda_{a^{-1}} = \lambda_e$. ومنه فإن $(\lambda_a)^{-1} = \lambda_{a^{-1}}$.

الآن إذا كان $\lambda_a, \lambda_b \in H$ فإنه لكل $x \in G$ لدينا :

$$(\lambda_a \circ \lambda_b^{-1})(x) = (\lambda_a \circ \lambda_{b^{-1}})(x) = \lambda_a(b^{-1}x) = a(b^{-1}x) = (ab^{-1})(x) = \lambda_{ab^{-1}}(x)$$

إذن ، $\lambda_a \circ \lambda_b^{-1} \in H$ وبالتالي فإن $H \leq S_G$.

(ج) ليكن $\varphi : G \to H$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(a) = \lambda_a$ لكل $a \in G$.

لاحظ أنه إذا كان $a, b \in G$ فلكل $x \in G$ لدينا:

$$ax = bx \Leftrightarrow \lambda_a(x) = \lambda_b(x) \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

ولذا فإن φ تطبيق أحادي . من الواضح أيضاً أن φ شامل . أخيراً ، لكل $a, b \in G$ لدينا :

$\varphi(a) \circ \varphi(b) = \lambda_a \circ \lambda_b$ و $\varphi(ab) = \lambda_{ab}$. إذن ، لكل $x \in G$ نجد أن :

$$\lambda_{ab}(x) = (ab)x = a(bx) = \lambda_a(bx) = \lambda_a(\lambda_b(x)) = (\lambda_a \circ \lambda_b)(x)$$

ولذا فإن $\varphi(ab) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$. أي أن φ تشاكل . إذن ، $G \cong H$ ◆

(٣,١,١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

لتكن كل من G و H زمرة منتهية حيث $|G|=n$ ، $|H|=m$ و $\gcd(m,n)=1$. أثبت أن التشاكل الوحيد من G إلى H هو التشاكل التافه .

الحل

لنفرض أن $H \to G$ تشاكل . وليكن $a\in G$. لاحظ أن $o(a)\,|\,n$ وأن $o(\varphi(a))\,|\,m$. كما أنه باستخدام المبرهنة (٣,٢) نعلم أن $o(\varphi(a))\,|\,o(a)$. ولذا فإن $o(\varphi(a))\,|\,n$. وبما أن $\gcd(m,n)=1$ فإننا نخلص إلى أن $o(\varphi(a))=1$. أي أن $\varphi(a)=e$. وبالتالي فإن φ هو التشاكل التافه Δ

تمرين (٢)

عين جميع التشاكلات من $\mathbb{Z}_6$ إلى $\mathbb{Z}_4$.

الحل

ليكن $\varphi:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_4$ تشاكلاً . بما أن $\mathbb{Z}_6=\langle[1]\rangle$ فإننا نجد $\varphi([a])=a\varphi([1])$ لكل $[a]\in\mathbb{Z}_6$. ولذا فإن φ يتحدد تماماً إذا عرفنا قيمة $\varphi([1])$. الآن ، $o([1])=6$ ، $o(\varphi[1])\,|\,o([1])$. ولذا فإن $o(\varphi[1])\,|\,6$ كما أن $o(\varphi[1])\,|\,4$. ومنه فإن 2 أو $o(\varphi([1]))=1$. أي أن $[2]$ أو $\varphi([1])=[0]$. إذا كان $\varphi([1])=[0]$ فإن φ هو التشاكل التافه . أما إذا كان $\varphi([1])=[2]$ فإن $\varphi([a])=[2a]$ لكل $a\in\mathbb{Z}_6$. وبالتالي فإن يوجد تشاكلان فقط من $\mathbb{Z}_6$ إلى $\mathbb{Z}_4$ Δ

تمرين (٣)

(أ) عين جميع التشاكلات من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}$.

(ب) عين جميع التشاكلات الغامرة من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}$.

الحل

(أ) لكل $m\in\mathbb{Z}$ التطبيق $\varphi_m:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ المعرف بالقاعدة $\varphi_m(n)=mn$ لكل $n\in\mathbb{Z}$ تشاكل. ولذا فإن يوجد عدد غير منته من التشاكلات من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}$.

(ب) ليكن $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ تشاكل غامر . بما أن $\varphi(1)$ مولداً للزمرة $\mathbb{Z}$ فإن $\varphi(1)=1$ أو $\varphi(1)=-1$. إذا كان $\varphi(1)=1$ فإن $\varphi(n)=n\varphi(1)=n$ لكل $n\in\mathbb{Z}$.

أما إذا كان $\varphi(1) = -1$ فإن $\varphi(n) = n\varphi(1) = -n$ لكل $n \in \mathbb{Z}$. وبالتالي فإنه يوجد تشاكلان غامران فقط Δ

تمرين (٤)

(أ) لتكن G زمرة منتهية إبدالية وليكن $n \in \mathbb{Z}$ حيث $\gcd(|G|, n) = 1$ وليكن $\varphi : G \to G$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(a) = a^n$ لكل $a \in G$. أثبت أن φ تماثل .

(ب) إذا كانت G زمرة وكان التطبيق $\varphi : G \to G$ المعرف بالقاعدة $\varphi(a) = a^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$ تماثلاً فاثبت أن $a^{n-1} \in Z(G)$ لكل $a \in G$.

(ج) إذا كانت $n = 3$ في الفقرة (ب) فأثبت أن G إبدالية .

الحل

(أ) لنفرض أن $a, b \in G$ عندئذ: $\varphi(ab) = (ab)^n = a^n b^n = \varphi(a)\varphi(b)$. ولذا فإن φ تشاكل. ولإثبات أن φ أحادي نفرض أن $\varphi(a) = \varphi(b)$. عندئذ ، $a^n = b^n$. أي أن $(ab^{-1})^n = e$. ومنه فإن $o(ab^{-1}) \mid n$. وبما أن $o(ab^{-1}) \mid |G|$ وأن n و $|G|$ أوليان نسبياً فإن $o(ab^{-1}) = 1$. ومنه فإن $ab^{-1} = e$. أي أن $a = b$. وأخيراً φ شامل (لأن G منتهية و φ أحادي). إذن ، φ تماثل .

(ب) لنفرض أن $a, b \in G$. عندئذ :

$$a^{-n}b^n a^n = \varphi(a^{-1})\varphi(b)\varphi(a) = \varphi(a^{-1}ba) = (a^{-1}ba)^n = a^{-1}b^n a$$

ولذا فإن $a^{-(n-1)}b^n a^{n-1} = b^n$. أي أن $(a^{-(n-1)}ba^{n-1})^n = b^n$. ومنه فإن $\varphi(a^{-(n-1)}ba^{n-1}) = \varphi(b)$. وبما أن φ أحادي فإن $a^{-(n-1)}ba^{n-1} = b$. وبالتالي فإن $a^{n-1}b = ba^{n-1}$. أي أن $a^{n-1} \in Z(G)$.

(ج) باستخدام الفقرة (ب) نجد أن $a^2 \in Z(G)$ لكل $a \in G$. لنفرض الآن أن $a, b \in G$. عندئذ:

$$\begin{aligned}\varphi(ab) &= (ab)^3 = (ab)(ab)^2 = a(ab)^2 b = aababb = a^2bab^2 \\ &= ba^2b^2a = bb^2a^2a = b^3a^3 = \varphi(b)\varphi(a) = \varphi(ba)\end{aligned}$$

وبما أن φ أحادي فإننا نخلص إلى أن $ab = ba$ لكل $a, b \in G$ Δ

تمارين (٣,١)

في التمارين من (١) إلى (١٧) ، بين ما إذا كان التطبيق تشاكلاً من الزمرة G_1 إلى الزمرة G_2 . وللتشاكلات منها عين كلاً من $\mathrm{Ker}\varphi$ و $\varphi(G_1)$. وبين أيها تماثل .

(١) $\varphi:(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{R},+)$ معرفاً بالقاعدة $\varphi(a)=a$.

(٢) $\varphi:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_2$ معرفاً بالقاعدة $\varphi([a])=[a]$.

(٣) $\varphi:\mathbb{Z}_9\to\mathbb{Z}_2$ معرفاً بالقاعدة $\varphi([a])=[a]$.

(٤) $\varphi:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}^+,.)$ معرفاً بالقاعدة $\varphi(x)=3^x$.

(٥) $\varphi:(\mathbb{R}^+,.)\to(\mathbb{R},+)$ معرفاً بالقاعدة $\varphi(x)=\ln x$.

(٦) $\varphi:(\mathbb{R}^*,.)\to(\mathbb{R}^*,.)$ معرفاً بالقاعدة $\varphi(x)=x^2$.

(٧) $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$ معرفاً بالقاعدة $\varphi(x)=([x],[x])$.

(٨) $\varphi:\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\to S_3$ معرفاً بالقاعدة $\varphi([m],[n])=(1\ 2)^m\circ(1\ 2\ 3)^n$.

(٩) $\varphi:S_n\to S_{n+1}$ معرفاً بالقاعدة :

$$\varphi\left[\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n & n+1\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) & n+1\end{pmatrix}$$

(١٠) $\varphi:\mathbb{Z}\to G$ معرفاً بالقاعدة $\varphi(n)=A_n$ حيث :

$$G=\left\{A_n\in GL(2,\mathbb{Z}):A_n=\begin{bmatrix}1-n & -n\\ n & 1+n\end{bmatrix},n\in\mathbb{Z}\right\}$$

(١١) $\varphi:(M_n(\mathbb{R}),+)\to(\mathbb{R},+)$ معرفاً بالقاعدة $\varphi(A)=\mathrm{tr}(A)$.

(١٢) $\varphi:GL(n,\mathbb{R})\to(\mathbb{R},+)$ معرفاً بالقاعدة $\varphi(A)=\mathrm{tr}(A)$.

(١٣) $\varphi:\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\to\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5$ معرفاً بالقاعدة $\varphi([m],[n])=([m],[0])$.

(١٤) $\varphi:\mathbb{Z}_3\to S_3$ معرفاً بالقاعدة:

$\varphi([0])=(1)$ ، $\varphi([1])=(1\ 2\ 3)$ ، $\varphi([2])=(1\ 3\ 2)$.

(١٥) $\varphi:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to2\mathbb{Z}$ معرفاً بالقاعدة $\varphi(m,n)=2m$.

(١٦) $\varphi:S_4\to S_3$ معرفاً بالقاعدة : $\varphi(\sigma)=\begin{cases}(1\ 2) & , \sigma \text{ فردي}\\ (1) & , \sigma \text{ زوجي}\end{cases}$.

(١٧) $\varphi:2\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ معرفاً بالقاعدة $\varphi(2n)=(n,0)$.

(١٨) أثبت أن $S_3\not\cong\mathbb{Z}_6$ ولكن كل زمرة جزئية فعلية H من S_3 تماثل زمرة جزئية فعلية K

من $\mathbb{Z}_6$.

(١٩) جد جميع التشاكلات من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}_2$.

(٢٠) جد جميع التماثلات من V إلى $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(٢١) جد جميع التماثلات من $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ إلى $\mathbb{Z}_6$.

(٢٢) جد جميع التماثلات من $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ إلى $\mathbb{Z}_{10}$.

(٢٣) جد جميع التماثلات من $\mathbb{Z}_6$ إلى $\mathbb{Z}_6$.

(٢٤) جد جميع التماثلات من $\mathbb{Z}_8$ إلى $\mathbb{Z}_8$.

(٢٥) جد جميع التماثلات من $\mathbb{Z}_{12}$ إلى $\mathbb{Z}_{12}$.

(٢٦) جد جميع التماثلات من U_{18} إلى U_{18} .

(٢٧) جد جميع التماثلات من U_{25} إلى U_{25} .

(٢٨) استخدم علاقة التكافؤ المبينة في المبرهنة (٣,٣) لتجزئة مجموعة الزمر التالية إلى فصول تكافؤ:

$(\mathbb{R}^*,.)$ ، $(\mathbb{R}^+,.)$ ، $(\mathbb{Q},+)$ ، $(\mathbb{Q}^*,.)$ ، $(\mathbb{C}^*,.)$ ، $(\mathbb{R},+)$ ، $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ، $\mathbb{Z}_2 \times S_3$ ،

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ ، $\mathbb{Z}_6$ ، $\mathbb{Z}_2$ ، $8\mathbb{Z}$ ، D_6 ، $\mathbb{Z}_{12}$ ، $3\mathbb{Z}$ ، S_2 ، S_6 ، $\mathbb{Z}$ ،

A_3 ، $12\mathbb{Z}$ ، $\langle \pi \rangle$ ، S_4 ، $SL(2,\mathbb{Z}_3)$.

(٢٩) هل $T \cong A_4$ ؟ $T \cong D_6$ ؟ $D_6 \cong A_4$ ؟ حيث T كما في التمرين (٢٤) من تمارين(٢,٢).

(٣٠) جد جميع التشاكلات من $\mathbb{Z}$ إلى $(\mathbb{Q},+)$.

(٣١) إذا كانت G زمرة وكان $a \in G$ والتطبيق $\varphi_a : G \to G$ المعرف بالقاعدة $\varphi_a(x) = ax$ لكل $x \in G$ تشاكل فما هي قيم a الممكنة ؟

(٣٢) إذا كانت $H \le GL(2,\mathbb{R})$ مولدّة بالعنصرين $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

فأثبت أن $H \cong D_4$.

(٣٣) إذا كانت $H \le S_4$ مولدّة بالعنصرين $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4)$ و $\beta = (2\ 4)$

فأثبت أن $H \cong D_4$.

(٣٤) إذا كانت $H \le GL(2,\mathbb{C})$ مولدّة بالعنصرين $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

فأثبت أن $H \cong Q_8$.

(٣٥) لتكن $H \le SL(2,\mathbb{Z}_3)$ المولدة بالعنصرين $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$
فاثبت أن $H \cong Q_8$.

(٣٦) ليكن $\varphi : G \to G$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(x) = x^{-1}$ لكل $x \in G$. ماهو القيد الذي يتوجب علينا وضعه على الزمرة G لكي يكون φ تشاكل ؟

(٣٧) إذا كان $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to G$ تشاكلاً يحقق $\varphi(1,0) = h$ و $\varphi(0,1) = k$ فعين قاعدة تعريف φ .

(٣٨) إذا كانت G زمرة إبدالية وكان $\varphi : G \to G$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(x) = x^n$ لكل $x \in G$ فأثبت أن φ تشاكل وجد كل من $\operatorname{Ker}\varphi$ و $\varphi(G)$.

(٣٩) ليكن $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\sin a \\ -1 & 0 & \cos a \\ -\sin a & \cos a & 0 \end{bmatrix}$ حيث $a \in \mathbb{R}$.

(أ) أثبت أن $A^3 = 0$

(ب) إذا كانت $x \in \mathbb{R}$ وكان $A_x = I + xA + \frac{1}{2}x^2A^2$ فأثبت أن $G = \{A_x : x \in \mathbb{R}\} \le GL(3,\mathbb{R})$ وأن G إبدالية .

(ج) أثبت أن $G \cong (\mathbb{R},+)$.

(٤٠) لتكن K,H,G هي الزمر المبينة في التمرين (٣) من تمارين (٢,٢) . أثبت أن $H \cap K \cong (\mathbb{R}^+,.)$.

(٤١) لتكن $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ والعملية الثنائية معرفة على G كالتالي :

$$(a,b)(c,d) = (a + (-1)^b c, b + d)$$

(أ) أثبت أن G زمرة غير إبدالية .

(ب) أثبت أن التطبيق $\varphi : G \to G$ المعرف بالقاعدة $\varphi(a,b) = (0,b)$ تشاكل وجد كل من $\operatorname{Ker}\varphi$ و $\varphi(G)$.

(٤٢) لتكن $G = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det(A + I) \neq 0\}$ ولتكن $*$ عملية معرفة على G كالتالي : $A * B = A + B + AB$. أثبت أن :

(أ) $(G,*)$ زمرة   (ب) $G \cong GL(2,\mathbb{R})$.

(٤٣) لتكن G هي الزمرة المبينة في المثال (٢,١١) . أثبت أن $G \cong (\mathbb{R},+)$.

(٤٤) أثبت أن $(\mathbb{R}^+,.)\times(\mathbb{Z}_2,+_2)\cong(\mathbb{R}^*,.)$.

(٤٥) إذا كان $\varphi:G_1\to G_2$ تشاكلاً فأثبت أن $\varphi(Z(G_1))\subseteq Z(\varphi(G_1))$.

(٤٦) ليكن $\varphi:G_1\to G_2$ تشاكلاً حيث $\mathrm{Ker}\varphi=K$ وليكن $a\in G$. أثبت أن $\{x\in G_1:\varphi(x)=\varphi(a)\}=\{ka:k\in K\}$.

(٤٧) لتكن G زمرة و H مجموعة . وليكن $\varphi:G\to H$ تطبيقاً أحادياً وشاملاً . أثبت أنه يوجد عملية ثنائية وحيدة $*$ على H بحيث تكون $(H,*)$ زمرة و φ تماثل .

(٤٨) بين اياً من العبارات التالية صائبة وايها خاطئة :

(ا) يوجد تشاكل بين أي زمرتين .

(ب) يوجد تشاكل غير تافه بين أي زمرتين .

(ت) يوجد تشاكل من زمرة غير منتهية إلى زمرة منتهية.

(ث) من الممكن أن أي زمرتين من الرتبة 5 يجب أن تكونا متماثلتين .

(ج) إذا كانت كل من G و H زمرة منتهية حيث $|H|=|G|$ فإن $G\cong H$.

(ح) إذا كانت كل من G و H زمرة منتهية حيث $G\cong H$ فإن $|G|=|H|$.

(خ) من الممكن أن تماثل زمرة إبدالية زمرة غير إبدالية .

(د) $(\mathbb{R},+)$ تماثل زمرة تبديلات .

(ذ) الزمرة $(G,*)$ حيث $G=\mathbb{R}-\{-1\}$ وحيث $a*b=a+b+ab$ تماثل الزمرة $(\mathbb{R}^*,.)$.

(ر) التطبيق $\varphi:G\to G$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x)=x^{-1}$ تشاكل .

(ز) $S_3\not\cong\mathbb{Z}_6$.

(س) إذا كان $\varphi:\mathbb{Z}_8\to\mathbb{Z}_4$ تشاكل غامر فإن $\mathrm{Ker}\varphi=\{[0],[4]\}$.

(ش) الصورة التشاكلية لأي زمرة دورية يجب أن تكون دورية .

(ص) إذا كانت كل من G و H زمرة فإن $G\times H\cong H\times G$.

(ض) إذا كان كل من φ و ψ تشاكل غامر من G إلى H وكان $\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\psi$ فإن $\varphi=\psi$.

(ط) يوجد تشاكل غامر من $(\mathbb{Q},+)$ إلى $(\mathbb{Z},+)$.

(ظ) التطبيق $\varphi:(\mathbb{C},+)\to(\mathbb{R},+)$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x+iy)=x+y$ تشاكل غامر.

(ع) التطبيق $\varphi:(\mathbb{C}^*,.)\to(\mathbb{R}^*,.)$ المعرف بالقاعدة $\varphi(a+bi)=a^2+b^2$ تشاكل .

(غ) $SL(2,\mathbb{Z}_2)\cong S_3$.

(ف) $SL(2,\mathbb{Z}_3)\cong S_4$.

(٣,٢) المجموعات المشاركة ومبرهنة لاجرانج
Cosets and Lagrange's Theorem

لقد بينا عند دراستنا للزمر الدورية المنتهية ، أنه إذا كانت G زمرة دورية منتهية وكانـــت $H \leq G$ فإن رتبة H تقسم رتبة G. هذه النتيجة ماهي إلا حالة خاصة من مبرهنة هامة جداً ، تسمى مبرهنة لاجرانج نسبة إلى مكتشفها . سنقوم في هذا البند ببرهان هذه المبرهنة ونقدم بعض تطبيقاتها ، وسنحقق ذلك مستعينين بمفهوم المجموعات المشاركة .

تعريف (٣,٤)

لتكن G زمرة ولتكن $H \leq G$ وليكن $a \in G$.

(١) تعرف المجموعة المشاركة اليسرى (**left coset**) للزمرة الجزئية H التي تحتوي a بأنها المجموعة :

$$aH = \{ ah : h \in H \}$$

(٢) تعرف المجموعة المشاركة اليمنى (**right coset**) للزمرة H التي تحتوي a بأنها المجموعة :

$$Ha = \{ ha : h \in H \}$$

في كلتا الحالتين ، يسمى العنصر a ممثلاً للمجموعة المشاركة (**representative of the coset**).

ملحوظات

(١) لاحظ أن $eH = H = He$ لكل $H \leq G$.

(٢) لاحظ أنه لكل $a \in G$ يكون : $a = ae \in aH$ و $a = ea \in Ha$

(٣) إذا كانت G زمرة إبدالية فإنه من الواضح أن $aH = Ha$ لكل $a \in G$.

مثال (٣,٢٨)

إذا كانت $G = \mathbb{Z}$ وكانت $H = 3\mathbb{Z}$ فإنه من الواضح أن المجموعات المشاركة اليـــسرى (الـــيمنى) المختلفة للزمرة الجزئية H هي : $2+H = 2+3\mathbb{Z}$ ، $1+H = 1+3\mathbb{Z}$ ، $H = 3\mathbb{Z}$.

وبصورة عامة المجموعات المشاركة اليسرى (اليمنى) للزمرة الجزئية $n\mathbb{Z}$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$ هي :

$$n\mathbb{Z} \text{ , } 1+n\mathbb{Z} \text{ , } 2+n\mathbb{Z} \text{ , } \dots \text{ , } (n-1)+n\mathbb{Z} \quad \square$$

مثال (٣,٢٩)

إذا كانت $G = S_3$ وكانت $H = \langle (1\ 2) \rangle \le G$ فإن المجموعات المشاركة اليسرى للزمرة الجزئية H هي :

$$H = (1\ 2) \circ H = \{e, (1\ 2)\}$$
$$(1\ 3) \circ H = (1\ 2\ 3) \circ H = \{(1\ 3), (1\ 2\ 3)\}$$
$$(2\ 3) \circ H = (1\ 3\ 2) \circ H = \{(2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

أما المجموعات المشاركة اليمنى للزمرة الجزئية H فهي :

$$H = H \circ (1\ 2) = \{e, (1\ 2)\}$$
$$H \circ (1\ 3) = H \circ (1\ 3\ 2) = \{(1\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$
$$H \circ (2\ 3) = H \circ (1\ 2\ 3) = \{(2\ 3), (1\ 2\ 3)\}$$

لاحظ أن المجموعات المشاركة اليسرى مختلفة في هذه الحالة عن المجموعات المشاركة اليمنى □

مثال (٣,٣٠)

إذا كانت $K = \langle (1\ 2\ 3) \rangle \le S_3$ فإن المجموعات المشاركة اليسرى للزمرة الجزئية K هي:

$$K = (1\ 2\ 3) \circ K = (1\ 3\ 2) \circ K = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$
$$(2\ 3) \circ K = (1\ 3) \circ K = (1\ 2) \circ K = \{(2\ 3), (1\ 3), (1\ 2)\}$$

أما المجموعات المشاركة اليمنى للزمرة الجزئية K فهي :

$$K = K \circ (1\ 2\ 3) = K \circ (1\ 3\ 2) = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$
$$K \circ (2\ 3) = K \circ (1\ 3) = K \circ (1\ 2) = \{(2\ 3), (1\ 3), (1\ 2)\}$$

لاحظ أن $\sigma \circ K = K \circ \sigma$ لكل $\sigma \in S_3$ □

تبين لنا المبرهنة التالية أن مجموعة جميع المجموعات المشاركة (اليسرى أو اليمنى) لزمرة جزئية $H \le G$ تشكل تجزيئاً للزمرة G .

مبرهنة (٣,٧)

إذا كانت $H \le G$ فإن :

(١) $aH = bH$ إذا وفقط إذا كان $b^{-1}a \in H$ (أو $a^{-1}b \in H$) لكل $a, b \in G$.

(٢) $aH = bH$ أو $aH \cap bH = \phi$ لكل $a, b \in G$.

(٣) $Ha = Hb$ إذا وفقط إذا كان $ab^{-1} \in H$ (أو $ba^{-1} \in H$) لكل $a, b \in G$.

(٤) $Ha = Hb$ أو $Ha \cap Hb = \phi$ لكل $a, b \in G$.

البرهان

(١) لنفرض أولاً أن $aH = bH$. بما أن $a \in aH = bH$ فإن $a = bh$ حيث $h \in H$. ولذا فإن $b^{-1}a = h \in H$.

ولبرهان العكس ، نفرض أن $b^{-1}a \in H$. عندئذ ، $b^{-1}a = h$ حيث $h \in H$. أي أن $a = bh$. الآن ، نفرض أن $ah_1 \in aH$. إذن ، $ah_1 = bhh_1 \in bH$. ولذا فإن $aH \subseteq bH$. ومن ناحية أخرى ، إذا كان $bh_1 \in bH$ فإن $bh_1 = ah^{-1}h_1 \in aH$. إذن ، $bH \subseteq aH$. وبالتالي فـإن $aH = bH$.

(٢) لنفرض أن $aH \cap bH \neq \phi$. وليكن $x \in aH \cap bH$. عندئذ ، $x = ah_1 = bh_2$ حيـث $h_1, h_2 \in H$. ولـذا فـإن $b^{-1}a = h_2 h_1^{-1} \in H$. وباسـتخدام الفقـرة (١) نخلـص إلى أن $aH = bH$.

(٣) البرهان مشابه لبرهان الفقرة (١) .

(٤) البرهان مشابه لبرهان الفقرة (٢) ◆

ملحوظات

(١) بما أن $a \in aH$ $(a \in Ha)$ لكل $a \in G$ فـإن $G = \bigcup_{a\in G} aH$ $(G = \bigcup_{a\in G} Ha)$. وباسـتخدام المبرهنة (٣,٧) نخلص إلى أن كل من $\{ aH : a \in G \}$ و $\{ Ha : a \in G \}$ تجزيئاً للزمرة G .

(٢) لتكن $H \leq G$. يمكن إثبات أن المجموعات المشاركة اليمنى (و اليسرى) للزمرة الجزئيـة H في G تشكل تجزئياً للزمرة G وذلك بتعريف علاقة تكافؤ على G بحيث تكون فصول التكافؤ هـي المجموعات المشاركة (أنظر التمرين المحلول (٥)).

تبين لنا المبرهنة التالية العلاقة بين عدد عناصر المجموعات المشاركة اليسرى واليمنى .

مبرهنة (٣,٨)

إذا كان $H \leq G$ وكان $a \in G$ فإن $|H| = |aH| = |Ha|$.

البرهان

ليكن $f : H \to aH$ التطبيق المعــرف بالقاعـــدة $f(h) = ah$ لكــل $h \in H$. ولنفــرض أن $h_1, h_2 \in H$ ، الآن : $h_1 = h_2 \Leftrightarrow ah_1 = ah_2 \Leftrightarrow f(h_1) = f(h_2)$. إذن ، f تطبيــق معرفــاً تعريفاً حسناً وأحادي .

من الواضح أن f شامل . إذن ، f تقابل . وبالتالي فإن $|H| = |aH|$. وبالمثل $|H| = |Ha|$ ◆

نبين الآن العلاقة بين عدد المجموعات المشاركة الــيمنى لزمـــرة جزئيـــة $H \le G$ وعـــدد المجموعات المشاركة اليسرى لها.

مبرهنة (٣,٩)

إذا كانت $H \le G$ وكانت $L = \{aH : a \in G\}$ وكانت $R = \{Ha : a \in G\}$ فإن $|L| = |R|$.

البرهان

ليكن $f : L \to R$ التطبيق المعرف بالقاعدة $f(aH) = Ha^{-1}$ لكل $aH \in L$. الآن :

$$aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H \Leftrightarrow b^{-1}(a^{-1})^{-1} \in H \Leftrightarrow Ha^{-1} = Hb^{-1} \Leftrightarrow f(aH) = f(bH)$$

إذن، f حسن التعريف وأحادي . ومن الواضح أن f شامل ، لأنـــه لـــو كـــان $Ha \in R$ فـــإن $f(a^{-1}H) = Ha$. إذن ، $|L| = |R|$ ◆

تعريف (٣,٥)

إذا كانت $H \le G$ فإننا نسمي عدد المجموعـــات المـــشاركة اليـــسرى (أو الـــيمنى) دليـــل H في G (**index of H in G**) ونرمز لهذا العدد بالرمز $[G : H]$.

مثال (٣ , ٣١)

من المثال (٣ , ٢٨) نجد أن $[\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}] = n$. ومن المثال (٣ ,٢٩) نجد أن $[S_3 : \langle(1\ 2)\rangle] = 3$.

ومن المثال (٣ ,٣٠) نجد أن $[S_3 : \langle(1\ 2\ 3)\rangle] = 2$ □

مثال (٣ , ٣٢)

إذا كانت $H = \{[0],[3]\} \le \mathbb{Z}_6$ فإنه من السهل أن نرى أن :

$L = \{ H, \{ [1],[4] \}, \{ [2],[5] \} \}$. إذن ، $[\mathbb{Z}_6 : H] = 3$ □

مثال (٣٣ , ٣)

إذا كانت $A_n \leq S_n$ فإن $L=\{A_n, \sigma A_n\}$ حيث $\sigma \in S_n$ تبديلاً فردياً . إذن، $[S_n : A_n]=2$ □

نحن الآن جاهزون لتقديم مبرهنة لاجرانج بعد أن قدمنا المفاهيم الضرورية لبرهانها .

مبرهنة (٣,١٠) [مبرهنة لاجرانج]

إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة منتهية G فإن $|G|=[G:H]|H|$. ومن ثم فإن $|H|$ يقسم $|G|$.

البرهان

لنفرض أن $\{a_1H, a_2H, ..., a_kH\}$ هي جميع المجموعات المشاركة اليسرى المختلفة للزمرة الجزئية H . عندئذ: $G=a_1H \cup a_2H \cup ... \cup a_kH$. وبما أن $a_iH \cap a_jH = \phi$ لكل $i \neq j$ فإن: $|G|=|a_1H|+|a_2H|+...+|a_kH|$. ولكن $|H|=|a_iH|$ لكل $1 \leq i \leq k$. ولذا فإن $|G|=k|H|=[G:H]|H|$ ◆

نتيجة (١١ , ٣)

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها n وكان $a \in G$ فإن $a^n=e$.

البرهان

لنفرض أن $m=o(a)$. بما أن $m=|\langle a \rangle|$ فإن m يقسم n . ومنه فإن $n=km$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

ونستنتج أن $a^n=(a^m)^k=e^k=e$ ◆

نتيجة (١٢ , ٣)

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها عدداً أولياً p فإن G دورية .

البرهان

بما أن $|G| \geq 2$ فإنه يوجد $e \neq a \in G$. عندئذ ، $\{e\} \neq \langle a \rangle \leq G$. ولذا فإن $|\langle a \rangle|$ يقسم p .

ومنه فإن $|G|=p=|\langle a \rangle|$. وبالتالي فإن $\langle a \rangle = G$. أي أن G دورية ◆

نتيجة (٣ , ١٣) [مبرهنة فيرما الصغرى Fermat little theorem]

لكل عدد صحيح a ولكل عدد أولي p لدينا $a^p \equiv a(\bmod p)$.

البرهان

إذا كان $p|a$ فإن $a \equiv o(\bmod p)$ وبالتـالي فـإن $a^p \equiv 0 \equiv a(\bmod p)$. لـذا نفـرض أن p لايقسم a .

بإستخدام خوارزمية القسمة ، نستطيع إيجاد $m,r \in \mathbb{Z}$ يحققان : $a = pm + r$ ، $0 < r < p$.

ولذا فإن ، $a \equiv r(\bmod p)$. ولكن $r \in U_p = \{[1],[2],...,[p-1]\}$. عندئـذ ، بإسـتخدام النتيجة (٣,١١) نجد أن $r^{p-1} = [1]$. إذن ، $r^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$. أي أن $r^p \equiv r(\bmod p)$. وبالتالي فإن : $a^p \equiv r^p \equiv r \equiv a(\bmod p)$ ◆

لقد بينا في الفصل الثاني أنه إذا كانت G زمرة دورية رتبتها n فإنه لكل قاسم d للعدد n ، توجد زمرة جزئية H من G رتبتها d. أي أن عكس مبرهنة لاجرانج صحيحاً للزمر الدورية المنتهية. كما أننا سنبرهن لاحقاً أن عكس مبرهنة لاجرانج صحيحاً للزمرالإبدالية المنتهية .

سنبين الآن أن الزمرة A_4 لا تحتوي على زمرة جزئية رتبتها 6 . وبهذا يكون لدينا مثـالاً علـى أن عكس مبرهنة لاجرانج ليس صحيحاً للزمر غير الابدالية .

مبرهنة (٣ , ١٤)

لاتوجد زمرة جزئية من A_4 رتبتها 6 .

البرهان

لاحظ أولاً $|A_4| = 12$ وأنها تحتوي على ثلاثة عناصر من الرتبة 2 ، ثمانية عناصر من الرتبة 3 إضافة إلى العنصر المحايد . لنفرض لغرض التناقص أن $H \leq A_4$ حيث $|H| = 6$. ولنفـرض أن $a \in A_4$ حيث $o(a) = 3$. بما أن $[A_4 : H] = 2$ فإن المجموعات المشاركة H ، aH و a^2H ليـست جميعها مختلفة . وبناء على ذلك فإن تساوي أي مجموعتين منها يقتضي أن يكون $a \in H$. وبالتـالي فإن H تحتوي على جميع العناصر من الرتبة 3 . أي أن $|H| \geq 8$ وهذا مستحيل ◆

لتكن كل من H و K زمرة جزئية من زمـــرة منتهيـــة G . لقـــد لاحظنـــا (أنظـــر المثـــال (٢١ و ٢)) أن HK ليست بالضرورة زمرة جزئية من G . ولذا فإنه ليس بالـــضرورة أن يقـــسم $|HK|$ رتبة الزمرة G . نقدم الآن طريقة لحساب $|HK|$ بالاستعانة بمبرهنة لاجرانج وسيكون لهـــذه النتيجة استخدامات عديدة .

مبرهنة(١٥ , ٣)

إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية منتهية من زمرة G فإن $|HK| = \dfrac{|H||K|}{|H \cap K|}$.

البرهان

لنفرض أن $N = H \cap K$. بما أن $N \leq H$ فإننا نجد باستخدام مبرهنة لاجـــرانج أن $|N|$ يقـــسم $|H|$. لنفرض أن $[H:N] = \dfrac{|H|}{|N|} = n$. ولتكن $\{a_1N, a_2N, \ldots, a_nN\}$ هـــي مجموعـــة جميـــع المجموعات المشاركة اليسرى المختلفة لـــ N في H . عندئذ : $H = \bigcup_{i=1}^{n} a_iN$. وبما أن $N \subseteq K$ فإننا نجد أن : $\bigcup_{i=1}^{n} a_iK = \left(\bigcup_{i=1}^{n} a_iN\right)K = HK$.

سنبرهن الآن أن $a_iK \cap a_jK = \phi$ لكل $i \neq j$. لنفرض لغرض التناقض أن $a_iK \cap a_jK \neq \phi$. عندئذ ، $a_iK = a_jK$. ولذا فإن $a_i^{-1}a_j \in K$. وبما أن $a_i^{-1}a_j \in H$ فإننا نجد أن $a_i^{-1}a_j \in N$. ومنه فإن $a_iN = a_jN$ وهذا تناقض . إذن ، $\{a_1K, a_2K, \ldots, a_nK\}$ مجموعات مشاركة جميعهـــا مختلفة . ومن ثم فإن : $|HK| = |a_1K| + \ldots + |a_nK|$. ولكن $|a_iK| = |K|$ لكـــل $i = 1,2,\ldots,n$.

وبالتالي فإن $\dfrac{|H||K|}{|H \cap K|} = |HK| = n|K|$ ◆

تقدم لنا المبرهنة التالية علاقـــة بـــين الأدلـــة $[G:K]$ ، $[H:K]$ و $[G:H]$ حيـــث $K \leq H \leq G$.

مبرهنة (١٦ , ٣)

إذا كان $K \leq H \leq G$ وكان كل من $[G:H]$ و $[H:K]$ منتـــهياً فـــإن $[G:K]$ منتـــه وأن $[G:K] = [G:H]\,[H:K]$.

البرهان

لنفرض أن $\{a_1H,\dots,a_rH\}$ هي مجموعة جميع المجموعات المشاركة اليسرى المختلفة للزمرة H في G وأن $\{b_1K,\dots,b_sK\}$ هي مجموعة جميع المجموعات المشاركة اليسرى للزمرة K في H . سنبرهن أن $\{a_ib_jK : 1\le i\le r, 1\le j\le s\}$ هي مجموعة المجموعات المشاركة اليسرى المختلفة للزمرة K في G . ولهذا الغرض نفرض أولاً أن $g\in G$ وليكن $g\in a_iH$. عندئذ $g=a_ih$ حيث $h\in H$. ولكن $h\in b_jK$. ولذا فإن $h=b_jk$ حيث $k\in K$. إذن ، $g=a_ib_jk\in a_ib_jK$. وبهذا تكون المجموعة $\{a_ib_jK : 1\le i\le r, 1\le j\le s\}$ هي بالفعل جميع المجموعات المشاركة اليسرى للزمرة K في G . إذن ، يبقى علينا أن نبرهن أنها مختلفة . لنفرض أن $a_ib_jK=a_pb_qK$. ولذا فإن $a_ib_jk_1=a_pb_qk_2$ حيث $k_1,k_2\in K$. الآن كل من b_qk_2 و b_jk_1 ينتمي إلى H . إذن ، a_i و a_p ينتميان إلى نفس المجموعة المشاركة للزمرة H . ولذا فإن $a_i=a_p$. وباستخدام قانون الاختصار نحصل على $b_jk_1=b_qk_2$. ولذا فإن b_j و b_q ينتميان إلى نفس المجموعة المشاركة للزمرة K . ومنه فإن $b_j=b_q$. وبالتالي فإن :

$$[G:K]=rs=[G:H]\,[H:K]$$ ◆

(٣,٢,١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

لتكن $H\le G$ وليكن $a\in G$. أثبت أن العبارات التالية متكافئة :

(أ) $a\in H$ (ب) $aH=H$ (ج) $aH\le G$

الحل

(أ) $\Leftarrow$ (ب) : لنفرض أن $a\in H$. ليكن $x\in aH$. عندئذ ، $x=ah$ حيث $h\in H$. وبما أن $H\le G$ وأن $a\in H$ فإن $x\in H$. أي أن $aH\subseteq H$. لنفرض الآن أن $x\in H$. بما أن $a\in H$ فإن $a^{-1}x\in H$. ومنه فإن $x=ex=(aa^{-1})x=a(a^{-1}x)\in aH$. ولذا فإن $H\subseteq aH$. وبالتالي فإن $aH=H$.

(ب) $\Leftarrow$ (ج) : بما أن $aH=H$ وأن $H\le G$ فإن $aH\le G$.

(ج) ⇐(أ) : لنفرض أن $aH \leq G$. عندئذ ، $e \in aH$ ومنه فإن $aH \cap H \neq \phi$. ولـــذا فـــإن $aH = H$. وبالتالي فإن $a = ae \in aH = H$ Δ

تمرين (٢)

لتكن G زمرة منتهية من الرتبة pq حيث p و q أوليان مختلفان. ولتكن H و K زمرتين جـــزيئيتين وحيدتين حيث $|H| = p$ و $|K| = q$. أثبت أن G دورية .

الحل

لاحظ أولاً أن $|H \cup K| = p + q - 1 < pq$. ولذا فإنه يوجد $a \in G$ حيث $a \notin H \cup K$.
باستخدام مبرهنة لاجرانج نجد أن $o(a) = p$ أو $o(a) = q$ أو $o(a) = pq$.
إذا كان $o(a) = p$ فإن $\langle a \rangle = H$ وهذا يناقض وحدانية H. ولـــذا فـــإن $o(a) \neq p$. وبالمثـــل $o(a) \neq q$. وبالتالي فإن $o(a) = pq$. أي أن $G = \langle a \rangle$ Δ

تمرين (٣)

لتكن G زمرة من الرتبة p^n حيث p أولي . أثبت أن G تحتوي على عنصر رتبته p .

الحل

لنفرض أن $e \neq a \in G$. عندئذ ، $H = \langle a \rangle$ زمرة جزئية دورية من G وأن $|H|$ يقسم p^n . ولذا فإن $|H| = p^m$ حيث $0 < m \leq n$. بما أن H دورية وأن p يقسم $|H|$ فإنه توجد زمرة جزئيـــة $T \leq H$ حيث $|T| = p$. ولكن T دورية . إذن، يوجد $b \in T$ حيث $T = \langle b \rangle$. وبالتالي فـــإن $o(b) = p$ Δ

تمرين (٤)

(أ) إذا كان G زمرة إبدالية منتهية تحتوي على عنصرين مختلفين رتبـــة كـــل منـــهما 2 فأثبـــت أن $|G| = 4k$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$.

(ب) بين أن النتيجة غير صحيحة إذا كان G غير إبدالية .

الحل

(أ) لنفرض أن $a \neq b \in G$ حيث $o(a) = o(b) = 2$. ولنفرض أن $H = \{e, a\}$ وأن $K = \{e, b\}$ . . بما أن G إبدالية فإن $HK = \{ e, a, b, ab \}$. ولذا فإن $|HK| = 4$ يقسم $|G|$.

أي أن $|G| = 4k$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$.

(ب) رتبة كل من $(2 \ \ 1)$ و $(3 \ \ 1)$ هي 2 في الزمرة S_3 ولكن 4 لايقسم $|S_3|$ Δ

تمرين (٥)

لتكن $H \leq G$ ولتكن $\underset{H}{\sim}$ علاقة على G معرفة بالقاعدة $a \underset{H}{\sim} b$ إذا وفقط إذا كان $ab^{-1} \in H$.

(أ) أثبت أن $a \underset{H}{\sim} b$ علاقة تكافؤ على G .

(ب) أثبت أن فصول تكافؤ $\underset{H}{\sim}$ هي المجموعة المشاركة اليمنى للزمرة الجزئية H في الزمرة G .

الحل

(أ) بما أن $a^{-1}a = e \in H$ فإن $a \underset{H}{\sim} a$ لكل $a \in G$. ولذا فإن $\underset{H}{\sim}$ انعكاسية. لنفرض أن $a \underset{H}{\sim} b$.
عندئذ: $a \underset{H}{\sim} b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H \Leftrightarrow (ab^{-1})^{-1} = ba^{-1} \in H \Leftrightarrow b \underset{H}{\sim} a$. ولذا فإن $\underset{H}{\sim}$ تناظرية.
وأخيراً لاثبات أن $\underset{H}{\sim}$ متعدية ، نفرض أن $a \underset{H}{\sim} b$ و $b \underset{H}{\sim} c$. عندئذ :

$$a \underset{H}{\sim} b \text{ و } b \underset{H}{\sim} c \Rightarrow ab^{-1} \in H \text{ و } bc^{-1} \in H$$
$$\Rightarrow (ab^{-1})(bc^{-1}) = ac^{-1} \in H \Rightarrow a \underset{H}{\sim} c$$

وعليه فإن $\underset{H}{\sim}$ متعدية ومن ثم فهي علاقة تكافؤ.

(ب) لنفرض أن $a \in G$. سنبرهن الآن أن $[a] = Ha$. لنفرض أن $x \in [a]$. عندئذ ، $ax^{-1} \in H$. ولذا فإن $ax^{-1} = h$ حيث $h \in H$. أي أن $x = h^{-1}a$. وعليه فإن $x \in Ha$. ومن ناحية أخرى إذا كان $y \in Ha$ فإن $y = ha$ حيث $h \in H$. ومنه فإن $ay^{-1} = a(ha)^{-1} = aa^{-1}h^{-1} = h^{-1} \in H$. وعليه فإن $a \underset{H}{\sim} y$. أي أن $y \in [a]$. وبالتالي فإن $[a] = Ha$ Δ

تمارين (٣,٢)

(١) جد جميع المجموعات المشاركة للزمرة الجزئية $\langle [4] \rangle$ في $\mathbb{Z}_{12}$.

(٢) جد جميع المجموعات المشاركة للزمرة الجزئية $\langle [18] \rangle$ في $\mathbb{Z}_{36}$.

(٣) جد جميع المجموعات المشاركة للزمرة الجزئية $H = \{ [1], [11] \}$ في U_{30} .

(٤) جد جميع المجموعات المشاركة اليمنى واليسرى للزمرة الجزئية $H = \{ e, a^2b \}$ في D_4 . ماذا تلاحظ ؟

(٥) جد جميع المجموعات المشاركة اليمنى واليسرى للزمرة الجزئية $H = \langle a \rangle$ في D_4 . ماذا تلاحظ؟

(٦) جد جميع المجموعات المشاركة اليسرى واليمنى للزمرة الجزئية $H = \langle b \rangle$ في Q_8 . ماذا تلاحظ؟

(٧) جد جميع المجموعات المشاركة اليسرى واليمنى للزمرة الجزئية $H = \langle ab \rangle$ في T . ماذا تلاحظ؟

(٨) جد جميع المجموعات المشاركة اليسرى واليمنى للزمرة الجزئية $H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$ في A_4 . ماذا تلاحظ ؟

(٩) جد جميع المجموعات المشاركة اليسرى واليمنى للزمرة الجزئية :

$H = \{ e, (1\ 4)\circ(2\ 3), (1\ 2)\circ(3\ 4), (1\ 3)\circ(2\ 4) \}$ في A_4 . ماذا تلاحظ ؟

(١٠) أثبت أن كل من الزمر التالية تحقق عكس مبرهنة لاجرانج : D_4 ، Q_8 ، T و S_4 .

(١١) إذا كانت G زمرة منتهية وتحقق عكس مبرهنة لاجرانج فهل من الضروري أن تحقق كل زمرة جزئية من G عكس مبرهنة لاجرانج ؟

(١٢) إذا كانت $H \leq G$ فأثبت أن العبارات التالية متكافئة :

(أ) $xH = Hx$ لكل $x \in G$.

(ب) لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$ يوجد $h_1 \in H$ يحقق $xh = h_1x$.

(ج) $x^{-1}hx \in H$ لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$.

(د) $x^{-1}Hx \subseteq H$ لكل $x \in G$.

(هـ) $x^{-1}Hx = H$ لكل $x \in G$.

(و) $h^{-1}x^{-1}hx \in H$ لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$.

(١٣) لتكن $H \leq G$ ولتكن $\underset{H}{\sim}$ علاقة معرفة على G كالتالي : $a \underset{H}{\sim} b$ إذا وفقط إذا كان $b^{-1}a \in H$ لكل $a, b \in G$. أثبت أن $\underset{H}{\sim}$ علاقة تكافؤ على G وأن $[a] = aH$.

(١٤) إذا كانت $H \leq G$ حيث $[G : H] = 2$ فأثبت أن $aH = Ha$ لكل $a \in G$.

(١٥) إذا كانت G زمرة منتهية من الرتبة pq حيث p و q عددان أوليان فأثبت أن كل زمرة جزئية فعلية غير تافهة من G دورية .

(١٦) إذا كانت G زمرة إبدالية رتبتها $2n$ حيث n عدد فردي فأثبت أن G تحتوي على عنصر وحيد من الرتبة 2 .

(١٧) إذا كانت G زمرة غير تافهة ولا تحتوي على زمر جزئية فعلية غير تافهة فأثبت أن G منتهية ورتبتها عدد أولي .

(١٨) إذا كانت G زمرة ليست دورية رتبتها p^2 حيث p عدد أولي وكان $e \neq a \in G$ فأثبت أن $o(a) = p$.

(١٩) أثبت أن S_n تحتوي على زمرة جزئية فعلية H تحقق $[S_n : H] \leq n$ لكل $n > 1$.

(٢٠) إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية من الزمر المنتهية G حيث $|K|, |H| > \sqrt{|G|}$ فأثبت أن $|H \cap K| > 1$.

(٢١) إذا كانت $|G| = pq$ حيث p و q عددان أوليان و $p > q$ فاستخدم التمرين (٢٠) لإثبات أن G تحتوي على زمرة جزئية واحدة على الأكثر رتبتها p .

(٢٢) إذا كانت $|G| = 48$ وكل من H و K زمرة جزئية من G رتبتها 16 فأثبت أن $|H \cap K| = 8$.

(٢٣) إذا كانت كل من G و H زمرة منتهية حيث $|G| = m$ و $|H| = n$ و $\gcd(m, n) = 1$ فأثبت أن التشاكل الوحيد من G إلى H هو التشاكل التافه .

(٢٤) إذا كانت $|G| = 2^n$ حيث G لا تحتوي على عنصر من الرتبة 4 فأثبت أن G إبدالية.

(٢٥) إذا كانت $K, H \leq \mathbb{Z}_n$ حيث $n = p^m$ ، p عدد أولي فأثبت أن $H \leq K$ أو $K \leq H$. وبالعكس إذا كانت $K \leq H$ أو $H \leq K$ لكل $K, H \leq \mathbb{Z}_n$ فأثبت $n = p^m$ حيث p عدد أولي.

(٢٦) إذا كانت $H, K \leq G$ حيث $[G : H] < \infty$ و $[G : K] < \infty$ فأثبت أن $[G : H \cap K] < \infty$. وإذا كانت $H_i \leq G$ ، $i \in \mathbb{Z}^+$ حيث $[G : H_i] < \infty$ لكل $i \in \mathbb{Z}^+$ فهل من الضروري أن يكون $[G : \bigcap_{i \in \mathbb{Z}^+} H_i] < \infty$ ؟

(٢٧) إذا كان $a, n \in \mathbb{Z}^+$ حيث $\gcd(a, n) = 1$ فأثبت أن $a^{\varphi(n)} \equiv 1 (\bmod n)$ حيث $\varphi(n)$ هي دالة اويلر .

(٢٨) لتكن G زمرة منتهية غير تافهة . أثبت أن $|G|$ عدد فردي إذا وفقط إذا كان لكل $x \in G$ يوجد $y \in G$ بحيث يكون $x = y^2$.

(٢٩) لتكن $K, H \leq G$ ولتكن $\sim$ علاقة معرفة على G كالتالي :

$a \sim b$ إذا وفقط إذا كان $b = hak$ حيث $h \in H$ و $k \in K$.

(أ) أثبت أن $\sim$ علاقة تكافؤ على G .

(ب) أثبت أن $[a] = HaK = \{ hak : h \in H, k \in K \}$. تسمى HaK المجموعة المشاركة المضاعفة للزمرتين H و K في G .

(ج) إذا كانت bK مجموعة مشاركة يسرى للزمرة الجزئية K في G فأثبت أن $HaK \cap bK = \phi$ أو أن $bK \subseteq HaK$ لكل $a, b \in G$.

(د) أثبت أن $HaK \cap HbK = \phi$ أو أن $HaK = HbK$ لكل $a, b \in G$.

(هـ) إذا كانت G زمرة منتهية فأثبت أن $|HaK| = |HaKa^{-1}|$.

(و) إذا كانت G زمرة منتهية فأثبت أن : $|HaK| = \dfrac{|H||K|}{|H \cap aKa^{-1}|}$

(٣٠) لتكن G زمرة منتهية ولتكن $H \leq G$ حيث $|HaH| = m$ لكل $a \in G$. أثبت أن $xH = Hx$ لكل $x \in G$.

(٣١) بين أياً من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :

(أ) إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها عدد أولي فإن G إبدالية .

(ب) إذا كانت $H \leq G$ وكان $a, b \in G$ فإن : $aH = bH \Rightarrow Ha = Hb$

(ت) إذا كانت $H \leq G$ وكان $a, b \in G$ فإن : $Ha = Hb \Rightarrow b \in Ha$

(ث) إذا كانت $H \leq G$ وكان $a, b \in G$ فإن : $aH = bH \Leftrightarrow Ha^{-1} = Hb^{-1}$

(ج) إذا كانت $H \leq G$ وكان $a, b \in G$ فإن : $aH = bH \Rightarrow a^2H = b^2H$

(ح) إذا كان $o(a) = 30$ فإن $[\langle a \rangle : \langle a^4 \rangle] = 2$.

(خ) إذا كانت $H = \{ a \in GL(2,\mathbb{R}) : \det a = \pm 1 \} \leq GL(2,\mathbb{R})$ وكان $a, b \in GL(2,\mathbb{R})$ حيث $aH = bH$ فإن $\det a = \det b$.

(د) إذا كانت $|G| < 100$ وكانت $H, K \leq G$ حيث $|H| = 10$ و $|K| = 25$ فإن $|G| = 50$.

(ذ) إذا كان $H, K \leq G$ فإن $x(H \cap K) = xH \cap xK$ لكل $x \in G$.

(ر) إذا كانت $H \leq G$ وكان $a, b \in H$ فإنه يوجد $c \in G$ حيث $(aH)(bH) = cH$.

(٣ , ٣) الزمر الجزئية الناظمية
Normal Subgroups

لقد بينا في البند (٣,٢) أن أي زمرة جزئية H من زمرة G تزودنا بتجزيئين للزمرة G . بالتحديد ، بمجموعة المجموعات المشاركة اليسرى للزمرة الجزئية H وبمجموعة المجموعات المشاركة اليمنى لها. وقد قدمنا أمثلة تبين لنا عدم تساوي هذان التجزيئان . سندرس في هذا البند الزمر الجزئية H من G التي تجعل التجزيئين متساويين، أي تحقق $aH = Ha$ لكل $a \in G$. يطلق على هذه الزمر، الزمر الجزئية الناظمية حيث تلعب هذه الزمر الجزئية دوراً ريادياً في الحصول على خواص هامة للزمرة الأم وفي إنشاء زمر جديدة من زمر معلومة . ومن الجدير بالذكر هنا هو أن أول استخدام لمفهوم الزمر الجزئية الناظمية كان على يد الرياضي الفرنسي الشهير جالوا (**Galois**) أثناء محاولته إيجاد حلول لكثيرات الحدود باستخلاص الجذور.

تعريف (٣,٦)

لتكن $H \leq G$. نقول إن H زمرة جزئية ناظمية (**normal subgroup**) من G إذا كان $aH = Ha$ لكل $a \in G$.

ملحوظات

(١) إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من G فإننا نكتب $H \lhd G$.

(٢) من الواضح أن $G \lhd G$ و $\{e\} \lhd G$ لكل زمرة G .

(٣) إذا كانت G زمرة إبدالية فإن $H \lhd G$ لكل $H \leq G$.

(٤) نحذر القارئ من أن $aH = Ha$ لا يعني بالضرورة أن $ah = ha$ لكل $a \in G$ و $h \in H$ ولكنه يعني أنه إذا كان $ah \in aH$ فإنه يوجد $h_1 \in H$ حيث $ah = h_1a$.

قبل أن نقدم أمثلة على الزمر الجزئية الناظمية نقدم المبرهنة التالية التي تزودنا بتعريفات مكافئة للزمر الجزئية الناظمية .

مبرهنة (٣,١٧)

إذا كانت $H \leq G$ فإن العبارات التالية متكافئة :

(أ) $H \lhd G$.

(ب) لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$ يوجد $h_1 \in H$ حيث $xh = h_1 x$.

(ج) $x^{-1}hx \in H$ لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$.

(د) $x^{-1}Hx \subseteq H$ لكل $x \in G$.

(هـ) $x^{-1}Hx = H$ لكل $x \in G$.

(و) $h^{-1}x^{-1}hx \in H$ لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$.

البرهان

(أ) $\Leftarrow$ (ب) : لنفرض أن $xH = Hx$. عندئذ، لكل $h \in H$ نجد أن $xh \in xH = Hx$. ولذا فإنه يوجد $h_1 \in H$ حيث $xh = h_1 x$.

(ب) $\Leftarrow$ (ج) : بما أنه لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$ يوجد $h_1 \in H$ حيث $xh = h_1 x$ فإنه على وجه الخصوص $x^{-1}h = h_1 x^{-1}$. ولذا فإن $x^{-1}hx = h_1 \in H$.

(ج) $\Leftarrow$ (د) : واضح .

(د) $\Leftarrow$ (هـ) : بما أن $x^{-1}Hx \subseteq H$ لكل $x \in G$ فإنه على وجه الخصوص $xHx^{-1} \subseteq H$ لكل $x \in G$ (وذلك بتبديل x بـ x^{-1}) . إذن ، $xhx^{-1} \in H$ لكل $x \in G$ وكل $h \in H$. ولذا فإنه يوجد $h_1 \in H$ حيث $xhx^{-1} = h_1$. أي أن ، $h = x^{-1}h_1 x \in x^{-1}Hx$. إذن ، $H \subseteq x^{-1}Hx$.

هـ $\Leftarrow$ (و) : لنفرض أن $x \in G$ و $h \in H$. بما أن $x^{-1}Hx = H$ فإن $x^{-1}hx \in H$. ولذا فإنه يوجد $h_1 \in H$ حيث $x^{-1}hx = h_1$. ومنه فإن $h^{-1}x^{-1}hx = h^{-1}h_1 \in H$.

(و) $\Leftarrow$ (أ) : بما أن $h^{-1}x^{-1}hx \in H$ لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$ فإنه يوجد $h_1 \in H$ حيث أن $h^{-1}x^{-1}hx = h_1$ أي أن $hx = xhh_1$ لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$.

نفرض الآن أن $a \in Hx$. إذن ، $a = hx$ حيث $h \in H$. ولذا فإن $a = xhh_1 \in xH$. أي أن ، $Hx \subseteq xH$. ومن ناحية أخرى ، لدينا $h^{-1}(x^{-1})^{-1}hx^{-1} \in H$ لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$. إذن، $h^{-1}(x^{-1})^{-1}hx^{-1} = h_2$ حيث $h_2 \in H$. أي أن ، $xh = hh_2 x$. نفرض الآن أن $a \in xH$.

عندئذ : $a = xh = hh_2x \in Hx$. ولذا فإن $xH \subseteq Hx$ وبالتالي فإن ، $xH = Hx$ ◆

مثال (٣,٣٤)

إذا كانت $H = \langle (1\ \ 2) \rangle \leq S_3$ فإن :

$(1\ \ 3) \circ H = \{(1\ \ 3), (1\ \ 2\ \ 3)\} \neq H \circ (1\ \ 3) = \{(1\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 2)\}$. إذن ، H ليست ناظمية من S_3 □

مثال (٣,٣٥)

إذا كانت $K = \langle (1\ \ 2\ \ 3) \rangle \leq S_3$ فإننا وجدنا في المثال (٣,٣٠) أن $\sigma \circ K = K \circ \sigma$ لكل $\sigma \in S_3$ ولذا فإن $K \triangleleft S_3$ □

مثال (٣,٣٦)

$SL(n,R) \triangleleft GL(n,R)$.

الحل

لاحظ أن $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in SL(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\} \leq GL(n,\mathbb{R})$. لنفرض الآن أن $B \in GL(n,\mathbb{R})$ وأن $A \in SL(n,\mathbb{R})$. عندئذ :

$$\det(B^{-1}AB) = \det(B^{-1})(\det A)(\det B) = \frac{1}{\det B} \times 1 \times \det B = 1$$

إذن ، $B^{-1}AB \in SL(n,\mathbb{R})$. ولذا فإن $SL(n,\mathbb{R}) \triangleleft GL(n,\mathbb{R})$ □

تزودنا المبرهنة التالية بالعديد من الزمر الجزئية الناظمية .

مبرهنة (٣,١٨)

إذا كانت $H \leq G$ وكان $[G:H] = 2$ فإن $H \triangleleft G$.

البرهان

لنفرض أن $\{H, xH\}$ و $\{H, Hx\}$ هما تجزيئي G من المجموعات المشاركة اليسرى واليمنى على التوالي. إذن ، $G = H \cup xH = H \cup Hx$. ولذا فإن $xH = G - H = Hx$ لكل $x \in G$. وبالتالي فإن ، $H \lhd G$ ◆

مثال (٣,٣٧)

بما أن $[S_n : A_n] = 2$ فإن $A_n \lhd S_n$ لكل $n \geq 2$ □

مثال (٣,٣٨)

$Z(G) \lhd G$ لكل زمرة G .

الحل

لقد بينا سابقاً أن $Z(G) \leq G$ (أنظر المثال (٢,١٩)) . لنفرض الآن $x \in G$ وأن $h \in Z(G)$. إذن، $xh = hx$. ولذا فإن $xhx^{-1} = h \in Z(G)$. وبالتالي فإن $Z(G) \lhd G$ □

تعريف (٣,٧)

إذا كانت $H \leq G$ فإن منظم H في G **(normalizer of H in G)** هو المجموعة $N(H) = \{x \in G : x^{-1}Hx = H\}$.

تزودنا المبرهنة التالية بخصائص المنظم الأساسية.

مبرهنة (٣,١٩)

إذا كانت $H \leq G$ فإن :

(أ) $N(H) \leq G$ (ب) $H \lhd N(H)$

(ج) $H \lhd G$ إذا وفقط إذا كان $N(H) = G$ (د) إذا كانت $H \lhd K \leq G$ فإن $K \subseteq N(H)$

أي أن $N(H)$ هي أكبر زمرة جزئية من G بحيث تكون H ناظمية فيها .

البرهان

(أ) لاحـــظ اولاً أن $N(H) \neq \phi$ (لأن $e \in N(H)$) . لنفـــرض الآن أن $x, y \in N(H)$. عندئـــذ ، $xH = Hx$ و $yH = Hy$. ولذا فـــإن ، $xy^{-1}H = xHy^{-1} = Hxy^{-1}$. إذن ، $xy^{-1} \in N(H)$. ومن ثم فإن $N(H) \leq G$.

(ب) من الواضح أن $xH = Hx$ لكل $x \in N(H)$. ولذا فإن $H \lhd N(H)$.

(ج) لنفرض أولاً أن $H \lhd G$. عندئذ ، $xH = Hx$ لكل $x \in G$. ولذا فإن $x \in N(H)$. إذن ، $G \subseteq N(H)$. وبالتالي فإن $G = N(H)$.

ولبرهان العكس ، نفرض أن $N(H) = G$. بما أن $H \lhd N(H)$ وأن $N(H) = G$ فإن $H \lhd G$.

(د) لنفرض أن $H \lhd K \leq G$. وليكن $k \in K$. بما أن $H \lhd K$ فإن $khk^{-1} \in H$ لكل $h \in H$. وبإســـتخدام المـــبرهنة (٣,١٧) نجـــد أن $kHk^{-1} = H$. إذن ، $k \in N(H)$. وبذلك يكون $K \subseteq N(H)$ ◆

تزودنا المبرهنة التالية باختبار لمعرفة فيما إذا كانت الزمرة الجزئية H من الزمرة المنتهية G ناظمية .

مبرهنة (٣,٢٠)

لتكن G زمرة منتهية ولتكن $H \leq G$ حيث $|H| = m$. إذا كانت H هي الزمرة الجزئية الوحيدة من G ذات الرتبة m فإن $H \lhd G$.

البرهان

لنفرض أن $x \in G$. لقـــد بينـــا في المثـــال (٣,١٦) أن التطبيـــق $\varphi : G \to G$ المعـــرف بالقاعـــدة $\varphi(g) = x^{-1}gx$ لكل $g \in G$ تماثل . إذن ، $\varphi(H) = x^{-1}Hx \leq G$. ولكن $|H| = |x^{-1}Hx| = m$. وبإستخدام وحدانية H نجد أن $H = x^{-1}Hx$. وبالتالي نستنتج أن $H \lhd G$ ◆

مثال (٣,٣٩)

بما أن $H = \{e, a^2\} \leq Q_8$ هي الزمرة الجزئية الوحيدة من Q_8 ذات الرتبة 2 فإنه باستخدام المبرهنـــة (٣ , ٢٠) نجد أن $H \lhd Q_8$ □

مثال (٣,٤٠)

بما أن $H = \{e, (1\ \ 2)\circ(3\ \ 4), (1\ \ 3)\circ(2\ \ 4), (1\ \ 4)\circ(2\ \ 3)\} \leq A_4$ هي الزمـــرة الجزئيـــة الوحيدة من A_4 ذات الرتبة 4 فإنه باستخدام المبرهنة (٣,٢٠) نجد أن $H \triangleleft A_4$ □

مثال (٣,٤١)

إذا كان $\varphi : G_1 \to G_2$ تشاكلاً فإن $\text{Ker}\varphi \triangleleft G_1$.

الحل

لقد بينا أن $\text{Ker}\varphi \leq G_1$ (أنظر المبرهنة (٣, ٢)) . لنفرض الآن أن $x \in G_1$ و $h \in \text{Ker}\varphi$. إذن ،

$$\varphi(x^{-1}hx) = \varphi(x^{-1})\varphi(h)\varphi(x) = \varphi(x^{-1})e_2\varphi(x) = \varphi(x^{-1}x) = \varphi(e_1) = e_2$$

ومنه فإن $x^{-1}hx \in \text{Ker}\varphi$. ولذا فإن $\text{Ker}\varphi \triangleleft G_1$ □

ملحوظة

سنبرهن لاحقاً أن عكس المثال (٣,٤١) صحيح أيضاً . أي أنه إذا كانت $K \triangleleft G$ فإنه يوجد تـــشاكل $\varphi : G \to H$ بحيث يكون $\text{Ker}\varphi = K$.

المثال التالي يبين لنا أن علاقة الناظمية ليس متعدية . أي ، من الممكن أن نجد زمر H, K, G حيث $H \triangleleft K \triangleleft G$ ولكن H ليست ناظمية في G .

مثال (٣,٤٢)

إذا كانت $G = D_4$ وكانت $K = \{e, a^2, ab, a^3b\}$ و $H = \{e, a^3b\}$ فـــإن $H \triangleleft K \triangleleft G$ ، لأن $[G:K] = [K:H] = 2$. ولكن H ليست ناظمية في G لأن : $aH = \{a, b\} \neq Ha = \{a, a^2b\}$ □

لقد بينا في المبرهنة (٢,١٦) أنه إذا كانت $\{H_i : i \in I\}$ عائلة غير خالية من الزمر الجزئية مـــن G فـــإن $\bigcap_{i\in I} H_i \leq G$. سنبرهن الآن أن $\bigcap_{i\in I} H_i \triangleleft G$ إذا كانت $H_i \triangleleft G$ لكل $i \in I$.

مبرهنة (٣,٢١)

إذا كانت $\{H_i : i \in I\}$ عائلة غير خالية من الزمر الجزئية الناظمية من الزمرة G فإن $G \lhd \bigcap_{i\in I} H_i$.

البرهان

لنفرض أن $x \in G$ و $h \in \bigcap_{i\in I} H_i$. عندئـــذ ، $h \in H_i$ لكـــل $i \in I$. وبمـــا أن $H_i \lhd G$ فـــإن $x^{-1}hx \in H_i$ لكل $i \in I$. إذن ، $x^{-1}hx \in \bigcap_{i\in I} H_i$. وبالتالي فإن $\bigcap_{i\in I} H_i \lhd G$ ◆

لقد عرفنا في الفصل الثاني حاصل الضرب HK حيث $H,K \leq G$ وقدمنا شرطاً كافياً ولازمـــاً لكـــي تكون $HK \leq G$. ونوظف الآن مفهوم الناظمية لتقديم شرطاً كافياً لكي تكون $HK \leq G$.

مبرهنة (٣,٢٢)

(أ) إذا كان $H,K \leq G$ حيث $K \lhd G$ فإن $HK \leq G$.

(ب) إذا كانت $K \lhd G$ و $H \lhd G$ فإن $HK \lhd G$.

البرهان

(أ) لاحـــظ أن $HK \neq \phi$ لأن $e = ee \in HK$. لنفـــرض الآن أن : $x = h_1k_1, y = h_2k_2 \in HK$ حيث $h_1,h_2 \in H$ و $k_1,k_2 \in K$. عندئذ ،

$$xy^{-1} = (h_1k_1)(h_2k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = h_1h_2^{-1}h_2k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = h_3k_3 \in HK$$

حيث $h_3 = h_1h_2^{-1} \in H$ و $k_3 = h_2k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \in K$. إذن ، $HK \leq G$.

(ب) لنفرض أن $H \lhd G$ و $K \lhd G$. ولنفرض أن $x \in G$ وأن $y = hk \in HK$. إذن، $x^{-1}yx = x^{-1}hkx = (x^{-1}hx)(x^{-1}kx) \in HK$. ومن ثم فإن $HK \lhd G$ ◆

من المبرهنة (٢,٢٠) والمبرهنة (٣,٢٢) نحصل مباشرة على النتيجة التالية :

نتيجة (٣,٢٣)

إذا كانت $H \leq G$ و $K \lhd G$ فإن $HK = KH = \langle H \cup K \rangle$ ◆

لقد بينا في المبرهنة (٢,٢١) أن المجموعة المرتبة جزئياً $(S(G),\leq)$ شبكية . نختم هذا البند ببرهان أن المجموعة المرتبة جزئياً $(N(G),\leq)$ شبكية قياسية حيث $N(G)$ هي مجموعة جميع الزمـــر الجزئيـــة الناظمية من G .

مبرهنة (٣,٢٤)

المجموعة المرتبة جزئياً $(N(G),\leq)$ شبكية قياسية .

البرهان

بطريقة مماثلة تماماً للمبرهنة (٢,٢١) نستطيع البرهان على أن $(N(G),\leq)$ شبكية . ولإنهاء البرهان يكفي أن نثبت أنها تحقق قانون القياس . تذكر أن $H\wedge K = H\cap K$ وأن $H\vee K = HK = \langle H\cup K\rangle$.

لنفرض إذن أن $H,K,L \lhd G$ حيث $H\leq K$. لذا فإن المطلوب إثباته هو :

$K\cap(HL) = H(K\cap L)$.

من الواضح أن $H(K\cap L)\subseteq K\cap(HL)$. ولبرهان الاحتواء الآخر ، نفرض أن $x\in K\cap(HL)$. إذن ، $x\in K$ و $x = hk\in HL$. بمـــا أن $h\in H$ وأن $H\leq K$ فـــإن $h\in K$. ولـــذا فـــإن $k = xh^{-1}\in K$. ومنه فإن $k\in H\cap L$. وبالتالي فإن : $x = hk\in H(K\cap L)$ ◆

(٣,٣,١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

إذا كانت $H\leq G$ وكان $x^2\in H$ لكل $x\in G$ فأثبت أن $H\lhd G$.

الحل

لنفرض أن $g\in G$ وأن $h\in H$. بما أن $h^{-1},g^{-2},(gh)^2\in H$ فإن:

$$ghg^{-1} = ghgh(gh)^{-1}g^{-1} = ghghh^{-1}g^{-1}g^{-1} = (gh)^2h^{-1}g^{-2}\in H$$

و بالتالي فإن $H\lhd G$ Δ

تمرين (٢)

لتكن $\{H_i : i \in i\}$ عائلة من الزمر الجزئية الفعلية الناظمية من الزمرة G حيث $G = \bigcup_{i\in I} H_i$ و $H_i \cap H_j = \{e\}$ لكل $i \neq j$. أثبت أن G زمرة إبدالية .

الحل

لنفرض أن $x, y \in G$. بما أن $G = \bigcup_{i\in I} H_i$ فإنه يوجد $i, j \in I$ حيث $x \in H_i$ و $y \in H_j$. إذا كان $i \neq j$ فإن $H_i \cap H_j = \{e\}$. وبما أن $H_i \lhd G$ و $H_j \lhd G$ فإن $x^{-1}y^{-1}xy \in H_i \cap H_j$. ولذا فإن $x^{-1}y^{-1}xy = e$. أي أن $xy = yx$. لنفرض إذن ، أن $i = j$. عندئذ ، $x, y \in H_i$. بما أن $H_i < G$ فإنه يوجد $z \in G$ حيث $z \notin H_i$. ومنه فإن $zx \notin H_i$. إذن ، $zx \in H_k$ حيث $k \neq i$. وكما بينا في الفقرة السابقة فإن $(zx)y = y(zx)$. الآن:
$z(xy) = (zx)y = y(zx) = (yz)x = (zy)x = z(yx)$. وبالتالي فإن $xy = yx$. أي أن G إبدالية Δ

تمرين (٣)

لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G ولتكن $H_G = \bigcap_{g\in G} g^{-1}Hg$.

(أ) أثبت أن $H_G \lhd G$.

(ب) إذا كانت $K \leq H$ حيث $K \lhd G$ فأثبت أن $K \leq H_G$.

(ج) إذا كانت $G = GL(2, \mathbb{Q})$ وكانت $H = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Q}, ab \neq 0 \right\}$ فأثبت أن $H_G = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Q}^* \right\}$.

الحل

(أ) بما أن $g^{-1}Hg$ زمرة جزئية من G لكل $g \in G$ فإن $H_G \leq G$.
لنفرض الآن أن $x \in H_G$ وأن $y \in G$. عندئذ ، $x \in g^{-1}Hg$ لكل $g \in G$. ولذا فإن $y^{-1}xy \in y^{-1}(g^{-1}Hg)y = (gy)^{-1}H(gy)$. ومنه فإن $y^{-1}xy \in H_G$. وبالتالي فإن $H_G \lhd G$.

(ب) لنفرض أن $K \leq H$ وأن $K \lhd G$. وليكن $k \in K$. بما أن $K \lhd G$ فإن $gkg^{-1} \in K$ لكـــل $g \in G$. ولذا فإن $k \in g^{-1}Kg \subseteq g^{-1}Hg$. ونستنتج أن $k \in H_G$.

(ج) لنفرض أن $K = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Q}^* \right\}$. من الواضح أن $K \lhd GL(2,\mathbb{Q})$. ولـــذا باســـتخدام الفقرة (ب) يكون $K \subseteq H_G$. لنفرض الآن أن $x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in H_G$. عندئذ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix} \in H_G \subseteq H.$$

ولذا فإن $a - b = 0$. أي أن $a = b$. ومنه فإن $x \in K$ وبالتالي فإن $K = H_G$ Δ

تمارين (٣,٣)

(١) إذا كانت $H = \{ e, (1 \ \ 2) \circ (3 \ \ 4) \}$ فهل $H \lhd A_4$؟

(٢) إذا كانت $H \lhd S_3$ وكانت H تحتوي على عنصر رتبته 2 فأثبت أن $H = S_3$.

(٣) أثبت أن $K = \{ e, (1 \ \ 2) \circ (3 \ \ 4), (1 \ \ 3) \circ (2 \ \ 4), (1 \ \ 4) \circ (2 \ \ 3) \} \lhd S_4$.

(٤) لنفرض أن لدينا المجموعات الجزئية التالية من $GL(2,\mathbb{R})$:

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}^* \right\} ، K = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}^* \right\} ، L = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}^* \right\}$$

(أ) أثبت أن $G = H \cup K \leq GL(2,\mathbb{R})$

(ب) أثبت أن $H \lhd G$ وأن $L \lhd H$

(ج) هل $K \leq G$؟

(د) هل $L \lhd G$ ؟

(٥) إذا كانت $H \leq G$ و $K \lhd G$ فأثبت أن $H \cap K \lhd H$. هل $H \cap K \lhd G$؟

(٦) إذا كان $\varphi : G_1 \to G_2$ تشاكلاً وكانت $H \lhd G_1$ فأثبت أن $\varphi(H) \lhd \varphi(G_1)$.

(٧) إذا كان $\varphi : G_1 \to G_2$ تشاكلاً وكانت $H \lhd G_2$ فأثبت أن $\varphi^{-1}(H) \lhd G_1$.

(٨) إذا كانت كل زمرة جزئية دورية من الزمرة G ناظمية فأثبت أن كل زمرة جزئية من G ناظمية .

(٩) إذا كانت H زمرة جزئية فعلية من G تحقق $xy \in H$ لكل $x, y \in G - H$ فأثبت أن $H \lhd G$.

(١٠) لتكن H زمرة جزئية فعلية من G وليكن $a \in G - H$. إذا كان $x \in H$ أو $xH = aH$ لكل $x \in G$ فأثبت أن $H \lhd G$.

(١١) لتكن $H \leq G$. ولنفرض أنه لكل $a, b \in G$ ، إذا كان $ab \in H$ فإن $ba \in H$. أثبت أن $H \lhd G$.

(١٢) إذا كانت $H \leq G$ فأثبت أن $H \lhd G$ إذا وفقط إذا كان $xH = hxH$ لكل $x \in G$ ولكل $h \in H$.

(١٣) إذا كانت $H \lhd G$ وكان $|H| = 2$ فأثبت أن $H \subsetneq Z(G)$.

(١٤) أثبت أن S_5 لا تحتوي على زمرة جزئية ناظمية رتبتها 2 [إرشاد : استخدم تمرين (١٣)] .

(١٥) أثبت أن A_4 هي الزمرة الجزئية الوحيدة من S_4 التي دليلها 2 .

(١٦) لنفرض أن G زمرة تحتوي على زمرة جزئية رتبتها m . ولتكن $\{H_i : i \in I\}$ مجموعة جميع الزمر الجزئية من G ذات الرتبة m . أثبت أن $\bigcap_{i \in I} H_i \lhd G$.

(١٧) إذا كان $H \lhd G$ و $K \lhd G$ حيث $H \cap K = \{e\}$ فأثبت أن $hk = kh$ لكل $h \in H$ وكل $k \in K$.

(١٨) لتكن $H \leq G$. ولنفرض أن لكل $a, b \in G$ تكون $(aH)(bH)$ مجموعة مشاركة يسرى للزمرة الجزئية H في G . أثبت أن $H \lhd G$.

(١٩) إذا كان $H \lhd G$ وكان $K \leq G$ فأثبت أن $[HK : H] = [K : H \cap K]$.

(٢٠) نقول إن الزمرة G غير قابلة للإختزال جزئياً (**subdirectly irreducible**) إذا كان تقاطع جميع الزمر الجزئية الفعلية غير التافهة الناظمية من G لا يساوي العنصر المحايد. أثبت أن كل من الزمر D_3 ، D_4 ، Q_8 غير قابلة للاختزال جزئياً . هل الزمرة T غير قابلة للاختزال جزئياً؟

(٢١) لتكن G زمرة ولتكن θ علاقة تكافؤ على G . نقول إن θ علاقة تطابق (**congruence**) إذا تحقق ما يلي : لكل $a,b,c \in G$ إذا كان $a\theta b$ فإن $ac\theta bc$ وإن $ca\theta cb$.

لنفرض الآن أن $H \lhd G$ والعلاقة θ_H معرفة على G كالتالي : $a\theta_H b$ إذا وفقط إذا كان $a^{-1}b \in H$ لكل $a, b \in G$. أثبت أن :

(أ) θ_H علاقة تطابق على G (ب) $[e] = H$

(٢٢) لتكن θ علاقة تطابق على G . أثبت أن :

(أ) $[e] \lhd G$ (ب) $a\theta b$ إذا وفقط إذا كان $ab^{-1} \in [e]$.

(٢٣) بين أي من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة .

(أ) إذا كانت $H \leq G$ وكانت H إبدالية فإن $H \lhd G$.

(ب) إذا كانت $H \leq G$ وكانت G إبدالية فإن $N(H) = G$.

(ت) إذا كانت $H \leq K \leq G$ وكانت $H \lhd G$ فإن $H \lhd K$.

(ث) توجد زمرة غير إبدالية G جميع زمرها الجزئية ناظمية .

(ج) إذا كانت كل من H ، K ، L زمرة جزئية ناظمية من G فإن $H(K \cap L) \lhd G$.

(ح) إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من زمرة منتهية G فإن $[G:H] = 2$.

(خ) إذا كان $\varphi: G_1 \to G_2$ تشاكلاً وكانت $H \lhd G_1$ فإن $\varphi(H) \lhd G_2$.

(د) إذا كانت $H \lhd G$ فإن $xhx \in H$ لكل $x \in G$ وكل $h \in H$.

(ذ) A_4 تحتوي على زمرة جزئية ناظمية رتبتها 2 .

(ر) توجد زمرة جزئية ناظمية وحيدة من S_4 رتبتها 12 .

(٣,٤) الضرب المباشر للزمر
Direct Product of Groups

إذا كانت $G_1, G_2, ..., G_n$ زمراً فلقد برهنا في الفصل الثاني (مبرهنة (٢,١٠)) أن $G = G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$ زمرة حيث العملية الثنائية المعرفة على G هي :

$$(a_1, a_2, ..., a_n)(b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, ..., a_n b_n)$$

تسمى الزمرة G زمرة الضرب المباشر الخارجي **(external direct product)** للزمر $G_1, G_2, ..., G_n$.

في هذا البند ندرس هذه الزمرة بشيء من التفصيل . كذلك نبين كيفية تفريق أي زمرة كحاصل ضرب مباشر لبعض زمرها الجزئية . هذا التفريق على قدر كبير من الأهمية لأنه يساعدنا على تصنيف الزمر ومنها الإبدالية .

تزودنا المبرهنة التالية بطريقة سهلة لحساب رتبة عنصر في زمرة الضرب المباشر الخارجي باستخدام رتب إحداثيات هذا العنصر .

مبرهنة (٣,٢٥)

إذا كانت $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ وكان $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in G$ حيث $o(a_i) = r_i$ لكل $1 \le i \le n$ فإن $o(a) = \operatorname{lcm}(r_1, r_2, \ldots, r_n)$.

البرهان

بإستخدام الاستقراء الرياضي على n .

لنفرض اولاً أن $n = 2$ وأن $a = (a_1, a_2)$ حيث $o(a_1) = r_1$ ، $o(a_2) = r_2$ ولنفرض أن $r = \operatorname{lcm}(r_1, r_2)$. عندئذ، $a^r = (a_1^r, a_2^r) = (e_1, e_2)$. ولذا فإن $m = o(a)$ يقسم r . أيضاً $(e_1, e_2) = a^m = (a_1^m, a_2^m)$. ولذا فإن $a_1^m = e_1$ وإن $a_2^m = e_2$. إذن ، r_1 يقسم m و r_2 يقسم m . ومنه فإن r يقسم m . إذن، $m = r$. أي أن $o(a) = \operatorname{lcm}(r_1, r_2)$.

لنفرض الآن أن العبارة صحيحة عند $n-1$. وليكن $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) \in G$. إذن ، $a_n \in G_n$ و $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in G_1 \times \ldots \times G_{n-1}$. باستخدام فرضية الاستقراء نجد أن : $o(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = \operatorname{lcm}(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$ ولذا فإن : $o(a) = \operatorname{lcm}(\operatorname{lcm}(r_1, \ldots, r_{n-1}), r_n) = \operatorname{lcm}(r_1, r_2, \ldots, r_n)$. وبالتالي فإن العبارة صحيحة عند n ◆

مثال (٣,٤٣)

احسب رتبة العنصر $([8],[4],[10]) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{24}$.

الحل

لاحظ أن : $o([8]) = \dfrac{12}{\gcd(12,8)} = 3$ ، $o([4]) = \dfrac{60}{\gcd(60,4)} = 15$ ، $o([10]) = \dfrac{24}{\gcd(24,10)} = 12$. إذن ، $o([8],[4],[10]) = \operatorname{lcm}(3,15,12) = 60$ □

مثال (٣,٤٤)

جد جميع عناصر $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$ التي رتبة كل منها 3 .

الحل

لنفرض أن $a = (a_1,a_2) \in \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$ حيث $o(a) = 3$. إذن ، باستخدام المبرهنة (٣,٢٥) نجد أن $\operatorname{lcm}(o(a_1),o(a_2)) = 3$. ولذا فإن لدينا الحالات التالية :

(أ) $o(a_1) = o(a_2) = 3$. في هذه الحالة $(a_1 = [3]$ أو $a_1 = [6])$ و $(a_2 = [1]$ أو $a_2 = [2])$.
إذن، $a = ([3],[1])$ أو $a = ([3],[2])$ أو $a = ([6],[1])$ أو $a = ([6],[2])$.

(ب) $o(a_1) = 3, o(a_2) = 1$. في هذه الحالة $a = ([3],[0])$ أو $a = ([6],[0])$.

(ج) $o(a_1) = 1, o(a_2) = 3$. في هذه الحالة $a = ([0],[1])$ أو $a = ([0],[2])$ □

مبرهنة (٣,٢٦)

إذا كانت كل من $G = \langle a \rangle$ و $H = \langle b \rangle$ زمرة دورية منتهية من الرتبة m و n على التوالي فإن $G \times H$ زمرة دورية إذا وفقط إذا كان $\gcd(m,n) = 1$.

البرهان

لنفرض أولاً أن $G \times H$ زمرة دورية (لاحظ أن $|G \times H| = mn$). ولنفرض أن $\gcd(m,n) = d > 1$.
الآن :

$$o\left(a^{m/d}\right) = \frac{m}{\gcd\left(m, m/d\right)} = \frac{m}{m/d} = d \quad \text{و} \quad o\left(b^{n/d}\right) = \frac{n}{\gcd\left(n, n/d\right)} = \frac{n}{n/d} = d$$

وعليه فإن كل من $\left\langle \left(a^{m/d}, e\right) \right\rangle$ و $\left\langle \left(b^{n/d}, e\right) \right\rangle$ زمرة جزئية من الزمرة الدورية $G \times H$ رتبتها d وهذا مستحيل . إذن ، $\gcd(m,n) = 1$. ولبرهان العكس ، نفرض أن $\gcd(m,n) = 1$. عندئذ: $o(a,b) = \operatorname{lcm}(m,n) = mn = |G \times H|$. ولذا فإن $G \times H = \langle (a,b) \rangle$ ◆

بإستخدام الاستقراء الرياضي نحصل على التعميم التالي للمبرهنة (٣,٢٦)

نتيجة (٣,٢٧)

لتكن $G_1, G_2, \ldots, G_n$ زمر دورية منتهية رتبها $m_1, m_2, \ldots, m_n$ على التوالي . عندئذ ، $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ زمرة دورية إذا وفقط إذا كان $\gcd(m_i, m_j) = 1$ لكل $i \neq j$ ◆

وبصورة خاصة لدينا :

نتيجة (٣,٢٨)

إذا كان $m = n_1 n_2 \ldots n_k$ فإن :

$\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ إذا وفقط إذا كان $\gcd(n_i, n_j) = 1$ لكل $i \neq j$ ◆

نتيجة (٣,٢٩)

إذا كان $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$ هو تحليل العدد n إلى قوى عوامله الأولية حيث $p_1, p_2, \ldots, p_k$ أعداد أولية جميعها مختلفة فإن : $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$ ◆

مثال (٣, ٤٥)

بإستخدام المبرهنة (٢٦ , ٣) ونتائجها نجد أن :

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{30} \quad \square$$

ننتقل الآن إلى مفهوم ضرب مباشر آخر للزمر .

تعريف (٣,٨)

نقول إن G هي زمرة الضرب المباشر الداخلي (**internal direct product**) للزمر الجزئية الناظمية $H_1, H_2, \ldots, H_n$ من G إذا كان لكل $a \in G$ يوجد عنصر وحيد $a_i \in H_i$ ، $1 \leq i \leq n$ حيث $a = a_1 a_2 \ldots a_n$.

تزودنا المبرهنة التالية بتعريف مكافئ لزمرة الضرب المباشر الداخلي .

مبرهنة (٣,٣٠)

تكون الزمرة G زمرة ضرب مباشر داخلي للزمر الجزئية الناظمية $H_1,H_2,\ldots,H_n$ من G إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

(أ) $G = H_1H_2 \ldots H_n$

(ب) $H_i \cap (H_1H_2\ldots H_{i-1}H_{i+1}\ldots H_n)$ لكل $1 \le i \le n$.

البرهان

لنفرض أولاً أن G هي زمر ضرب مباشر داخلي للزمر الجزئية الناظمية $H_1,H_2,\ldots,H_n$ من G. ولنفرض أن $a \in G$. إذن ، يوجد عنصر وحيد $a_i \in H_i$ لكل $i=1,\ldots,n$ حيث $a = a_1a_2\ldots a_n$. ومنه فإن $G = H_1H_2\ldots H_n$. لنفرض الآن أن $a \in H_i \cap (H_1H_2\ldots H_{i-1}H_{i+1}\ldots H_n)$. عندئذ ، $a \in H_i$ و $a = a_1a_2\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_n$ حيث $a_j \in H_j$ و $j \neq i$. ولذا فإن : $a = ee\ldots a\ldots e = a_1a_2\ldots a_{i-1}ea_{i+1}\ldots a_n$. وباستخدام الوحدانية نجد أن $a = e$.

ولبرهان العكس نفرض أن الشرطين (أ) و (ب) محققان . عندئذ ، $H_i \cap H_j = \{e\}$ لكل $i \neq j$. ولذا فإنه لكل $x \in H_i$ وكل $y \in H_j$ نجد أن : $x^{-1}y^{-1}xy \in H_i \cap H_j = \{e\}$ (لأن $H_i \lhd G$ و $H_j \lhd G$). أي أن $xy = yx$. الآن نفرض أن :

$a = a_1a_2\ldots a_n = b_1b_2\ldots b_n$ حيث $a_i, b_i \in H_i$ لكل $i = 1,2,\ldots,n$. إذن :

$$e = a^{-1}a = a_n^{-1}a_{n-1}^{-1}\ldots a_1^{-1}b_1b_2\ldots b_n = a_1^{-1}b_1a_2^{-1}b_2\ldots a_n^{-1}b_n$$

(ذلك لأن $xy = yx$ لكل $x \in H_i$ ، $y \in H_j$ ، $i \neq j$). ومنه :

$$b_i^{-1}a_i = a_1^{-1}b_1\ldots a_{i-1}^{-1}b_{i-1}a_{i+1}^{-1}b_{i+1}\ldots a_n^{-1}b_n \in H_i \cap (H_1H_2\ldots H_{i-1}H_{i+1}\ldots H_n) = \{e\}$$

إذن، $a_i = b_i$ لكل $i = 1,2\ldots,n$. وبالتالي فإن G زمرة ضرب مباشر داخلي للزمر $H_1,H_2,\ldots,H_n$ ◆

المبرهنة التالية تبين لنا إمكانية اعتبار الضرب المباشر الخارجي ضرباً مباشراً داخلياً .

مبرهنة (٣,٣١)

إذا كانت $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ زمرة ضرب مباشر خارجي وكانت :

$H_i = \{(e_1,...,e_{i-1},a_i,e_{i+1},...,e_n) : a_i \in G_i\}$ لكل $1 \le i \le n$ فإن :

(أ) $H_i \lhd G$ لكل $1 \le i \le n$ (ب) $H_i \cong G_i$ لكل $1 \le i \le n$

(ج) G زمرة ضرب مباشر داخلي للزمر الجزئية الناظمية $H_1, H_2, ..., H_n$

البرهان

(أ) بما أن $(e_1, e_2, ..., e_n) \in H_i$ فإن $H_i \ne \phi$ لنفرض أن : $a = (e_1,...,e_{i-1},a_i,e_{i+1},...,e_n), b = (e_1,...,e_{i-1},b_i,e_{i+1},...,e_n) \in H_i$. عندئذ : $ab^{-1} = (e_1,...,e_{i-1},a_ib_i^{-1},e_{i+1},...,e_n) \in H_i$. ولــــــذا فـــــإن $H_i \le G$. وإذا كــــــان $g = (g_1,...,g_n) \in G$ فإن :

$$\begin{aligned} gag^{-1} &= (g_1e_1g_1^{-1},...,g_{i-1}e_{i-1}g_{i-1}^{-1},g_ia_ig_i^{-1},g_{i+1}a_{i+1}g_{i+1}^{-1},...,g_ne_ng_n^{-1}) \\ &= (e_1,...,e_{i-1},g_ia_ig_i^{-1},e_{i+1},...,e_n) \in H_i \end{aligned}$$

ولذا فإن $H_i \lhd G$.

(ب) ليكن $\varphi : G_i \to H_i$ التطبيق المعرف بالقاعدة : $\varphi(a_i) = (e_1,...,e_{i-1},a_i,e_{i+1},...,e_n)$ لكل $a_i \in G_i$. من السهل أن نرى أن φ تماثل . ولذا فإن $G_i \cong H_i$.

(ج) لنفرض أن $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in G$ وأن $h_i = (e_1,...,e_{i-1},a_i,e_{i+1},...,e_n) \in H_i$. عندئذ، من الواضح أن $a = h_1h_2...h_n$. ولإثبات الوحدانيـــة نفـــرض أيـــضاً أن $a = k_1k_2...k_n$ حيـــث $k_i = (e_1,...,b_i,...,e_n) \in H_i$. عندئذ ،

$$(a_1,...,a_n) = h_1h_2...h_n = a = k_1k_2...k_n = (b_1, b_2..., b_n)$$

ولذا فإن $a_i = b_i$ لكل i . ومنه فإن $h_i = k_i$ لكل i ◆

نبرهن الآن الاتجاه الآخر . أي أننا سنثبت أنه إذا كانت G زمرة ضرب مباشر داخلي للزمـــر الجزئية الناظمية $H_1, H_2, ..., H_n$ فإنه من الممكن النظر إليها على أنها زمرة ضرب مباشر خارجي للزمر $H_1, H_2, ..., H_n$.

مبرهنة (٣,٣٢)

إذا كانت G زمـــرة ضـــرب مباشـــر داخلـــي للزمـــر الجزئيـــة الناظميـــة $H_1, H_2, ..., H_n$ فـــإن $G \cong H_1 \times H_2 \times ... \times H_n$.

البرهان

لنفرض أن $a \in G$. بما أن G زمرة ضرب مباشر داخلي للزمر الجزئية الناظمية $H_1, H_2, \ldots, H_n$ فإنه يوجد عنصر وحيد $a_i \in H_i$ لكل $1 \le i \le n$ حيث $a = a_1 a_2 \ldots a_n$. ليكن $\varphi : G \to H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(a) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. من الواضح أن φ معرف تعريفاً حسناً وشاملاً . وبما أن تمثيل a وحيد فإن φ أحادي . وأخيراً φ تشاكل لأنه لو كان $a = a_1 a_2 \ldots a_n , b = b_1 b_2 \ldots b_n \in G$ حيث $a_i, b_i \in H$ فإن :

$$ab = a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_n = a_1 b_1 a_2 \ldots a_n b_n$$

(لأن $xy = yx$ لكل $x \in H_i$ و $y \in H_j$ ، $i \ne j$) . إذن ،

$$\varphi(ab) = (a_1 b_1, \ldots, a_n b_n) = (a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n) = \varphi(a)\varphi(b) \quad ◆$$

ملحوظة

من المبرهنتين (٣,٣١) و (٣,٣٢) نجد أن مفهومي الضرب المباشر الداخلي والخارجي لعدد منته من الزمر متماثلان ولذا فإننا من الآن فصاعداً سنكتب $G = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$ إذا كانت G زمرة ضرب مباشر داخلي للزمر الجزئية الناظمية $H_1, H_2, \ldots, H_n$.

تعريف (٣,٩)

نقول إن الزمرة G متحللة (**decomposable**) إذا كانت $G = H \times K$ حيث كل من G و K زمرة جزئية فعلية غير تافهة من G . ونقول إن G غير متحللة (**indecomposable**) إذا لم تكن متحللة . أي إذا كان :

$$G = H \times K \Rightarrow H = \{e\} \text{ أو } K = \{e\}$$

مثال (٣,٤٦)

S_3 غير متحللة . في الحقيقة ، إذا كانت H زمرة جزئية فعلية من S_3 فإن $H \cong \mathbb{Z}_2$ أو إن $H \cong \mathbb{Z}_3$. ولكن $S_3 \ncong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ □

مثال (٣,٤٧)

$(\mathbb{Q},+)$ غير متحللة . لأنه لـو كانـت $\mathbb{Q}=H\times K$ حيـث $H\neq\{0\}$ و $K\neq\{0\}$ فإنـه يوجـد $0\neq\frac{a}{b}\in H$ و $0\neq\frac{r}{s}\in K$ .. بما أن $H\leq\mathbb{Q}$ و $K\leq\mathbb{Q}$ فإننا نجد أن :

$$rb\left(\frac{a}{b}\right)=ra\in H \quad \text{وأن} \quad as\left(\frac{r}{s}\right)=ar\in K$$

إذن ، $H\cap K\neq\{0\}$ وهذا مستحيل . وبالتالي فإن $\mathbb{Q}$ غير متحللة □

مبرهنة (٣,٣٣)

$\mathbb{Z}_n$ غير متحللة إذا وفقط إذا كان $n=p^k$ حيث p عدد أولي و $k\in\mathbb{Z}^+$.

البرهان

لنفرض أن $\mathbb{Z}_n$ غير متحللة . ولنفرض لغرض التناقض أن $n=p^k m$ حيـث $\gcd(p,m)=1$. إذن، نستطيع إيجاد زمرتين جزئيتين H و K من $\mathbb{Z}_n$ حيث $|H|=m$ و $|K|=p^k$. وبما أن $H\cap K=\{0\}$ فإن $\mathbb{Z}_n\cong H\times K$ وهذا مستحيل . إذن ، $n=p^k$.

ولبرهان العكس ، نفرض أن $n=p^k$. إذا كان $\mathbb{Z}_n=H\times K$ فإن $|H|=p^i$ و $|K|=p^j$. ولذا فـإن $H\cap K\neq\{0\}$. وهذا تناقض ◆

سنبرهن الآن أنه بالإمكان كتابة أي زمرة منتهية كحاصل ضرب مباشر لزمر غير متحللة ، ولكننا نحتاج أولاً إلى المبرهنة التالية :

مبرهنة (٣,٣٤)

إذا كانت كل من G_1,G_2,G_3,G_4 زمرة فإن :

(أ) إذا كانت $G_1\cong G_3$ و $G_2\cong G_4$ فإن $G_1\times G_2\cong G_3\times G_4$

(ب) $G_1\times G_2\cong G_2\times G_1$

(ج) $G_1\times(G_2\times G_3)\cong G_1\times G_2\times G_3$

البرهان

(أ) إذا كان $\varphi : G_1 \to G_3$ و $\psi : G_2 \to G_4$ تماثلين فإنه من الواضح أن التطبيق $\gamma : G_1 \times G_2 \to G_3 \times G_4$ المعرف بالقاعدة $\gamma(a,b) = (\varphi(a), \psi(b))$ تماثل .

(ب) التطبيق $\varphi : G_1 \times G_2 \to G_2 \times G_1$ المعرف بالقاعدة $\varphi(a,b) = (b,a)$ تماثل .

(ج) التطبيق $\varphi : G_1 \times (G_2 \times G_3) \to G_1 \times G_2 \times G_3$ المعرف بالقاعدة :

$\varphi[(a_1,(a_2,a_3))] = (a_1,a_2,a_3)$ تماثل ◆

مبرهنة (٣,٣٥)

إذا كانت G زمرة منتهية فإن G زمرة ضرب مباشر لزمر غير متحللة .

البرهان

إذا كانت $G = \{e\}$ فإن G غير متحللة ونكون قد أنتهينا . لنفرض إذن ، أن $G \neq \{e\}$ ولنفرض أن $|G| = n$. نستخدم الاستقراء الرياضي على n . من الواضح أن العبارة صحيحة عند $n = 2$. نفرض الآن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر ذوات رتب أصغر من n . إذا كانت G غير متحللة فإن العبارة صحيحة . نفرض إذن أن $G = G_1 \times G_2$ حيث $1 < |G_1|, |G_2| < n$. بإستخدام الإستقراء الرياضي نستطيع إيجاد زمر $H_1, H_2, \ldots, H_k$ و $K_1, K_2, \ldots, K_m$ غير متحللة حيث $G_1 \cong H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_k$ و $G_2 \cong K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_m$. إذن، $G \cong H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_k \times K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_m$ ◆

نقدم الآن المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية

(Fundamental Theorem of Finite Abelian Groups)

والتي نؤجل برهانها إلى الفصل السادس (أنظر مبرهنة (٦,٧) والنتيجة التي تليها) .

مبرهنة (٣,٣٦) [المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية]

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية فإن G ضرب مباشر لزمر دورية رتبة كل منها قوة لعدد أولي p . وعلاوة على ذلك فإن طريقة كتابة G كضرب مباشر وحيدة بإستثناء الترتيب ◆

إذا كان $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_t^{n_t}$ هو تحليل n إلى قوى عوامله الأولية المختلفة فإننا قد بينا في النتيجة (٣,٢٩) أن : $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_t^{n_t}}$ ولذا فإننا نحصل على النتيجة التالية :

نتيجة (٣,٣٧)

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية فإنه توجد أعداد صحيحة $p_1^{s_1}, \dots, p_k^{s_k}$ وحيدة (باستثناء الترتيب) حيث $p_1, \dots, p_k$ أعداد أولية (ليست بالضرورة مختلفة) وحيث $s_1, \dots, s_k$ أعداد صحيحة موجبة (ليست بالضرورة مختلفة) بحيث يكون : $G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}}$ ◆

تسمى الأعداد $p_1^{s_1}, \dots, p_k^{s_k}$ القواسم البدائية (**elementary divisors**) للزمرة G .

مثال (٣,٤٨)

جد جميع الزمر الابدالية غير المتماثلة من الرتبة 720 .

الحل

لاحظ أن $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$. ولذا فإن مجموعات القواسم البدائية هي :

$2^4, 3^2, 5$

$2, 2^3, 3^2, 5$

$2^2, 2^2, 3^2, 5$

$2, 2, 2^2, 3^2, 5$

$2, 2, 2, 2, 3^2, 5$

$2^4, 3, 3, 5$

$2, 2^3, 3, 3, 5$

$2^2, 2^2, 3, 3, 5$

$2, 2, 2^2, 3, 3, 5$

$2, 2, 2, 2, 3, 3, 5$

ولذا فإن الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 720 هي :

$\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$

$$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_5$$
$$\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_5$$
$$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_5$$
$$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_5$$
$$\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5$$
$$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5$$
$$\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5$$
$$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5$$
$$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5 \quad \square$$

لقد بينا في المثال (٢,٥) أن $(U_n,\cdot_n)$ حيث $U_n=\{[a]\in\mathbb{Z}_n : \gcd(a,n)=1\}$ زمرة إبدالية.
والمبرهنة التالية التي يمكن إيجاد برهانها في كتب نظرية الأعداد (أنظر [18]) تبين لنا متى تكون U_n دورية .

مبرهنة (٣,٣٨)

تكون الزمرة U_n دورية إذا وفقط إذا كان $n=1,2,4,p^k,2p^k$ حيث p عدد أولي فردي و $k\in\mathbb{Z}^+$ ◆

سنبين الآن كيفية استخدام المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية لكتابة U_n كحاصل ضرب مباشر لزمر دورية .

مبرهنة (٣,٣٩)

إذا كان $\gcd(m,n)=1$ فإن $U_{mn}\cong U_m\times U_n$.

البرهان

ليكن $\varphi : U_{mn}\to U_m\times U_n$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi([a]_{mn})=([a]_m,[a]_n)$. φ حسن التعريف لأن $[a]_{mn}\in U_{mn}$ إذا وفقط إذا كان $\gcd(a,mn)=1$. وهذا يجعل $\gcd(a,n)=\gcd(a,m)=1$. فيكون $[a]_m\in U_m$ و $[a]_n\in U_n$. φ تشاكل لأن :

$$\varphi([a]_{mn},[b]_{mn}) = \varphi([ab]_{mn}) = ([ab]_m,[ab]_n)$$
$$= ([a]_m[b]_m,[a]_n[b]_n) = ([a]_m,[a]_n)([b]_m,[b]_n)$$
$$= \varphi([a]_{mn})\varphi([b]_{mn})$$

φ أحادي لأنه لو كان $[x]_{mn} \in \text{Ker}\varphi$ فإن $([x]_m,[x]_n) = ([1]_m,[1]_n)$. ومنه فإن $m \mid (x-1)$ و $n \mid (x-1)$. وبما أن $\gcd(m,n)=1$ فإننا نجد أن $mn \mid (x-1)$ مما يجعل $[x]_{mn} = [1]_{mn}$. وأخيراً φ شامل لأنه لو كان $([a]_m,[b]_n) \in U_m \times U_n$ فإنه لكون $\gcd(m,n)=1$ نجد استناداً إلى مبرهنة الباقي الصينية (أنظر **[2]**) عدداً x بحيث يكون $[x]_m = [a]_m$ و $[x]_n = [b]_n$. وعليه فإن $\varphi([x]_{mn}) = ([a]_m,[b]_n)$. وبالتالي نخلص إلى أن $U_{mn} \cong U_m \times U_n$ ◆

باستخدام المبرهنة (٣٩, ٣) والاستقراء الرياضي نحصل مباشرة على النتيجة التالية :

نتيجة (٤٠ , ٣)

(أ) إذا كان $m = n_1 n_2 \dots n_k$ حيث $\gcd(n_i , n_j) = 1$ لكل $i \neq j$ فإن $U_m \cong U_{n_1} \times U_{n_2} \times \cdots \times U_{n_k}$.

(ب) إذا كان $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}$ هو تحليل m إلى قوى عوامله الأولية فإن $U_m = U_{p_1^{k_1}} \times U_{p_2^{k_2}} \times \ldots \times U_{p_t^{k_t}}$ ◆

ملحوظات

(١) إذا كان $n \in \mathbb{Z}^+$ فإن دالة أويلر ويرمز لها بالرمز $\varphi(n)$ وتعرف على أنها رتبة الزمرة U_n. أي عدد الأعداد الموجبة الأولية نسبياً مع n والتي لا تزيد عن n.

(٢) لاحظ أن $U_2 \cong \mathbb{Z}_1$ وأن $U_4 \cong \mathbb{Z}_2$. وبما أن U_{p^n} دورية من الرتبة $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$ حيث p عدد أولي فردي فإن $U_{p^n} \cong \mathbb{Z}_{p^n - p^{n-1}}$. ومن المعلوم أيضاً (أنظر **[18]**) أن $U_{2^n} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{n-2}}$ حيث $n \geq 3$. وبالتالي نستطيع التعبير عن الزمرة U_n كحاصل ضرب مباشر لزمر دورية ونوضح ذلك في المثال التالي :

مثال (٤٩ , ٣)

أكتب الزمرة U_{720} على صورة ضرب مباشر لزمر دورية .

الحل

بما أن $720 = 16 \times 9 \times 5$ فإن : $U_{720} \cong U_{16} \times U_9 \times U_5 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4$ $\square$

مثال (٥٠ , ٣)

أثبت أن U_{65} تحتوي زمرة جزئية تماثل الزمرة $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$.

الحل

لاحظ أن $U_{65} \cong U_5 \times U_{13} \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$. ولذا فإن $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \{[0]\}$ زمرة جزئية من U_{65} تماثل $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ $\square$

ننهي هذا البند بتصنيف بعض الزمر ذات الرتب الصغيرة .

مبرهنة (٤١ , ٣)

إذا كانت G زمرة من الرتبة $2p$ حيث p عدد أولي فردي فإن $G \cong \mathbb{Z}_{2p}$ أو أن $G \cong D_p$.

البرهان

لنفرض أولاً أن G إبدالية . إذن باستخدام المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية نجد أن $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_{2p}$.

لنفرض الآن أن G غير إبدالية . بما أن $|G|$ زوجي فإنه يوجد $e \neq b \in G$ حيث $o(b) = 2$. إذا كانت جميع عناصر G (عدا المحايد) من الرتبة 2 فإن G إبدالية . لذا فإنه يوجد $a \in G$ حيث $o(a) \neq 2$. باستخدام مبرهنة لاجرانج نجد أن $o(a) = 2p$ أو أن $o(a) = p$. إذا كان $o(a) = 2p$ فإن $G = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_{2p}$. إذن ، $o(a) = p$. لنفرض أن $H = \langle a \rangle$. بما أن $[G:H] = 2$ فإن $H \lhd G$. إذن، $bab = bab^{-1} \in H$. ولذا فإن $bab = a^i$ حيث $0 \leq i < p$. الآن، $a^{i^2} = (a^i)^i = (bab)^i = (bab^{-1})^i = ba^ib$. كذلك ، $bab = a^i \Rightarrow a = ba^ib = a^{i^2}$. إذن ، $a^{i^2} = a$. أي أن ، $a^{i^2-1} = e$. وبما أن $o(a) = p$ فإن

$p \mid (i^2-1)$. إذن ، $p \mid (i-1)$ أو $p \mid (i+1)$. إذا كان $p \mid (i-1)$ فـإن $i-1=0$. ومنـه فإن $i=1$. إذن $bab=a$. أي أن $ba=ab$. ولذا فإن G تحتوي على عنصر رتبتـه $2p$ ومـن ثم دوريـة. إذن ، $p \mid (i+1)$. ومنـه فـإن $i+1=0$. أي أن $bab=a^{-1}$. وبالتـالي نخلـص إلى أن $G=\langle a,b\rangle$ حيث $o(a)=p$ ، $o(b)=2$ و $ba=a^{-1}b$. إذن، $G \cong D_p$ ◆

لدينا الآن المعلومات اللازمة لتصنيف الزمر (باستثناء التماثل) من الرتب أصغر من أو يساوي 8 .

مبرهنة (٤٢ , ٣)

لتكن G زمرة حيث $|G| \le 8$. عندئذ :

(أ) إذا كانت $|G|=2, 3, 5, 7$ فإن G دورية .

(ب) إذا كانت $|G|=4$ فإن $G \cong \mathbb{Z}_4$ أو $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(ج) إذا كانت $|G|=6$ فإن $G \cong \mathbb{Z}_6$ أو أن $G \cong D_3$.

(د) إذا كانـت $|G|=8$ فـإن $G \cong \mathbb{Z}_8$ أو $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ أو $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ أو $G \cong D_4$ أو $G \cong Q_8$.

البرهان

(أ) بما أن كل من 7, 5 , 3 , 2 عدد أولي فإن G دورية.

(ب) إذا كانت G دورية فإن $G \cong \mathbb{Z}_4$. أما إذا كانت G غير دورية فإن جميع عناصرها (عدا المحايد) من الرتبة 2 . إذن G إبدالية ، ولذا فإن $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(ج) نحصل عليها مباشرة من المبرهنة (٤١ , ٣).

(د) لنفرض أن $|G|=8$. إذا كانت G إبدالية فباستخدام المبرهنة الأساسية للزمر الابدالية المنتهية يكون من الواضح أن $G \cong \mathbb{Z}_8$ أو $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ أو $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

لنفرض إذن أن G غير إبدالية . بما أن $|G|$ زوجي فإنها تحتوي على عنصر من الرتبة 2 . إذا كانت جميـع عناصـر G (عـدا المحايـد) مـن الرتبـة 2 فـإن G إبداليـة . إذن يوجـد $a \in G$ حيـث $o(a) \ne 2$. ولـذا فـإن 8 أو $o(a)=4$. إذا كـان $o(a)=8$ فـإن $G \cong \mathbb{Z}_8$

إذن، $o(a)=4$. لنفــــرض إذن ، أن $H=\{e, a, a^2, a^3\}$. بمــا أن $[G:H]=2$ فــإن $H \lhd G$. لنفرض أن $b \notin H$. إذن $G=H \cup bH$ و $H \cap bH = \phi$. ولذا فإن :

$G=\{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$.

الآن، بما أن $b \notin H$ وأن $[G:H]=2$ فإن $o(bH)=2$. ولذا فإن $b^2H=H$. أي أن $b^2 \in H$. إذا كان $b^2=a$ أو $b^2=a^3$ فإننا نجد أن $o(b)=8$. ومن ثم فــإن G دوريـــة . إذن ، $b^2=e$ أو $b^2=a^2$. الآن : بما أن $H \lhd G$ فإن $bab^{-1} \in H$. إذا كان $bab^{-1}=e$ فإن $a=e$ وهذا تناقض . إذا كـــان $bab^{-1}=a$ فـــإن $ba=ab$ وهــــذا تنـــاقض . إذا كـــان $bab^{-1}=a^2$ فـــإن $ba^2b^{-1}=(bab^{-1})^2=a^4=e$. ولذا فإن $a^2=e$ وهذا أيضاً تناقض . إذن ، $bab^{-1}=a^3$. أي أن $ba=a^3b$. وبتجميع ما تقدم نكون قد أثبتنا:

(أ) إما أن $G=\langle a, b\rangle$ حيــث $o(a)=4$ ، $o(b)=2$ ، $ba=a^3b$. ولــذا فــإن $G \cong D_4$.

(ب) أو أن $G=\langle a, b\rangle$ حيث $o(a)=4$ ، $b^2=a^2$ ، $ba=a^3b$. ولذا فإن $G \cong Q_8$.

وأخيراً لاحظ أن $Q_8 \ncong D_4$ لأن جميع زمر Q_8 الجزئية ناظمية ولكن هذا ليس صحيحاً للزمرة D_4 ◆

(١ , ٤ , ٣) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

لـــيكن $\varphi: G \to G_1$ تـــشاكلاً مـــن الزمـــرة G إلى الزمـــرة G_1 . ولـــتكن $H \lhd G$ ولـــيكن $\varphi|_H : H \to G_1$ تماثلاً . أثبت أن $G=H \times Ker\varphi$ وبين أن النتيجة ليست بالضرورة صـحيحة إذا لم تكن H زمرة جزئية ناظمية من G .

الحل

لنفـــرض أن $a \in G$. عندئــذٍ ، $\varphi(a) \in G_1 = \varphi(H)$. ولـــذا فإنـــه يوجـــد $h \in H$ حيـــث $\varphi(a)=\varphi(h)$. ومنه فإن $\varphi(h^{-1}a)=e_1$. أي أن $h^{-1}a \in Ker\varphi$. وبالتـــالي فـــإن : $a = hh^{-1}a \in HKer\varphi$. أي أن $G=HKer\varphi$. لنفـــرض الآن أن $a \in H \cap Ker\varphi$. عندئـــذٍ ، $a \in H$ و $\varphi(a)=e_1=\varphi(e)$. وبما أن $\varphi|_H$ أحادي فإن $a=e$. وبالتالي فإن $H \cap Ker\varphi=\{e\}$. أي أن $G=H \times Ker\varphi$.

ولإثبات أن النتيجة ليست صحيحة إذا لم تكن H ناظمية في G . أعتبر $G = S_3$ و $G_1 = \mathbb{Z}_2$ و $H = \langle (1\ 2) \rangle$. لاحظ أن H ليست ناظمية في G. ليكن $\varphi : S_3 \to \mathbb{Z}_2$ التطبيق المعرف بالقاعدة :

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} [0] & , \sigma = (1) \text{ أو } o(\sigma)=3 \\ [1] & , o(\sigma) = 2 \end{cases}$$

من الواضح أن $\varphi|_H : H \to \mathbb{Z}_2$ تماثل وأن $\mathrm{Ker}\varphi = \{(1),(1 2 3),(1 3 2)\} = \langle (1 2 3) \rangle$.
ولكننا بينا في المثال (٤٦ , ٣) أن $S_3 \neq H \times \mathrm{Ker}\varphi$ Δ

تمرين (٢)

لتكن كل من H وK زمرة جزئية ناظمية من G حيث $G = H \times K$ ولتكن $N \triangleleft G$ حيث $N \cap H = N \cap K = \{e\}$. أثبت أن N زمرة إبدالية .

الحل

لاحظ أولاً أنه إذا كان $n \in N$ و $h \in H$ فإن $nhn^{-1}h^{-1} \in N \cap H = \{e\}$. ولذا فإن $nh = hn$. وبالمثل ، $nk = kn$ لكل $n \in N$ و $k \in K$. الآن ، لنفرض أن $a, b \in N$. بما أن $b \in G$ فإنه يوجد $h \in H$ و $k \in K$ حيث $b = hk$. ولذا فإن :
$ab = a(hk) = (ah)k = (ha)k = h(ka) = (hk)a = ba$. وبالتالي فإن N إبدالية Δ

تمرين (٣)

عين أربعة زمر غير متماثلة من الرتبة 66 .

الحل

كل من $\mathbb{Z}_{66}$ ، D_{33} ، $D_{11} \times \mathbb{Z}_3$ و $D_3 \times \mathbb{Z}_{11}$ زمرة رتبتها 66 . ومن السهل أن نرى أن جميع هذه الزمر غير متماثلة . فمثلاً ، $\mathbb{Z}_{66}$ إبدالية والزمر الثلاثة الأخرى غير إبدالية ولذا فإن $\mathbb{Z}_{66}$ لا تماثل أي منها . كما أن $Z(D_{33}) = \{e\}$ ولكن $Z(D_{11} \times \mathbb{Z}_3) \neq \{e\}$ و $Z(D_3 \times \mathbb{Z}_{11}) \neq \{e\}$. ولذا فإن $D_{33} \not\cong D_{11} \times \mathbb{Z}_3$ و $D_{33} \not\cong D_3 \times \mathbb{Z}_{11}$. وأخيراً ، الزمرة $D_{11} \times \mathbb{Z}_3$ تحتوي على 11 عنصراً من الرتبة 2 ولكن الزمرة $D_3 \times \mathbb{Z}_{11}$ تحتوي على 3 عناصر فقط من الرتبة 2 . ولذا فإن $D_{11} \times \mathbb{Z}_3 \not\cong D_3 \times \mathbb{Z}_{11}$ Δ

تمرين (٤)

ليكن $\alpha_1 : G \to G_1$ تشاكلاً من الزمرة G إلى الزمرة G_1 وليكن $\alpha_2 : G \to G_2$ تشاكلاً من الزمرة G إلى الزمرة G_2 . نقول إن α_1 و α_2 يفصلان العناصر(**separate elements**) إذا كان :

$$\forall a, b \in G(a \neq b \to \alpha_1(a) \neq \alpha_1(b) \vee \alpha_2(a) \neq \alpha_2(b)) .$$

(أ) أثبت أن التطبيق $\alpha : G \to G_1 \times G_2$ المعرف بالقاعدة $\alpha(a) = (\alpha_1(a), \alpha_2(a))$ تشاكل .

(ب) أثبت أن العبارات التالية متكافئة :

(i) α_1 و α_2 يفصلان العناصر .

(ii) α تشاكل أحادي .

(iii) $Ker\alpha_1 \cap Ker\alpha_2 = \{e\}$.

الحل

(أ) لنفرض أن $a, b \in G$. عندئذ :

$$\alpha(ab) = \big(\alpha_1(ab), \alpha_2(ab) \big) = (\alpha_1(a)\alpha_1(b), \alpha_2(a)\alpha_2(b))$$
$$= \big(\alpha_1(a), \alpha_2(a) \big) \big(\alpha_1(b), \alpha_2(b) \big) = \alpha(a)\alpha(b)$$

ولذا فإن α تشاكل .

(ب) (i) $\Leftarrow$ (ii) : لنفرض أن α_1 و α_2 يفصلان العناصر. ولنفرض أن $a, b \in G$ حيث $a \neq b$. عندئذ ، إما أن $\alpha_1(a) \neq \alpha_1(b)$ أو أن $\alpha_2(a) \neq \alpha_2(b)$. ولذا فإن $\alpha(a) \neq \alpha(b)$. أي أن α أحادي.

(ii) $\Leftarrow$(iii) : لنفرض أن $a \in Ker\alpha_1 \cap Ker\alpha_2$. عندئذ ، $\alpha_1(a) = e_1$ و $\alpha_2(a) = e_2$. ومنه فإن $\alpha(a) = \big(\alpha_1(a), \alpha_2(a)\big) = (e_1, e_2) = \alpha(e)$. وبما أن α أحادي فإن $a = e$.

(iii) $\Leftarrow$ (i) : لنفرض أن $a, b \in G$ حيث $a \neq b$. عندئذ ، $ab^{-1} \neq e$. ومنه فإن $ab^{-1} \notin Ker\alpha_1 \cap Ker\alpha_2$. ولذا فإن $\alpha_1(ab^{-1}) \neq e_1$ أو أن $\alpha_2(ab^{-1}) \neq e_2$. أي أن $\alpha_1(a) \neq \alpha_1(b)$ أو أن $\alpha_2(a) \neq \alpha_2(b)$. وبالتالي فإن α_1 و α_2 يفصلان العناصر Δ

تمارين (٤ , ٣)

(١) احسب رتبة كل من العناصر التالية :

(أ) $([2],[3]) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$　　(ب) $([2],[3]) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}$

(ج) $([8],[10]) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$　　(د) $([3],[10],[9]) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$

(هـ) $([3],[6],[12],[16]) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{24}$

(٢) جد جميع العناصر من الرتبة 5 في الزمرة $\mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_5$.

(٣) جد زمرة جزئية من $\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{12}$ رتبتها 24 .

(٤) جد زمرة جزئية من $\mathbb{Z}_{800} \times \mathbb{Z}_{200}$ تماثل $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

(٥) أثبت أن $D_3 \times D_7 \ncong D_{42}$.

(٦) جد الزمرة التي تماثل $D_3 \times \mathbb{Z}_2$ من بين الزمر $\mathbb{Z}_{12}$ ، $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$ ، A_4 ، D_6 .

(٧) أثبت أن الزمرة $G = \{ 3^m 6^n : m , n \in \mathbb{Z}\}$ مع عملية الضرب تماثل الزمرة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(٨) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتب :

$8, 16, 20, 32, 60, 66, 80, 240, 540, 780, 1089$.

(٩) جد القواسم البدائية للزمر التالية :

(أ) $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{50}$　　(ب) $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{144} \times \mathbb{Z}_8$　　(ج) $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{120}$

(١٠) هل $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ زمرة دورية ؟ لماذا ؟

(١١) هل $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}_{27}$ ؟ لماذا؟

(١٢) بين أن عدد العناصرمن الرتبة 4 في الزمرة $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_4$ يساوي عدد العناصر من الرتبة 4 في الزمرة $\mathbb{Z}_{8000000} \times \mathbb{Z}_{4000000}$.

(١٣) احسب رتبة كل عنصر من عناصر الزمرة $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

(١٤) جد جميع الزمر الجزئية من الرتبة 3 في الزمرة $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$.

(١٥) جد عدد العناصر من الرتبة 15 في الزمرة $\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{20}$ ، ثم جد عدد الزمر الجزئية الدورية من الرتبة 15.

(١٦) جد زمرة جزئية من الزمرة $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{20}$ تماثل $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$.

(١٧) أعط مثالاً لزمرة غير دورية G بحيث يكون $o(a) = 5$ لكل $e \neq a \in G$.

(١٨) أكتب كل من U_{105} و U_{165} على صورة ضرب مباشر لزمر دورية .

(١٩) ما هي أعلى رتبة لعناصر U_{900} ؟

(٢٠) أثبت أن $U_{75} \cong U_{55}$ وأن $U_{140} \cong U_{144}$.

(٢١) جد عدداً صحيحاً n بحيث تحتوي U_n على زمرة جزئية تماثل $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$.

(٢٢) جد عدداً صحيحاً n بحيث تحتوي U_n على زمرة جزئية تماثل $\mathbb{Z}_{14}$.

(٢٣) إذا كانت G زمرة إبدالية من الرتبة 15 فأثبت أن G يجب أن تكون دورية.

(٢٤) إذا كانت G زمرة إبدالية من الرتبة 455 فأثبت أن G يجب أن تكون دورية.

(٢٥) إذا كانت G زمرة إبدالية من الرتبة n وكان m يقسم n فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة m .

(٢٦) إذا كان $n = p_1 p_2 \dots p_t$ حيث p_i أعداد أولية مختلفة وكانت G زمرة إبدالية رتبتها n فأثبت أن G دورية .

(٢٧) لتكن G زمرة إبدالية . ولتكن $H = \{e\} \cup \{x \in G : o(x) = n\}$. إذا كان n عدداً أولياً فأثبت أن $H \leq G$. هل تبقى H زمرة جزئية إذا لم يكن n أولياً؟

(٢٨) لتكن G زمرة إبدالية منتهية . أثبت أن G ليست دورية إذا وفقط إذا كانت G تحتوي على زمرة جزئية تماثل $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ حيث p عدد أولي .

(٢٩) إذا كانت G زمرة إبدالية رتبتها p^n حيث p عدد أولي فأثبت أن رتبة كل من عناصرها قوة للعدد p .

(٣٠) هل يبقى التمرين (٢٩) صحيحاً إذا كانت G غير إبدالية ؟

(٣١) إذا كانت كل من G, H, K زمر إبدالية منتهية وكان $G \times K \cong H \times K$ فأثبت أن $G \cong H$.

(٣٢) إذا كانت G زمرة غير قابلة للإختزال جزئياً فأثبت أن G غير متحللة (أنظر تمرين (٢٢) من تمارين (٣ , ٣)) .

(٣٣) هل عكس التمرين (٣٢) صحيحاً دائماً ؟

(٣٤) أثبت أن كل من الزمر D_4 , Q_8 , A_4 غير متحللة .

(٣٥) إذا كان $K , H \leq G$ حيث $G = HK$ ، $H \cap K = \{e\}$ و $hk = kh$ لكل $h \in H$ و $k \in K$ فأثبت أن $G = H \times K$.

(٣٦) إذا كانت G زمرة منتهية وكان $H \lhd G$ ، $K \lhd G$ ، وكان $|G| = |H||K|$ وكان $H \cap K = \{e\}$ فأثبت أن $G = H \times K$.

(٣٧) إذا كانت G زمرة منتهية وكان $H \lhd G$ ، $K \lhd G$ وكان $|G| = |H||K|$ و $G = HK$ فأثبت أن $G = H \times K$.

(٣٨) أعط مثالاً على زمرة G وزمر جزئية ناظمية H_1 , H_2 , H_3 من G حيث $G = H_1H_2H_3$ و $H_i \cap H_j = \{e\}$ لكل $i \neq j$ ولكن $G \ncong H_1 \times H_2 \times H_3$.

(٣٩) إذا كانت G زمرة وكانت $G_1 = \{ (a , a) : a \in G \}$ فأثبت أن :

(أ) $G_1 \cong G$.

(ب) $G_1 \lhd G \times G$ إذا وفقط إذا كانت G إبدالية .

(ج) إذا كانت $G = (\mathbb{R} ,+)$ فكيف تصف G_1؟

(٤٠) إذا كانت كل من G و H زمرة إبدالية وكان $n \in \mathbb{Z}^+$ فأثبت أن $n (G \times H) = nG \times nH$

(أنظر تمرين (٣٨) من تمارين (٢،٢)) .

(٤١) بين أياً من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :

(أ) $(\mathbb{Z} ,+)$ متحللة .

(ب) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ دورية .

(ت) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{15} \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$.

(ث) $D_{12} \cong \mathbb{Z}_3 \times D_4$.

(ج) إذا كان $a = ([2],[3],(1 \ \ 2 \ \ 3) \circ (1 \ \ 5)) \in U_{15} \times \mathbb{Z}_{10} \times S_5$ فإن $o(a) = 20$.

(ح) إذا كانت G زمرة إبدالية حيث العدد 5 يقسم رتبة G فإن G تحتوي على زمرة جزئية دورية رتبتها 5 .

(خ) إذا كانت G زمرة إبدالية حيث العدد 4 يقسم رتبة G فإن G تحتوي على زمرة جزئية دورية رتبتها 4 .

(د) إذا كانت G زمرة إبدالية حيث العدد 6 يقسم رتبة G فإن G تحتوي على زمرة جزئية دورية رتبتها 6 .

(ذ) إذا كانت G زمرة إبدالية من الرتبة 72 فإن G تحتوي على زمرة جزئية رتبتها 8.

(ر) إذا كانت G زمرة إبدالية من الرتبة 72 فإن G تحتوي على زمرة جزئية وحيدة رتبتها 4 .

(ز) إذا كانت G زمرة وكان $x \in G$ فإن $Z(G)\langle x\rangle \leq G$.

(س) إذا كانت $H, K \leq G$ حيث $G = HK$ وكان $hk \in G$ فإن $o(hk) = \mathrm{lcm}\,(o(h), o(k))$.

(٣,٥) زمر خارج القسمة
Quotient Groups

إذا كانت G زمرة وكانت $H \leq G$ وكانت $G/H = \{aH : a \in G\}$ فإننا نود أن نعرف عملية ثنائية على G/H بحيث نحصل على زمرة . والتعريف الطبيعي المرشح للعملية الثنائية هو: $(aH)(bH) = (ab)H$ لكل $a, b \in G$.

إن أول شيء يجب علينا القيام به هو اختبار ما إذا كان هذا التعريف يزودنا بالفعل بعملية ثنائية على G/H. أي أنه يعرف لنا تطبيقاً من $G/H \times G/H$ إلى G/H. ولكن للأسف إن هذا ليس صحيحاً لجميع الزمر الجزئية H. على سبيل المثال ، إذا كانت $G = S_3$ وكانت $H = \langle (1\ 2)\rangle$ فإن:

$$(1\ 3) \circ H = (1\ 2\ 3) \circ H = \{(1\ 3), (1\ 2\ 3)\}$$
$$(2\ 3) \circ H = (1\ 3\ 2) \circ H = \{(2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

ولكن

$$[(1\ 3) \circ (2\ 3)] \circ H = (1\ 3\ 2) \circ H \neq [(1\ 2\ 3) \circ (1\ 3\ 2)] \circ H = H.$$

وللخروج من هذا المأزق ، لابد لنا من البحث عن شروط مناسبة نقيد بها الزمرة الجزئية H لنحصل على زمرة G/H. ولحسن الحظ فإن هذا القيد متوفر لدينا ونقدمه في المبرهنة التالية :

مبرهنة (٣,٤٣)

إذا كانت $H \leq G$ فإن $(aH)(bH) = (ab)H$ عملية ثنائية على G/H إذا وفقط إذا كانت $H \lhd G$.

البرهان

لنفرض أولاً أن $(aH)(bH)=(abH)$ معرفة تعريفاً حسناً (أي أنها عملية ثنائية) . سنبرهن أن $aH=Ha$ لكل $a\in G$. نفرض إذن ، أن $x\in aH$. عندئذ ، $xH=aH$. وبما أن العملية معرفة تعريفاً حسناً فإن : $(xH)(a^{-1}H)=(aH)(a^{-1}H)$ ولذا فإن $xa^{-1}H=H$. أي أن $xa^{-1}\in H$. ومنه فإن $x\in Ha$. ومن ناحية أخرى ، إذا كان $x\in Ha$ فإن $x=ha$ حيث $h\in H$. ولذا فإن $x^{-1}=a^{-1}h^{-1}\in a^{-1}H$. أي أن $x^{-1}H=a^{-1}H$. وبما أن العملية معرفة تعريفاً حسناً فإن :

$(x^{-1}H)(aH)=(a^{-1}H)(aH)$. ولذا فإن $x^{-1}aH=H$. أي أن $x^{-1}a\in H$. ومنه فإن $x\in aH$. إذن ، $aH=Ha$. وبالتالي فإن $H\lhd G$.

ولبرهان العكس ، نفرض أن $H\lhd G$ وأن $aH=xH$ و $bH=yH$. عندئذ ، $a=xh_1$ و $b=yh_2$ حيث $h_1,h_2\in H$. وبما أن $H\lhd G$ فإن $y^{-1}h_1yh_2\in H$. إذن ،

$$(xy)^{-1}(ab)=y^{-1}x^{-1}ab=y^{-1}x^{-1}xh_1yh_2=y^{-1}h_1yh_2\in H$$

ولذا فإن $xyH=abH$. أي أن العملية معرفة تعريفاً حسناً ◆

مبرهنة (٣,٤٤)

إذا كانت $H\lhd G$ فإن :

(أ) $G/H=\{aH:a\in G\}$ زمرة حيث $(aH)(bH)=(ab)H$.

(ب) إذا كانت G إبدالية فإن G/H إبدالية .

(ج) إذا كانت $G=\langle x\rangle$ دورية فإن $G/H=\langle xH\rangle$ دورية .

(د) إذا كانت G منتهية فإن $|G/H|=\dfrac{|G|}{|H|}$.

البرهان

(أ) إذا كان $aH,bH,cH\in G/H$ فإن :

$$\begin{aligned}[(aH)(bH)](cH)&=[(ab)H](cH)=[(ab)c]H=[(a(bc)]H\\&=(aH)[(bc)H]=(aH)[(bH)(cH)]\end{aligned}$$

ولذا فإن العملية تجميعية .

العنصر المحايد هو $eH = H$ لأنه لكل $a \in G$ لدينا :

$$(aH)(eH) = (ae)H = aH = (ea)H = (eH)(aH) .$$

وأخيراً فإن نظير العنصر aH هو $a^{-1}H$ لأن :

$$(aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = (aa^{-1})H = (aH)(a^{-1}H)$$

إذن ، G/H زمرة .

(ب) إذا كانت G إبدالية وكان $a, b \in G$ فإن :

$$(aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH)$$

ولذا فإن G/H إبدالية .

(ج) لنفرض أن $G = \langle x \rangle$. ولنفرض أن $aH \in G/H$. وبما أن $a \in G$ فإن $a = x^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}$. إذن ، $aH = x^n H = (xH)^n$. وبالتالي فإن $G/H = \langle xH \rangle$. أي أن G/H دورية.

(د) بما أن $|G/H| = [G : H]$ فإننا نجد مباشرة أن $|G/H| = \dfrac{|G|}{|H|}$ ◆

تعريف (٣,١٠)

تسمى الزمرة G/H في المبرهنة (٣,٤٤) زمرة خارج القسمة للزمرة G على H (**quotient group (or factor group) of** G **by** H) .

إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $\{e\} \neq H \lhd G$ فإن رتبة زمرة خارج القسمة G/H أصغر من رتبة G ، وفي العادة يكون تركيب زمرة خارج القسمة أبسط من تركيب الزمرة G مع أن G/H تشبه في كثير من الأوقات G ، فمثلاً G/H إبدالية (دورية) إذا كانت G كذلك . لذا ، فإن أهمية زمرة خارج القسمة تكمن في استطاعتنا الحصول على بعض الخواص الهامة للزمرة G بدراسة الزمرة الأبسط G/H . وهذا ما سنلاحظه الآن وفي بقية فصول الكتاب . وقبل تقديم بعض هذه التطبيقات ، دعنا نبين ببعض الأمثلة كيفية حساب زمر خارج القسمة .

مثال (٣,٥١)

في هذا المثال نجد عناصر الزمرة $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. إنه ليس من الصعب أن يقنع القارئ نفسه بأن المجموعات المشاركة المختلفة للزمرة $6\mathbb{Z}$ في $\mathbb{Z}$ هي : $6\mathbb{Z}, 1+6\mathbb{Z}, 2+6\mathbb{Z}, 3+6\mathbb{Z}, 4+6\mathbb{Z}, 5+6\mathbb{Z}$.

وجدول كيلي لهذه الزمرة هو :

	$6\mathbb{Z}$	$1+6\mathbb{Z}$	$2+6\mathbb{Z}$	$3+6\mathbb{Z}$	$4+6\mathbb{Z}$	$5+6\mathbb{Z}$
$6\mathbb{Z}$	$6\mathbb{Z}$	$1+6\mathbb{Z}$	$2+6\mathbb{Z}$	$3+6\mathbb{Z}$	$4+6\mathbb{Z}$	$5+6\mathbb{Z}$
$1+6\mathbb{Z}$	$1+6\mathbb{Z}$	$2+6\mathbb{Z}$	$3+6\mathbb{Z}$	$4+6\mathbb{Z}$	$5+6\mathbb{Z}$	$6\mathbb{Z}$
$2+6\mathbb{Z}$	$2+6\mathbb{Z}$	$3+6\mathbb{Z}$	$4+6\mathbb{Z}$	$5+6\mathbb{Z}$	$6\mathbb{Z}$	$1+6\mathbb{Z}$
$3+6\mathbb{Z}$	$3+6\mathbb{Z}$	$4+6\mathbb{Z}$	$5+6\mathbb{Z}$	$6\mathbb{Z}$	$1+6\mathbb{Z}$	$2+6\mathbb{Z}$
$4+6\mathbb{Z}$	$4+6\mathbb{Z}$	$5+6\mathbb{Z}$	$6\mathbb{Z}$	$1+6\mathbb{Z}$	$2+6\mathbb{Z}$	$3+6\mathbb{Z}$
$5+6\mathbb{Z}$	$5+6\mathbb{Z}$	$6\mathbb{Z}$	$1+6\mathbb{Z}$	$2+6\mathbb{Z}$	$3+6\mathbb{Z}$	$4+6\mathbb{Z}$

ومن الواضح أن التطبيق $\varphi : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$ المعرف بالقاعدة $\varphi(a+6\mathbb{Z}) = [a]$ تماثل . وبالتالي فإن $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_6$ □

مثال (٣,٥٢)

لتكن $G = \mathbb{Z}_{18}$ ولتكن $H = \langle [6] \rangle$. بما أن $H = \{[0],[6],[12]\}$ فإن $|G/H| = 6$. وبما أن $G = \langle [1] \rangle$ دورية فإن $G/H = \langle [1]+H \rangle$. ولذا باستخدام المبرهنة (٣,٤٢) نجد أن $G/H \cong \mathbb{Z}_6$. كما أن : $G/H = \{H,[1]+H,[2]+H,[3]+H,[4]+H,[5]+H\}$ □

مثال (٣,٥٣)

لتكن $G = Q_8$ و $H = \langle a^2 \rangle = \{e,a^2\}$. عندئذ، $H \lhd G$ وأن Q_8/H زمرة رتبتها 4. ولذا فإن $Q_8/H \cong \mathbb{Z}_4$ أو $Q_8/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. لاحظ أن Q_8/H هي :

$$\{H = a^2H = \{e,a^2\},\ aH = a^3H = \{a,a^3\},\ bH = a^2bH = \{b,a^2b\},$$
$$abH = a^3bH = \{ab,a^3b\}\}$$

كما أن : $(aH)^2 = a^2H = H$ ، $(bH)^2 = b^2H = a^2H = H$ ،
$(abH)^2 = (ab)^2H = a^2H = H$.

إذن ، رتبة كل من عناصرها (عدا المحايد) هو 2 . ولذا فإن $Q_8/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ □

مثال (٣,٥٤)

لتكن $G = A_4$ و $H = \{e,(1\ 2)\circ(3\ 4),(2\ 3)\circ(1\ 4),(1\ 3)\circ(2\ 4)\}$. بما أن $|G/H| = 3$ فإن G/H دورية ولذا فإن $G/H \cong \mathbb{Z}_3$ □

مثال (٣,٥٥)

لتكن $G = \mathbb{Z}_2 \times S_3$ ولتكن $H = \langle ([1],(1\ 2\ 3)) \rangle$. إذن ،

$H=\{([0],e),([1],(1\ 2\ 3)),([0],(1\ 3\ 2)),([1],e),([0],(1\ 2\ 3)),([1],(1\ 3\ 2))\}$.

ولذا فإن $|G/H|=2$. أي أن $G/H\cong\mathbb{Z}_2$ □

مثال (٣,٥٦)

إذا كانت $H=\langle([1],[1])\rangle\leq\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$ فإن :

$H=\{([0],[0])\ ,\ ([1],[1])\ ,([2],[2])\ ,([3],[3])\}$.

ولذا فــإن $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4/H$ زمــرة مــن الرتبــة 4. إذن ، إمــا أن $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4/H\cong\mathbb{Z}_4$ أو أن $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4/H\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. وبمــا أن $([0],[1])+H$ عنــصر مــن الرتبــة 4 فــإن $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4/H\cong\mathbb{Z}_4$ □

مثال(٣,٥٧)

إذا كانت $H=\langle([4],[4])\rangle\leq\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_8$ فإن :

$H=\{([0],[0]),([4],[4]),([2],[0]),([0],[4]),([4],[0]),([2],[4])\}$

ولذا فإن $\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_8/H$ زمرة إبداليــة رتبتــها 8. ومــن ثم فإنهــا تماثــل $\mathbb{Z}_8$ أو $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$ أو $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. ولكن $([0],[3])+H$ عنصر من الرتبة 8 ولذا فإن $\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_8/H\cong\mathbb{Z}_8$ □

مثال(٣,٥٨)

إذا كانت $H=\langle([0],[4])\rangle\leq\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6$ فإن $|H|=3$. ولذا فإن $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6/H$ زمرة إبدالية من الرتبة 8 . وبحساب بسيط نجد أن $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6/H$ لا تحتوي على عنصر رتبته 8 وليست جميــع عناصرها من الرتبة 2. إذن ، $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6/H\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$ □

مثال (٣،٥٩)

إذا كانت $H=\langle([3],[2])\rangle\leq\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_8$ فإن $|H|=4$. ولذا فإن $\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_8/H$ زمرة إبداليــة من الرتبة 12. إذن فهي تماثل $\mathbb{Z}_{12}$ أو $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. ولكن $([0],[2])+H$ عنصر رتبتــه 4. وبالتالي فإن $\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_8/H\cong\mathbb{Z}_{12}$ □

مثال (٣,٦٠)

لتكن $H=\{[1],[17]\}\leq U_{32}$. لاحظ أن $U_{32}\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_8$. ولذا فإن U_{32}/H زمرة إبداليــة من الــرتبة 8 . بما أن $([3]H)^2=[9]H\neq H$ فإن $o([3]H)\neq 2$. ولــذا فــإن U_{32}/H

لا تماثل $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. كذلك من السهل أن نرى أن $o([7]H) = o([9]H) = 2$. ولـذا فإنها تحتوي على زمرتين دوريتين من الرتبة 2 . ومن ثم فإنها لا يمكن أن تماثل $\mathbb{Z}_8$. إذن ،

$$U_{32}/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \quad \square$$

مثال (٣,٦١)

إذا كانت $H = \{[1],[15]\} \le U_{32}$ فإن $|U_{32}/H| = 8$. ولما كانت U_{32}/H إبداليـة وكـان $([3]H)^4 = [81]H = [17]H \ne H$ فإن $o([3]H) = 8$. وبالتالي فإن $U_{32}/H \cong \mathbb{Z}_8$ $\square$

نقدم الآن بعض التطبيقات التي توضح لنا كيفية استخلاص بعض خواص زمـرة G مـن خواص زمرة خارج القسمة G/H .

مبرهنة (٣,٤٥)

إذا كانت G زمرة حيث $G/Z(G)$ دورية فإن G إبدالية .

البرهان

لنفرض أن $G/Z(G) = \langle xZ(G) \rangle$. ولنفرض أن $a,b \in G$. عندئذ ، يوجد $m,n \in \mathbb{Z}$ حيث: $aZ(G) = (xZ(G))^m = x^m Z(G)$ و $bZ(G) = (xZ(G))^n = x^n Z(G)$.ولذا فإنه يوجـد $g,h \in Z(G)$ حيث $a = x^m g$ و $b = x^n h$. إذن ،

$$\begin{aligned} ab &= (x^m g)(x^n h) = x^m (g x^n) h = x^m (x^n g) h \\ &= (x^m x^n)(gh) = (x^n x^m)(hg) = (x^n h)(x^m g) = ba \end{aligned}$$

وبالتالي فإن G إبدالية ◆

مبرهنة (٣,٤٦) [مبرهنة كوشي للزمر الابدالية المنتهية]

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية وكان p عدداً اولياً يقسم رتبة G فإن G تحتوي على عنصر رتبته p (وبالتالي تحتوي على زمرة جزئية رتبتها p) .

البرهان

بإستخدام الاستقراء الرياضي على $|G|$. من الواضح أن العبارة صحيحة عندما يكون $|G| = 2$.

لنفرض الأن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر الإبدالية المنتهية التي رتبها أصغر من رتبة $|G|$. سنبرهن الآن أن العبارة صحيحة للزمرة G. لاحظ أولاً أنه لابد وأن تحتوي Gعلى عنصر رتبته عدد أولي ، لأنه لو كان $a \in G$ من الرتبة n حيث n عدداً مؤلفاً فإن $n = mq$ ، qعدداً أولياً .ومن ثم فـإن $a^m \in G$ وأن $o(a^m) = \frac{n}{\gcd(m,n)} = \frac{n}{m} = q$.

لنفرض إذن أن $x \in G$ رتبته عدداً أولياً q. إذا كان $q = p$ فنكـون قد انتهينا. لنفـرض إذن ، أن $q \neq p$. ولنفرض أن $H = \langle x \rangle$. بما أن G إبدالية فإن $H \lhd G$ وأن G/H زمرة . وبمـا أن p يقسم $|G|$ فإن p يقسم $|G/H|$. وبما أن $|G/H| < |G|$ فإننا نجد باستخدام الاستقراء الرياضـي أن G/H تحتـوي على عنصر aH رتبتـه p . إذن ، $(aH)^p = a^pH = H$. ولـذا فـإن $a^p \in H$. ومنه فـإن $a^p = e$ أو أن $o(a^p) = q$ (لأن $p \neq q$). إذا كـان $a^p = e$ فـإن $a \in G$ رتبته p . أما إذا كـان $o(a^p) = q$ فـإن $(a^q)^p = (a^p)^q = e$. وبالتـالي فـإن ، $o(a^q) = p$ ◆

لقد سبق وأن برهنا (أنظر المبرهنة (٢,٢٦)) عكس مبرهنة لاجـرانج للزمـر الدوريـة ، وسنبرهنها الآن للزمر الإبدالية .

مبرهنة (٣,٤٧)

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية رتبتها n وكان m يقسم n فإن G تحتوي على زمرة جزئية مـن الرتبة m .

البرهان

بإستخدام الاستقراء الرياضي على n . من الواضح أن العبارة صحيحة عندما $n = 2$.

لنفرض الآن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر الإبدالية التي رتبتها أصغر من n. ولنفرض أن $n = ms$ وأن p عدداً اولياً يقسم m . إذن، $m = rp$ حيث $r \in \mathbb{Z}$. بإستخدام المبرهنة (٣,٤٦) نجـد ان G تحتوي على زمرة جزئية H رتبتها p . وبما أن G إبدالية فإن $H \lhd G$. الآن :

$$|G/H| = \frac{|G|}{|H|} = \frac{n}{p} = rs$$

إذن ، r يقسم $|G/H|$. ولذا بإستخدام الاستقراء نجد ان G/H تحتوي على زمرة جزئية K/H رتبتها r. وبالتالي فإن $K \leq G$ وإن $|K| = |K/H||H| = rp = m$ ◆

ندرس الآن تطبيقاً آخر على زمرة خارج القسمة .

تعريف (٣,١١)

لتكن G زمرة وليكن $a, b \in G$. يسمى العنصر $aba^{-1}b^{-1}$ مبدلاً (**commutator**) للعنصرين a و b . وإذا كانت $S = \{aba^{-1}b^{-1} : a, b \in G\}$ فإن الزمرة الجزئية $\langle S \rangle$ تسمى زمـــرة المبـــدلات (**commutator group**) أو الزمرة المشتقة (**derived group**) للزمرة G وتُكتب G' .

لاحظ ان $(aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1} \in G'$. ولذا فإن عناصر G' هي حاصل ضرب مبدلات .

تزودنا المبرهنة التالية بالخواص الأساسية للزمرة G' .

مبرهنة (٣,٤٨)

(أ) $G' \lhd G$ (ب) G/G' زمرة إبدالية

(ج) إذا كان $H \leq G$ فإن $G' \subseteq H$ إذا وفقط إذا كانت $H \lhd G$ وكانت G/H إبدالية .

البرهان

(أ) لنفرض ان $x \in G$ وأن $h \in G'$. لاحظ أولاً انه إذا كان $h = aba^{-1}b^{-1}$ فإن :

$$x^{-1}hx = x^{-1}aba^{-1}b^{-1}x = (x^{-1}aba^{-1})(e)(b^{-1}x) = (x^{-1}aba^{-1})(xb^{-1}bx^{-1})(b^{-1}x)$$
$$= ((x^{-1}a)b(x^{-1}a)^{-1}b^{-1})(bx^{-1}b^{-1}x) \in G'$$

لنفرض الآن أن $h = c_1c_2 \dots c_k$ حيث c_i مبدلات . عندئذ ،

$$x^{-1}hx = x^{-1}(c_1c_2 \dots c_k)x = (x^{-1}c_1x)(x^{-1}c_2x) \dots (x^{-1}c_kx) \in G'$$

وذلك لأن كل من $x^{-1}c_kx \in G'$. إذن ، $G' \lhd G$.

(ب) لنفـــرض أن $a, b \in G$. عندئـــذ ، $(ba)^{-1}ab = a^{-1}b^{-1}ab \in G'$. ولـــذا فـــإن $abG' = baG'$. أي أن $(aG')(bG') = (bG')(aG')$. إذن، G/G' إبدالية .

(ج) لنفرض أولاً أن $G' \subseteq H$. ولنفرض أن $a \in G$ و $h \in H$. عندئذ ، $aha^{-1}h^{-1} \in G'$. ولذا فإن $aha^{-1}h^{-1} \in H$. ومنه فإن $aha^{-1} = (aha^{-1}h^{-1})h \in H$. إذن ، $H \lhd G$. ولإثبات أن G/H إبدالية ، نفرض أن $aH, bH \in G/H$. عندئذ :

$(aH)(bH)(aH)^{-1}(bH)^{-1} = aba^{-1}b^{-1}H$. وبما أن $aba^{-1}b^{-1} \in G' \subseteq H$ فإن :

$(aH)(bH)(aH)^{-1}(bH)^{-1} = H$. ولذا فإن : $(aH)(bH) = (bH)(aH)$.

ولبرهان العكس ، نفرض أن $H \lhd G$ وان G/H إبدالية . إذن ، لكل $a, b \in G$ لدينا :

$(aH)(bH) = (bH)(aH)$. ومنه فإن $a^{-1}b^{-1}ab \in H$. وبالتالي فإن $G' \subseteq H$ ◆

نتيجة (٣,٤٩)

G إبدالية إذا وفقط إذا كانت $G' = \{e\}$.

البرهان

بما أن $\{e\} \lhd G$ فإنه بإستخدام المبرهنة (٣,٤٨) نجد أن $G/\{e\} \cong G$ إبدالية إذا وفقط إذا كانت $G' \subseteq \{e\}$ ◆

مثال (٣,٦٢)

عين الزمرة المشتقة D_4' .

الحل

لاحظ أن $D_4 = \langle a, b \rangle$ حيث $a^4 = e$ ، $b^2 = e$ و $ba = a^{-1}b$. ومن السهل أن نرى أن $H = \{e, a^2\} \lhd D_4$. إذن ، D_4/H زمرة من الرتبة 4 . ولذا فهي إبدالية . ومن ثم فإن $D_4' \subseteq H$. إذن ، $D_4' = \{e\}$ أو $D_4' = H$. وبما أن D_4 ليست إبدالية فإن $D_4' \neq \{e\}$ وبالتالي فإن ، $D_4' = H$ □

لقد بينا في المثال (٣,٤١) أنه إذا كان $\varphi : G \to H$ تشاكل فإن $\mathrm{Ker}\varphi \lhd G$ ، ووعدنا بأن نبرهن أن العكس صحيح أيضاً ، سنفي الآن بهذا الوعد .

مبرهنة (٣,٥٠)

إذا كانت $K \lhd G$ فإنه يوجد تشاكل مجاله G ونواته K .

البرهان

بما أن $K \lhd G$ فإن G/K زمرة . ليكن $\pi : G \to G/K$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\pi(a) = aK$ لكل $a \in G$. من الواضح أن π تشاكل (وفي الحقيقة غامر) . الآن :

$$a \in \mathrm{Ker}\pi \Leftrightarrow \pi(a) = aK = K \Leftrightarrow a \in K$$

إذن ، $\mathrm{Ker}\varphi = K$ ◆

تعريف (٣,١٢)

يسمى التشاكل الغامر π في المبرهنة (٣,٥٠) التشاكل الطبيعي الغامر(**natural epimorphism**).

(٣,٥,١) تمارين محلولة **(Solved Exerises)**

تمرين (١)

إذا كانت $G=\mathbb{Z}_4\times U_4$ ، $H=\langle([2],[3])\rangle$ و $K=\langle([2],[1])\rangle$ فأثبت أن $H\cong K$ ولكن $G/H\ncong G/K$.

الحل

من الواضح أن $|H|=|K|=2$. ولذا فإن $H\cong K$. الآن ، G/H زمرة إبدالية من الرتبة 4 وأن $(([1],[1])H)^4=([0],[1])H=H$ ولذا فإن G/H دورية . أي أن $G/H\cong\mathbb{Z}_4$. كما أن G/K زمرة إبدالية من الرتبة 4 أيضاً وجميع عناصرها (عدا المحايد) من الرتبة 2 . ولذا فإن $G/K\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. وبالتالي فإن $H\cong K$ ولكن $G/H\ncong G/K$ Δ

تمرين (٢)

لتكن G زمرة منتهية غير إبدالية من الرتبة p^3 حيث p عدد أولي وليكن $Z(G)\neq\{e\}$. أثبت أن $Z(G)$ زمرة دورية .

الحل

بما أن $Z(G)\lhd G$ فإن $|Z(G)|$ يقسم $|G|$. ولذا فإن $|Z(G)|=p$ أو أن $|Z(G)|=p^2$. إذا كان $|Z(G)|=p^2$ فإن $|G/Z(G)|=p$. ولذا فإن $G/Z(G)$ زمرة دورية . ومنه فإن G إبدالية وهذا مستحيل . إذن ، $|Z(G)|=p$. وبالتالي فإن $Z(G)\cong\mathbb{Z}_p$ Δ

تمرين (٣)

لتكن G زمرة منتهية ولتكن $H\lhd G$ وليكن $x\in G$ حيث $\gcd(o(x),|G/H|)=1$. أثبت أن $x\in H$.

الحل

بما أن $\gcd(o(x),|G/H|)=1$ فإن $\gcd(o(xH),|G/H|)=1$. ولكن $o(xH)$ يقسم $|G/H|$. ولذا فإن $o(xH)=1$ ومنه فإن $xH=H$. وبالتالي فإن $x\in H$ Δ

تمرين (٤)

إذا كانت $G = A_5$ فأثبت أن G لا تحتوي على أي زمرة جزئية ناظمية من الرتب $3,5,6,10,12,15,20,30$.

الحل

لاحظ أولاً أن A_5 تحتوي على 24 عنصراً من الرتبة 5، 20 عنصراً من الرتبة 3، 15عنصراً من الرتبة 2 والعنصر المحايد.

لنفرض الآن أن $H \lhd G$ حيث $|H| = 3,6,12,15$. عندئذ، $|G/H| = 20,10,5,4$. ولنفرض أن $x \in G$ حيث $o(x) = 3$.. بما أن $\gcd(o(x),|G/H|) = 1$ فإننا نجد باستخدام التمرين (٣) أن $x \in H$. وبالتالي فإن H تحتوي على جميع عناصر G من الرتبة 3. أي أن $|H| \geq 21$ وهذا تناقض. لنفرض الآن أن $H \lhd G$ حيث $|H| = 5,10,20$. ولهذا فإن $|G/H| = 12,6,3$. ليكن $x \in G$ حيث $o(x) = 5$.. بما أن $\gcd(o(x),|G/H|) = 1$ فإن $x \in H$. ولذا فإن $|H| \geq 25$ وهذا مستحيل. وأخيراً نفرض أن $H \lhd G$ حيث $|H| = 30$. عندئذ، $|G/H| = 2$. إذا كان $x \in G$ حيث $o(x) = 3$ أو $o(x) = 5$ فإن $\gcd(o(x),|G/H|) = 1$. ولهذا فإن $x \in H$. أي أن $|H| \geq 20 + 24 + 1 = 45$ وهذا مستحيل Δ

تمارين (٣,٥)

في التمارين من (١) إلى (١٣) استخدم المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية لتصنيف زمرة خارج القسمة المبينة :

(١) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 / \langle([0],[1])\rangle$ (٢) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 / \langle([0],[2])\rangle$

(٣) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 / \langle([2],[3])\rangle$ (٤) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 / \langle([0],[1])\rangle$

(٥) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 / \langle([0],[2])\rangle$ (٦) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 / \langle([1],[2])\rangle$

(٧) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8 / \langle([1],[2])\rangle$ (٨) $U_{32} / \{[1],[15]\}$

(٩) $\mathbb{Z}_4 \times U_4 / H$ حيث $H = \langle([2],[3])\rangle$ (١٠) $\mathbb{Z}_4 \times U_4 / H$ حيث $H = \langle([2],[1])\rangle$

(١١) $\mathbb{Z}_{10} \times U_{10} / H$ حيث $H = \langle([2],[9])\rangle$ (١٢) U_{32} / H حيث $H = \{[1],[31]\}$

(١٣) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \langle([0],[1])\rangle$

(١٤) هل $(\mathbb{Q},+)/(\mathbb{Z},+) \cong (\mathbb{Q},+)$؟

(١٥) إذا كانت G_1 و G_2 زمرتين فأثبت أن $Z(G_1 \times G_2) = Z(G_1) \times Z(G_2)$.

(١٦) جد مركز كل من الزمر التالية : D_4 ، Q_8 ، T ، $S_3 \times \mathbb{Z}_4$ ، $S_3 \times D_4$.

(١٧) جد الزمرة المشتقة لكل الزمر التالية : Q_8 ، $GL(2,\mathbb{R})$.

(١٨) إذا كانت $G = \langle (1\ 2) \circ (3\ 4), (1\ 2\ 3) \rangle \leq S_4$ فأثبت أن :

(أ) $H = \langle (1\ 2) \circ (3\ 4), (1\ 3) \circ (2\ 4) \rangle \lhd G$ (ب) $G/H \cong \mathbb{Z}_3$

(ج) $K = \langle (1\ 2) \circ (3\ 4) \rangle \lhd H$ (د) هل $K \lhd G$ ؟

(١٩) إذا كانت $G = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (2\ 5) \circ (3\ 4) \rangle \leq S_5$ فأثبت أن :

(أ) $H = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \rangle \lhd G$ (ب) $G/H \cong \mathbb{Z}_2$ (ج) $G \cong D_5$

(٢٠) إذا كانت $H \lhd G$ وكان $[G:H] = n$ فأثبت أن $a^n \in H$ لكل $a \in G$.

(٢١) إذا كانت $H \leq G$ حيث $x^2 \in H$ لكل $x \in G$ فأثبت أن $H \lhd G$ وأن G/H إبدالية.

(٢٢) لتكن G زمرة . ولنرمز للمبدل $aba^{-1}b^{-1}$ بالرمز $[a,b]$.

(أ) أثبت أن $[a,xy] = [a,x]x[a,y]x^{-1}$ لكل $a,b,x \in G$.

(ب) إذا كان $G' \subseteq Z(G)$ وكان $a \in G$ فأثبت أن التطبيق $\varphi : G \to G$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x) = [a,x]$ تشاكل .

(ج) جد $\operatorname{Ker}\varphi$.

(٢٣) إذا كانت $H \lhd G$ حيث $H \cap G' = \{e\}$ فأثبت أن :

(أ) $H \subseteq Z(G)$ (ب) $Z(G/H) = Z(G)/H$

(٢٤) إذا كان $H \lhd G = \langle S \rangle$ فأثبت أن $G/H = \langle xH : x \in S \rangle$.

(٢٥) إذا كانت $H \lhd G$ ، $K \lhd G$ ، $G = HK$ وكانت $H \cap K = N$ فأثبت أن $G/N \cong H/N \times K/N$.

(٢٦) هل نتيجة التمرين (٢٥) صحيحة إذا لم تكن K ناظمية من G ؟

(٢٧) إذا كانت G زمرة غير إبدالية من الرتبة pq حيث p و q عددان أوليان مختلفان فأثبت أن $Z(G) = \{e\}$.

(٢٨) إذا كانت $G = H \times K$ من حيث $K \lhd G$ و $H \lhd G$ فأثبت أن $G/H \cong K$ وأن $G/K \cong H$.

(٢٩) إذا كانت $H_1, H_2, \ldots, H_n$ زمر جزئية ناظمية من G حيث $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n = \{e\}$ فأثبت أنه يوجد تشاكل أحادي $\varphi : G \to G/H_1 \times \ldots \times G/H_n$.

(٣٠) لتكن G زمرة إبدالية ولتكن $H \leq G$. ولنفرض أنه لكل $h \in H$ ولكل $n \in \mathbb{Z}^+$ يكون للمعادلة $x^n = h$ حل في G إذا وفقط إذا كان لها حل في H .

(أ) إذا كانت $xH \in G/H$ فأثبت أنه يوجد $y \in xH$ حيث $o(y) = o(xH)$.

(ب) إذا كانت G/H دورية فأثبت أنه يوجد زمرة جزئية K من G حيث $G = H \times K$.

(٣١) لتكن $N \lhd G$ ولتكن $H \leq G$ حيث $N \subseteq H$. أثبت أن $H/N \lhd G/N$ إذا وفقط إذا كانت $H \lhd G$.

(٣٢) لتكن G زمرة إبدالية منتهية ولتكن كل من H و K زمرة جزئية من G حيث $|H| = m$ و $|K| = n$. إذا كان $d = \operatorname{lcm}(m,n)$ فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة d .

(٣٣) لتكن G زمرة إبدالية منتهية وليكن n يقسم $|G|$. أثبت أن عدد حلول المعادلة $x^n = e$ يجب أن يكون مضاعفاً للعدد n .

(٣٤) بين أياً من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :

(أ) إذا كانت $H \leq Z(G) \leq G$ حيث G/H دورية فإن G إبدالية .

(ب) إذا كانت $G/Z(G)$ دورية فإن $G/Z(G)$ هي الزمرة التافهة .

(ت) إذا كانت $G = U_{16}$ ، $H = \{[1],[15]\}$ و $K = \{[1],[9]\}$ فإن $G/H \cong G/K$.

(ث) $S_3' \subseteq A_3$ (ج) $|A_4'| = 3$ (ح) $D_4 / Z(D_4) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

(خ) إذا كانت G ليست دورية وكان $H \lhd G$ فإن G/H ليست دورية .

(د) $(\mathbb{R},+)/n\mathbb{R} = \{0\}$ (ذ) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \left\{\frac{a}{b} + \mathbb{Z} : 1 < a < b\right\}$.

(ر) إذا كانت $H \lhd G$ وكانت G/H زمرة منتهية فإن G زمرة منتهية .

(ز) إذا كانت $H \lhd G$ وكان $a, b \in G$ حيث $aH = bH$ فإن $o(a) = o(b)$.

(٣,٦) مبرهنات التماثل
Isomorphism Theorems

لقد بينا في المثال (٣,٤١) أنه إذا كان $\varphi : G_1 \to G_2$ تشاكل فإن $\operatorname{Ker}\varphi \lhd G_1$. كما بينا في المبرهنة (٣,٥٠) أن أي تشاكل يجب أن يكون على الصورة أعلاه . أي إذا كانت $K \lhd G$

فإنه يوجد تشاكل مجاله G بحيث تكون K نواة هذا التشاكل . ولاحظنا أيضاً أن صورة G التشاكلية هي زمرة خارج القسمة G/K.

في هذا البند ، نقوم بتعميم ذلك بتقديم مبرهنات يطلق عليها مبرهنات التماثل. ونلفت نظر القارئ إلى أن هذه المبرهنات صحيحة لأي نظام رياضي وليست قاصرة على الزمر . أولى هذه المبرهنات تعرف باسم مبرهنة التماثل الأولى (**first isomorphism theorm**) .كما تسمى أيضاً المبرهنة الأساسية للتشاكلات (**the fundamental theorem of homomorphisms**).

مبرهنة (٣,٥١) [مبرهنة التماثل الأولى]

إذا كان $\varphi : G_1 \to G_2$ تشاكلاً فإن $G_1/\mathrm{Ker}\varphi \cong \varphi(G_1)$.

البرهان

لنفرض أن $K = \mathrm{Ker}\varphi$. ليكن $\psi : G_1/K \to G_2$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\psi(aK) = \varphi(a)$ لكل $a \in G_1$. نبرهن أولاً أن ψ معرف تعريفاً حسناً . لنفرض إذن أن $aK = bK$. عندئذ ، $a = bk$ حيث $k \in K$. الآن :

$$\psi(aK) = \varphi(a) = \varphi(bk) = \varphi(b)\varphi(k) = \varphi(b)e_2 = \varphi(b) = \psi(bK).$$

إذن ، ψ حسن التعريف . كما أن ψ تشاكل لأن :

$$\psi(aKbK) = \psi(abK) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \psi(aK)\psi(bK).$$

وأخيراً ψ أحادي لأن :

$$aK \in \mathrm{Ker}\psi \Rightarrow \psi(aK) = e_2 \Rightarrow \varphi(a) = e_2 \Rightarrow a \in \mathrm{Ker}\varphi = K \Rightarrow aK = K$$

إذن ، $\mathrm{Ker}\psi = \{K\}$. ومن ثم فإن ψ أحادي . وبالتالي فإن $G_1/K \cong \varphi(G_1)$ ◆

نتيجة (٣,٥٢)

إذا كان $\varphi : G_1 \to G_2$ تشاكل غامر فإن $G_1/\mathrm{Ker}\varphi \cong G_2$.

البرهان

بإستخدام المبرهنة الأولى للتماثل $G_1/\mathrm{Ker}\varphi \cong \varphi(G_1)$. وبما أن φ غامر فإن $\varphi(G_1) = G_2$ وبالتالي فإن $G_1/\mathrm{Ker}\varphi \cong G_2$ ◆

نتيجة (٣,٥٣)

إذا كانت G زمرة منتهية وكان $\varphi : G \to G_1$ تشاكلاً فإن $|\varphi(G)|$ يقسم $|G|$.

البرهان

باستخدام ميرهنة التماثل الأولى نجد أن $G/\mathrm{Ker}\varphi \cong \varphi(G)$. ولذا فإن :

$|\varphi(G)| = \dfrac{|G|}{|\mathrm{Ker}\varphi|} = |G/\mathrm{Ker}\varphi|$. إذن ، $|\varphi(G)|$ يقسم $|G|$ ◆

مثال (٣,٦٣)

لقد بينا في المثال (٣,١٢) أن التطبيق $\varphi : (\mathbb{R}^*, .) \to (\mathbb{R}^+, .)$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x) = |x|$ تشاكل غامر وأن $\mathrm{Ker}\varphi = \{-1, 1\} \cong \mathbb{Z}_2$. إذن ، بإستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن $(\mathbb{R}^*, .)/\mathbb{Z}_2 \cong (\mathbb{R}^+, .)$ □

مثال (٣,٦٤)

من المثال (٣,١٤) نجد أن التطبيق $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ المعرف بالقاعدة $\varphi(m) = [m]$ تشاكلاً غامراً وأن $\mathrm{Ker}\varphi = n\mathbb{Z}$. إذن ، بإستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ □

مثال (٣,٦٥)

عودة إلى المثال (٣,١٥) نجد أن التطبيق $\varphi : S_n \to \mathbb{Z}_2$ المعرف بالقاعدة $\varphi(\sigma) = 1$ إذا كان σ فردياً و $\varphi(\sigma) = 0$ إذا كان σ زوجياً تشاكلاً غامراً وأن $\mathrm{Ker}\varphi = A_n$. إذن ، $S_n / A_n \cong \mathbb{Z}_2$

□

مثال (٣,٦٦)

لقد بينا في المثال (٣,١٧) أن التطبيق $\varphi : GL(n, \mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^*, .)$ المعرف بالقاعدة $\varphi(A) = \det A$ تشاكلاً وأن $\mathrm{Ker}\varphi = SL(n, \mathbb{R})$. ومن الواضح أن φ شامل ، لأنه لو كان $a \in \mathbb{R}^*$ فإن المصفوفة القطرية $A \in GL(n, \mathbb{R})$ التي يكون أحد عناصر القطر هو a وباقي عناصر القطر تساوي 1 تحقق $\det A = a$. إذن بإستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن $GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^*, .)$ □

مثال (٣,٦٧)
من الواضح أن التطبيق $\varphi:\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_4$ المعرف بالقاعدة $\varphi([x],[y])=[x]$ تشاكلاً غامراً . كما أن $\operatorname{Ker}\varphi=\{0\}\times\mathbb{Z}_2$. إذن ، بإستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن :
$\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2/\{0\}\times\mathbb{Z}_2\cong\mathbb{Z}_4$ □

مثال (٣,٦٨)
لتكن $G=\{e^{ix}\in\mathbb{C}:x\in\mathbb{R}\}$ وليكن $\varphi:\mathbb{R}\to G$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(x)=e^{2\pi ix}$. φ تشاكل لأن : $\varphi(x+y)=e^{2\pi i(x+y)}=e^{2\pi ix}e^{2\pi iy}=\varphi(x)\varphi(y)$. من الواضح أن φ شامل . الآن : $\operatorname{Ker}\varphi=\{x\in\mathbb{R}:e^{2\pi ix}=1\}=\mathbb{Z}$ إذن ، بإستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong G$ □

تكمن أهمية المبرهنة الأولى للتماثل في أنها تكشف لنا عن وجود تقابل بين الصور التشاكلية لزمرة G وبين الزمر الجزئية الناظمية من G. ولتوضيح هذا التقابل لاحظ أنه إذا كان $\varphi:G\to G_1$ تشاكلاً غامراً فإنه بإستخدام مبرهنة التماثل الأولى نستطيع إيجاد زمرة جزئية ناظمية $\operatorname{Ker}\varphi=K$ من G بحيث يكون $G/K\cong G_1$. وبالعكس ، لكل زمرة جزئية ناظمية K من G تكون G/K صورة تشاكلية للزمرة G. إذن ، نخلص إلى أنه لإيجاد صور G التشاكلية يكفي أن نجد زمر G الجزئية الناظمية .

مثال (٣,٦٩)
لاحظ أن الزمرة الجزئية الناظمية من S_3 هي $\{e\},H=\langle(1\ 2\ 3)\rangle,S_3$. ولذا فإن صور S_3 التشاكلية هي : $S_3/\{e\}\cong S_3$ ، $S_3/H\cong\mathbb{Z}_2$ ، $S_3/S_3\cong\{e\}$ □

مثال (٣,٧٠)
الزمر الجزئية الناظمية من الزمرة D_4 هي :

$$\{e\},\langle a^2\rangle,\langle a\rangle,H=\{e,a^2,b,a^2b\},K=\{e,a^2,ab,a^3b\},D_4$$

إذن ، الصور التشاكلية للزمرة D_4 هي :

$$D_4/\langle a\rangle\cong D_4/H\cong D_4/K\cong\mathbb{Z}_2 \text{ ، } D_4/D_4\cong\{e\} \text{ ، } D_4/\{e\}\cong D_4$$

و $D_4/\langle a^2\rangle \cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ وذلك لأن $D_4/\langle a^2\rangle$ زمرة إبدالية من الرتبة 4 ولا تحتوي على عنصر رتبته 4 $\square$

مثال (٣,٧١)

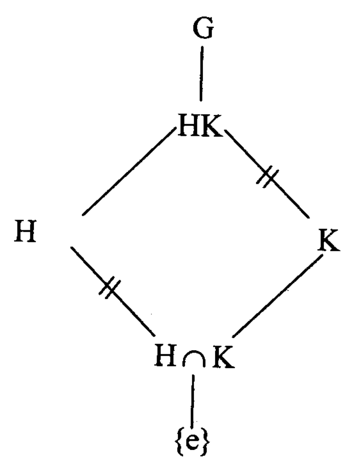
سنبين في هذا المثال استحالة وجود تشاكل غير التافه من الزمرة $\mathbb{Z}_{12}$ إلى الزمرة $\mathbb{Z}_5$. لنفرض إذن أن $\varphi:\mathbb{Z}_{12}\to\mathbb{Z}_5$ تشاكل غير التافه . إذن ، بإستخدام النتيجة (٥٣و٣) نجد أن $|\varphi(\mathbb{Z}_{12})|$ يقسم $|\mathbb{Z}_{12}|$. ولكن $\varphi(\mathbb{Z}_{12})\le\mathbb{Z}_5$. ولذا فإن $|\varphi(\mathbb{Z}_{12})|$ يقسم أيضاً $|\mathbb{Z}_5|=5$. وهذا مستحيل لأن $\gcd(5,12)=1$ $\square$

إذا كانت $H\le G$ وكانت $K\lhd G$ فلقد بينا في المبرهنة (٢٢ ,٣) أن $HK\le G$. ومن السهل أن نرى $K\lhd HK$ وأن $H\cap K\lhd H$.

المبرهنة التالية تسمى المبرهنة الثانية للتماثل **(second isomorphism theorem)** أو مبرهنة تماثل الزمر الجزئية **(subgroups isomorphism theorom)** وتبين لنا العلاقة بين زمر G الجزئية .

مبرهنة (٣ ,٥٤) [مبرهنة التماثل الثانية]

إذا كانت $H\le G$ و $K\lhd G$ فإن $H/(H\cap K)\cong HK/K$ (أنظر المخطط أدناه) .



البرهان

ليكن $\varphi:H\to HK/K$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(h)=hK$ لكل $h\in H$.

φ تشاكل لأن : $\varphi(h_1h_2) = (h_1h_2)K = (h_1K)(h_2K) = \varphi(h_1)\varphi(h_2)$.

φ غامرلأنه : إذا كان $(hk)K \in HK/K$ فإن $\varphi(h) = hK = hkK$.

وأخيراً : $h \in Ker\varphi \Leftrightarrow \varphi(h) = K \Leftrightarrow hK = K \Leftrightarrow h \in K \Leftrightarrow h \in H \cap K$.

إذن، $Ker\varphi = H \cap K$. وبإستخدام مبرهنة التماثل الأولى نجد أن $H/(H \cap K) \cong HK/K$ ◆

مثال (٣,٧٢)

إذا كانت $G = \mathbb{Z}$ ، $H = 3\mathbb{Z}$ ، $K = 4\mathbb{Z}$ فإن :

$$H + K = 3\mathbb{Z} + 4\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \quad \text{و أن} \quad H \cap K = 3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$$

إذن ، بإستخدام المبرهنة الثانية للتماثل نجد أن : $3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

ولكن بإستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نعلم أن $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_4$. إذن ، $3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_4$ □

مثال (٣,٧٣)

إذا كانت $G = S_n$ ، $H = \langle (1\ 2) \rangle$ ، $K = A_n$ فإن $H \cap K = \{e\}$ (لأن $(1\ 2)$ فردي) .

ولذا بإستخدام المبرهنة الثانية للتماثل نجد أن : $HA_n / A_n \cong H/(H \cap A_n) \cong H \cong \mathbb{Z}_2$ □

ننتقل الآن إلى المبرهنة الثالثة للتماثل (**third isomorphism theorem**) والتي يطلق عليها أحياناً مبرهنة خارج زمرة خارج القسمة

(quotient of a quotient group theorem) .

مبرهنة (٣,٥٥) [مبرهنة التماثل الثالثة]

إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية ناظمية من G حيث $H \le K$ فإن :

(أ) $K/H \lhd G/H$ (ب) $(G/H)/(K/H) \cong G/K$

البرهان

(أ) لنفرض أن $kH \in K/H$ وأن $gH \in G/H$. بما أن $K \lhd G$ فإن $gkg^{-1} \in K$. إذن ، $(gH)(kH)(gH)^{-1} = gkg^{-1}H \in K/H$. ولذا فإن $K/H \lhd G/H$.

(ب) ليكن $\varphi : G/H \to G/K$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(gH) = gK$ لكل $g \in G$.

φ معرف تعريفاً حسناً لأن :

$$g_1H = g_2H \Rightarrow g_1 = g_2h, h \in H \Rightarrow g_1 = g_2h, h \in K$$
$$\Rightarrow g_1K = g_2K \Rightarrow \varphi(g_1H) = \varphi(g_2H)$$

φ تشاكل لأن : $\varphi(g_1Hg_2H) = \varphi(g_1g_2H) = g_1g_2K = (g_1K)(g_2K) = \varphi(g_1H)\varphi(g_2H)$

من الواضح أن φ غامر . وأخيراً :

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{gH \in G/H : \varphi(gH) = K\} = \{gH \in G/H : gK = K\}$$
$$= \{gH \in G/H : g \in K\} = K/H$$

إذن ، بإستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن : $(G/H)/(K/H) \cong G/K$ ◆

مثال (٣, ٧٤)

لنفرض أن n يقسم m وأن $G = \mathbb{Z}$ ، $H = n\mathbb{Z}$ ، $K = m\mathbb{Z}$. لاحظ أن $n\mathbb{Z} \le m\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$.
وبإستخدام المبرهنة الثالثة والمبرهنة الأولى للتماثل نجد أن :

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m \quad \square$$

مثال (٣, ٧٥)

إذا كانت $G = S_4$ ، $K = A_4$ وكانت $H = \{e, (1\ 2)\circ(3\ 4), (1\ 3)\circ(2\ 4), (1\ 4)\circ(2\ 3)\}$
فإن $K/H = \{H, (1\ 2\ 3)\circ H, (1\ 3\ 2)\circ H\}$ وإن
$S_4/H = \{H, (1\ 2\ 3)\circ H, (1\ 3\ 2)\circ H, (1\ 2)\circ H, (1\ 3)\circ H, (2\ 3)\circ H\}$.
لاحظ أن $K/H \lhd S_4/H$ لأن $[S_4/H : K/H] = 2$. إذن ، باستخدام المبرهنة الثالثة
والمبرهنة الأولى للتماثل نجد أن : $(S_4/H)/(K/H) \cong S_4/K = S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$ $\square$

المبرهنة التالية تقدم لنا وصفاً للزمر الجزئية من زمرة خارج القسمة G/K وتدعى مبرهنة التقابل **(correspondence theorem)** ويطلق عليها أحياناً مبرهنة التماثل الرابعة .

مبرهنة (٣ , ٥٦) [مبرهنة التقابل]

لتكن G زمرة ولتكن $K \lhd G$ وليكن $\pi : G \to G/K$ التشاكل الغامر الطبيعي. ولنفرض أن $\operatorname{Sub}(G;K) = \{S : K \subseteq S \le G\}$ وأن $\operatorname{Sub}(G/K) = \{S^* : S^* \le G/K\}$ عندئذٍ :

(١) يوجد تقابل من $\operatorname{Sub}(G;K)$ إلى $\operatorname{Sub}(G/K)$.

(٢) $T \le S \le G$ إذا وفقط اذا كان $T/K \le S/K$. وفي هذه الحالة يكون $[S:T] = [S/K : T/K]$.

(٣) $T \lhd S$ إذا وفقط إذا كان $T/K \lhd S/K$.وفي هذه الحالة يكون:
$S/T \cong (S/K)/(T/K)$ (أنظر المخطط أدناه)

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & G/K \arrow[d, dash] \\
S \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & S/K \arrow[d, dash] \\
T \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & T/K \arrow[d, dash] \\
K \arrow[r, dash] & \{e\}
\end{tikzcd}$$

البرهان

(١) ليكن $\Phi : Sub(G\,;K) \to Sub(G/K)$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\Phi(S) = S/K$ لكل $S \in Sub(G\,;K)$. من السهل ان نرى ان $S/K \le G/K$. ولذا فان $S/K \in Sub(G/K)$.

سنثبت أولاً انه إذا كانت $S \in Sub(G;K)$ فإن $\pi^{-1}(\pi(S)) = S$. لاحظ أولاً أن $S \subseteq \pi^{-1}(\pi(S))$ صحيح دائماً. ولبرهان الاتجاه الآخر نفرض أن $a \in \pi^{-1}(\pi(S))$. عندئذ، يوجد $s \in S$ حيث أن $\pi(a) = \pi(s)$. ولذا فإن $as^{-1} \in Ker\, \pi = K$. أي أن $as^{-1} = k$ حيث $k \in K$. ولكن $K \le S$. ولذا فإن $k \in S$. وبالتالي فإن $a = sk \in S$.

لإثبات أن Φ أحادي نفرض أن $S, S' \in Sub(G;K)$ حيث $\Phi(S) = \Phi(S')$. ومنه فإن $S/K = S'/K$. أي أن $\pi(S) = \pi(S')$. ولذا $\pi^{-1}(\pi(S)) = \pi^{-1}(\pi(S'))$ وبالتالي نستنتج $S = S'$. أي أن Φ أحادي.

ولإثبات أن Φ شامل نفرض أن $H \le G/K$. الآن، $K = \pi^{-1}(\{e\}) \le \pi^{-1}(H) \le G$. ولذا فإن $\Phi(\pi^{-1}(H)) = \pi(\pi^{-1}(H)) = H$. وبالتالي فإن Φ شامل.

(٢) إذا كان $T \le S \le G$ فإنه من الواضح أن $\pi(T) \le \pi(S)$. وبالتالي فإن $T/K \le S/K$.

ولبرهان العكس، نفرض أن $T/K \le S/K$. وليكن $t \in T$. عندئذ $tK \in T/K \le S/K$. ولذا فإن $tK = sK$ حيث $s \in S$. ومنه فإن $t = sk$ حيث $k \in K$. وبما أن $K \le S$ فإن $k \in S$. وبالتالي فإن $t \in S$. أي أن $T \le S$.

ولإثبات أن $[S:T] = [S/K : T/K]$ فإنه يكفي أن نبرهن على وجود تقابل بين $\{sT : s \in S\}$ و $\{(aK)T/K : a \in S\}$. ومن الواضح أن $sT \mapsto \pi(s)T/K$ هوالتقابل المنشود.

(٣) إذا كانت $T \lhd S$ فإننا نجد باستخدام مبرهنة التماثل الثالثة أن $T/K \lhd S/K$ وأن

. $(S/K)/(T/K) \cong S/T$

ولإثبات الاتجاه الآخر نفرض أن $T/K \triangleleft S/K$. ولنفرض أن $t \in T$ و $s \in S$. الآن:

$\pi(sts^{-1}) = \pi(s)\pi(t)\pi(s)^{-1} \in \pi(s)(T/K)\pi(s)^{-1} \in T/K$. ولذا فإن

$\pi^{-1}(T/K) = T$ $sts^{-1} \in$ ونستنتج أن $T \triangleleft S$ ◆

ملحوظة

لاحظ أنه باستخدام مبرهنة التقابل نجد أن أي زمرة جزئية من الزمرة G/K هي على الصورة H/K حيث H زمرة جزئية وحيدة من G وتحتوي K .

(٣,٦,١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

إذا كانت G و G_1 زمرتين وكانت $K \triangleleft G$ و $K_1 \triangleleft G_1$ فأثبت أن $K \times K_1 \triangleleft G \times G_1$ وأن $(G \times G_1)/(K \times K_1) \cong (G/K) \times (G_1/K_1)$.

الحل

ليكن كل من $\pi : G \to G/K$ و $\pi_1 : G_1 \to G_1/K_1$ التشاكل الطبيعي الغامر . وليكن $\varphi : G \times G_1 \to (G/K) \times (G_1/K_1)$ التطبيق المعرف بالقاعدة: $\varphi(x, y) = (\pi(x), \pi_1(y))$.

من السهل ان نرى الآن أن φ تشاكل غامر و أن $\operatorname{Ker}\varphi = K \times K_1$. ولذا فإن $K \times K_1 \triangleleft G \times G_1$. ومن المبرهنة الأولى للتماثل نخلص الى أن :

$(G \times G_1)/(K \times K_1) \cong (G/K) \times (G_1/K_1)$ Δ

تمرين (٢)

عين جميع الصور التشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}$.

الحل

لتكن H صورة تشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}$. عندئذ، يوجد تشاكل غامر $\varphi : \mathbb{Z} \to H$. وباستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن $\mathbb{Z}/\operatorname{Ker}\varphi \cong H$. وبما أن $\operatorname{Ker}\varphi \le \mathbb{Z}$ فإن $\operatorname{Ker}\varphi = n\mathbb{Z}$ حيث $n \ge 0$. ومنه فإن $H \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

وبالعكس لكل $n \geq 0$ ، $n\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$. كما أن التشاكل الطبيعي $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ تشاكل غامر . أي أن $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ صورة تشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}$ لكل $n \geq 0$. وبالتالي فإن جميع الصور التشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}$ هي الزمرة $\mathbb{Z}$ والزمر $\mathbb{Z}_n$ لكل $n > 1$ Δ

تمرين (٣)

إذا كان $\varphi : G \to \mathbb{Z}_8$ تشاكلاً غامراً من الزمرة المنتهية G إلى الزمرة $\mathbb{Z}_8$ فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية دليلها 2 وزمرة جزئية ناظمية دليلها 4 .

الحل

باستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن $G/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathbb{Z}_8$ ولذا فإن $G/\mathrm{Ker}\varphi$ زمرة دورية من الرتبة 8 . ومن ثم فهي تحتوي على زمرة جزئية H من الرتبة 4 وزمرة جزئية K من الرتبة 2. وباستخدام مبرهنة التقابل توجد $\mathrm{Ker}\,\varphi \subseteq S \lhd G$ و $\mathrm{Ker}\varphi \subseteq T \lhd G$ حيث $S/\mathrm{Ker}\varphi = H$ و $T/\mathrm{Ker}\varphi = K$. إذن ،

$8 = |G/\mathrm{Ker}\varphi| = [G:\mathrm{Ker}\varphi] = [G:S][S:\mathrm{Ker}\varphi] = [G:S]4$. وبالتالي فإن $[G:S] = 2$.

وبالمثل يمكن إثبات أن $[G:T] = 4$ Δ

تمرين (٤)

لتكن كل من H و K زمرة جزئية من الزمرة المنتهية G حيث $[G:K] = [G:H] = 2$ و $H \neq K$ ، أثبت أن $[G:H \cap K] = 4$ و أن $G/(H \cap K)$ ليست دورية .

الحل

بما أن دليل كل من H و K في G هو 2 فإن $H \lhd G$ و $K \lhd G$. ولذا فإن $H \cap K \lhd G$.

وباستخدام المبرهنة الثانية للتماثل نجد أن $H/(H \cap K) \cong HK/K$. ولذا فإن $[H:H \cap K] = [HK:K]$. الآن $2 = [G:K] = [G:HK][HK:K]$. ولذا فإن $[HK:K] = 2$ لأن $H \neq K$. ومنه فإن :

$[G:H \cap K] = [G:H][H:H \cap K] = [G:H][HK:K] = 2 \times 2 = 4$.

و أخيراً ، $G/(H \cap K)$ ليست دورية لأنها تحتوي على زمرتين من الرتبة 2 Δ

تمارين (٦, ٣)

في التمارين من (١) إلى (١١) استخدم مبرهنة التماثل الأولى لإثبات تماثل الزمرتين .

(١) $\mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_3$ (٢) $4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_3$ (٣) $8\mathbb{Z}/56\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_7$

(٤) $m\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ حيث $\gcd(m,n)=1$

(٥) $(\mathbb{Q}^*,.)/\mathbb{Z}_2 \cong (\mathbb{Q}^+,.)$ (٦) $(\mathbb{C},+)/(\mathbb{R},+) \cong (\mathbb{R},+)$

(٧) $(\mathbb{C}^*,.)/(\mathbb{R}^+,.) \cong (U,.)$ حيث $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$.

(٨) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/H\times K \cong \mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ حيث $H=\langle(m,0)\rangle$ و $K=\langle(0,n)\rangle$.

(٩) $(\mathbb{C}^*,.)/(U,.) \cong (\mathbb{R}^+,.)$ حيث U هي كما في التمرين (٧) .

(١٠) $(\mathbb{Q}^*,.)/(\mathbb{Q}^+,.) \cong \mathbb{Z}_2$ (١١) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/H \cong \mathbb{Z}$ حيث $H=\{(m,m):m\in\mathbb{Z}\}$.

(١٢) إذا كان $\varphi:G\to\mathbb{Z}_{10}$ تشاكلاً غامراً فأثبت أن G تحتوي على زمر جزئية ناظمية H_1,H_2,H_3 حيث : $[G:H_3]=10,[G:H_2]=5,[G:H_1]=2$.

(١٣) إذا كان $\varphi:\mathbb{Z}_{30}\to\mathbb{Z}_{30}$ تشاكل وكان $\varphi([23])=[9]$ وكان : $\mathrm{Ker}\varphi=\{[0],[10],[20]\}$ فجد $\varphi^{-1}([9])$.

(١٤) إذا كان $\varphi:G\to\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_2$ تشاكلاً غامراً وكان $|\mathrm{Ker}\varphi|=5$ فأثبت أن G تحتوي على زمر جزئية ناظمية من الرتب $5,10,15,20,30,60$.

(١٥) أثبت أن $\mathbb{Z}_8$ ليست صورة تشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}_{15}$.

(١٦) أثبت أن $\mathbb{Z}_9$ ليست صورة تشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$.

(١٧) أثبت أن $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$ ليست صورة تشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_2$.

(١٨) إذا كانت كل من G و H زمرة منتهية حيث $\gcd(|G|,|H|)=1$ وكان $\varphi:G\to H$ تشاكلاً فأثبت أن φ هو التشاكل التافه .

(١٩) ليكن $\varphi:G\to G_1$ تشاكلاً غامراً ولتكن $K\lhd G_1$ حيث $[G_1:K]=n$. إذا كانت $H=\varphi^{-1}(K)$ فأثبت أن $[G:H]=n$.

(٢٠) جد جميع الصورة التشاكلية (باستثناء التماثل) للزمرة Q_8 .

(٢١) هل D_3 صورة تشاكلية للزمرة T ؟

(٢٢) إذا كانت $N\lhd G$ و $M\lhd G$ وكانت $H\le G$ حيث $H\cap M=H\cap N$ فأثبت أن $(HN)/N\cong(HM)/M$.

(٢٣) إذا كانت $H \leq G$ و $K \leq G$ وكانت $N \lhd G$ حيث $HN = KN$ فأثبت أن : $H/(H \cap N) \cong K/(K \cap N)$.

(٢٤) لنفرض أن $H \lhd G$ وأن $K \lhd G$ حيث $H \subseteq K$. إذا كانت كل من K/H و G/K زمرة منتهية فأثبت أن G/H زمرة منتهية .

(٢٥) إذا كانت $H \lhd G$ و $K \lhd G$ حيث كل من G/K و G/H زمرة منتهية فأثبت أن $G/(H \cap K)$ زمرة منتهية .

(٢٦) إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $N \lhd G$ ، $M \lhd G$ و $H \leq G$ حيث $\gcd(|M|,|H|) = \gcd(|N|,|H|) = 1$ فأثبت أن $HM/M \cong HN/N$.

(٢٧) لتكن $K \lhd G$ و $H \lhd G$ حيث $H \subseteq K$. إذا كانت G/K زمرة دورية وكان $|K/H| = 2$ فأثبت أن G/H زمرة إبدالية .

(٢٨) إذا كانت $K \lhd G$ و $H \lhd G$ حيث $G = HK$ و $H \cap K = \{e\}$ فأثبت أن $G/K \cong H$. وأن $G/H \cong K$.

(٢٩) إذا كانت G زمرة منتهية وكان $\varphi : G \to G_1$ تشاكلاً غامراً وكانت G_1 تحتوي على عنصر رتبته n فأثبت أن G تحتوي على عنصر رتبة n .

(٣٠) إذا كان $\varphi : G \to G_1$ تشاكلاً غامراً وكانت $H \lhd G$ حيث $H \subseteq Ker\varphi$ فأثبت أن:

(أ) يوجد تشاكل غامر وحيد $\psi : G/H \to G_1$ يحقق $\varphi = \psi \circ \pi$ حيث $\pi : G \to G/H$ هو التشاكل الطبيعي .

(ب) ψ تماثل إذا وفقط إذا كان $H = Ker\varphi$.

(٣١) استخدم التمرين (٣٠) لإثبات المبرهنة الأولى للتماثل .

(٣٢) اذا كان $\varphi : G \to G_1$ تشاكلاً غـامراً وكانت $H \lhd G$ حيث $Ker\varphi \subseteq H$ وإذا كـان $\pi : G \to G/H$ و $\mu : G_1 \to G_1/\varphi(H)$ التشاكلين الطبيعين فـأثبت أنة يوجد تماثل وحيد $\psi : G/H \to G_1/\varphi(H)$ يحقق $\mu \circ \varphi = \psi \circ \pi$ [ارشاد : استخدم تمرين (٣٠)] .

(٣٣) استخدم التمرين (٣٢) لاثبات المبرهنة الثالثة للتماثل.

(٣٤) بين أياً من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :

(أ) توجد زمرة G بحيث تكون $\mathbb{Z}_p$ زمرة تشاكلية للزمرة G لكل عددأولي p .

(ب) إذا كانت $\mathbb{Z}_{10}$ صورة تشاكلية للزمرة المنتهية G فإن 10 يقسم رتبة G .

(ت) إذا كان $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ تشاكلاً غامراً فإن φ تماثل .

(ث) إذا كان φ تشاكلاً غامراً من الزمرة G إلى الزمرة G فإن φ تماثل.

(ج) توجد خمسة زمر جزئية للزمرة $4\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}$.

(ح) توجد خمسة صور تشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}_5$.

(خ) التطبيق $\varphi:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ المعرف بالقاعدة $\varphi(a,b)=a-b$ تشاكل و $\operatorname{Ker}\varphi=\{(a,a):a\in\mathbb{Z}\}$.

(د) $D_4/Z(D_4)\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

(ذ) إذا كان $n\in\mathbb{Z}^+$ وكانت $H=\{x\in G:o(x)=n\}$ زمرة جزئية G فإن $H\lhd G$.

(ر) $H=\{x\in D_4:o(x)=2\}\leq D_4$.

(ز) $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$ صورة تشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

(س) إذا كانت $H\lhd S_4$ حيث $|H|=4$ فإن $S_4/H\cong S_3$.

(٣,٧) زمرة التماثلات الذاتية
Group of Automorphisms

لقد درسنا في بداية هذا الفصل مفهوم التماثل بين زمرتين G و G_1. إذا كانت $G = G_1$ فان مجموعة التماثلات من G إلى G تكون زمرة تسمى زمرة التماثلات الذاتية وهي على قدر كبير من الأهمية. نخصص هذا البند لإلقاء مزيد من الضوء على هذه الزمرة .

تعريف (٣,١٣)

يسمى التشاكل $\varphi:G\to G$ تشاكلاً ذاتياً(**endomorphism**). وإذا كان φ تماثلاً فإنه يسمى تماثلاً ذاتياً (**automorphism**). نرمز لمجموعة التماثلات الذاتية على زمرة G بالرمز $\operatorname{Aut}(G)$.

المبرهنة التالية تبين لنا أن مجموعة التماثلات الذاتية زمرة جزئية من مجموعة التبديلات.

مبرهنة (٣,٥٧)

إذا كانت G زمرة فإن $(\operatorname{Aut}(G),\circ)$ زمرة جزئية من $(S_G,\circ)$ حيث S_G هي زمرة التبـــديلات على G .

البرهان

لاحظ أن التطبيق $I: G \to G$ المعرف بالقاعدة $I(x) = x$ تماثل . ولذا فإن $I \in Aut(G)$. أي أن $Aut(G) \neq \phi$. لنفرض أن $\varphi, \psi \in Aut(G)$. بما أن كل من φ و ψ تقابل فإن $\varphi \circ \psi$ تقابل أيضاً. وإذا كان $x, y \in G$ فإن :

$$(\varphi \circ \psi)(xy) = \varphi(\psi(xy)) = \varphi(\psi(x)\psi(y)) = \varphi(\psi(x))\varphi(\psi(y))$$
$$= [(\varphi \circ \psi)(x)][(\varphi \circ \psi)(y)]$$

إذن ، $\varphi \circ \psi \in Aut(G)$.

وأخيراً إذا كان $\varphi \in Aut(G)$ فإن φ^{-1} تقابل أيضاً وأنه لكل $x, y \in G$:

$\varphi(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)) = \varphi(\varphi^{-1}(x))\varphi(\varphi^{-1}(y)) = I(x)I(y) = xy$. ولذا فإن $\varphi^{-1}(xy) = \varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)$. إذن، $\varphi^{-1} \in Aut(G)$.وبالتالي فإن $Aut(G) \leq S_G$ ◆

تعريف (٣,١٤)

تسمى الزمرة$Aut(G)$ زمرة التماثلات الذاتية للزمرة G (**group of automorphisms of** G).

مبرهنة (٣,٥٨)

لتكن G زمـــرة وليكن $a \in G$. إذا كـــان $\varphi_a : G \to G$ هـــو التطبيق المعرف بالقـــاعـــدة $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ لكل $x \in G$ فإن :

(أ) $\varphi_a \in Aut(G)$

(ب) $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab}$ لكل $a, b \in G$

(ج) $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{a^{-1}}$

(د) $\psi \circ \varphi_a \circ \psi^{-1} = \varphi_{\psi(a)}$ لكل $\psi \in Aut(G)$

البرهان

(أ) φ_a تطبيق أحادي لأنه لو كان $x, y \in G$ فإن :

$$\varphi_a(x) = \varphi_a(y) \Rightarrow axa^{-1} = aya^{-1} \Rightarrow x = y \text{ .}$$

φ_a تطبيق شامل لأنه لو كان $y \in G$ فإن $a^{-1}ya \in G$ وإن $\varphi(a^{-1}ya) = a(a^{-1}ya)a^{-1} = y$.

φ_a تشاكل لأنه لو كان $x, y \in G$ فإن :

$\varphi_a(xy) = axya^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = \varphi_a(x)\varphi_a(y)$. إذن ، $\varphi_a \in Aut(G)$.

(ب) لنفرض أن $a, b \in G$ عندئذ ، لكل $x \in G$:

$$(\varphi_a \circ \varphi_b)(x) = \varphi_a(\varphi_b(x)) = \varphi_a(bxb^{-1}) = a(bxb^{-1})a^{-1} = (ab)x(ab)^{-1} = \varphi_{ab}(x) \text{ .}$$

إذن ، $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab}$.

(ج) لاحظ أن : $\varphi_a \circ \varphi_{a^{-1}} = \varphi_{aa^{-1}} = \varphi_e = I$ وأن : $\varphi_{a^{-1}} \circ \varphi_a = \varphi_{a^{-1}a} = \varphi_e = I$.

إذن ، $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{a^{-1}}$.

(د) لنفرض أن $\psi \in Aut(G)$. عندئذ لكل $x \in G$ لدينا :

$$(\psi \circ \varphi_a \circ \psi^{-1})(x) = \psi(\varphi_a(\psi^{-1}(x))) = \psi(a\psi^{-1}(x)a^{-1}) = \psi(a)\psi(\psi^{-1}(x))\psi(a^{-1})$$
$$= \psi(a)x(\psi(a))^{-1} = \varphi_{\psi(a)}(x)$$

إذن ، $\psi \circ \varphi_a \circ \psi^{-1} = \varphi_{\psi(a)}$ ◆

تعريف (٣,١٥)

لتكن G زمرة . تسمى المجموعة الجزئية $Inn(G) = \{\varphi_a \in Aut(G) : a \in G\}$ مجموعة التماثلات الذاتية الداخلية للزمرة G (**inner automorphisms of** G).

نتيجة (٣,٥٩)

$Inn(G) \triangleleft Aut(G)$ لكل زمرة G.

البرهان

بما أن $\varphi_e = I \in Inn(G)$ فإن $Inn(G) \neq \phi$. إذا كان $\varphi_a, \varphi_b \in Inn(G)$ وكان $\psi \in Aut(G)$ فانه باستخدام المبرهنة (٣,٥٨) نجد أن :

$\varphi_a \circ \varphi_b^{-1} = \varphi_a \circ \varphi_{b^{-1}} = \varphi_{ab^{-1}} \in Inn(G)$ وأن : $\psi \circ \varphi_a \circ \psi^{-1} = \varphi_{\psi(a)} \in Inn(G)$. إذن ، $Inn(G) \triangleleft Aut(G)$ ◆

نتيجة (٣,٦٠)

إذا كانت G زمرة وكانت $H \leq G$ فإن $N(H)/C(H)$ تماثل زمرة جزئية من $Aut(H)$ حيث $N(H) = \{x \in G : xHx^{-1} = H\}$ هو منظم H في G و $C(H) = \{x \in G : xhx^{-1} = h \ \forall h \in H\}$ هو ممركز H في G .

البرهان

ليكن $\varphi : N(H) \to Aut(H)$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(a) = \varphi_a$ لكل $a \in N(H)$.

φ تشاكل لأنه إذا كان $a,b \in N(H)$ فإن : $\varphi(ab) = \varphi_{ab} = \varphi_a \circ \varphi_b = \varphi(a) \circ \varphi(b)$. كما أن :

$$Ker\varphi = \{a \in N(H) : \varphi(a) = I = \varphi_e\} = \{a \in G : \varphi_a(h) = \varphi_e(h) \ \forall h \in H\}$$

$$= \{a \in G : aha^{-1} = h \ \forall h \in H\} = C(H)$$

إذن ، باستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن : $N(H)/C(H) \cong \varphi(N(H)) \leq Aut(H)$ ◆

نتيجة (٣,٦١)

إذا كانت G زمرة فإن $G/Z(G) \cong Inn(G)$.

البرهان

إذا وضعنا $H = G$ في النتيجة (٣,٦٠) فإننا نجد ان $N(G) = G$ ، $C(G) = Z(G)$ وأن $\varphi(N(G)) = \varphi(G) = Inn(G)$ ◆

نتيجة (٣,٦٢)

$|Inn(G)| = 1$ إذا وفقط إذا كانت G زمرة إبدالية.

البرهان

إذا كانت G زمرة إبدالية فإن $Z(G) = G$. ولذا فإنه باستخدام النتيجة(٣,٦١) نجد أن: $1 = |G/Z(G)| = |Inn(G)|$.

وبالعكس لنفرض أن $|Inn(G)| = 1$. عندئذ ، $\varphi_a = \varphi_e$ لكل $a \in G$. ومنه فإن $axa^{-1} = x$ لكل $a, x \in G$. ولذا فإن $ax = xa$ لكل $a, x \in G$. وبالتالي فإن G إبدالية ◆

مثال (٣,٧٦)

أثبت أن $Aut(S_3) \cong S_3$.

الحل

بما أن $Z(S_3) = \{e\}$ فإننا نجد باستخدام النتيجة (٣,٦١) أن $S_3 \cong Inn(S_3)$. إذن ، $6 = |S_3| = |Inn(S_3)| \leq |Aut(S_3)|$.

الآن: $S_3 = \langle a, b \rangle$ حيث $a = (1\ 2)$ و $b = (1\ 2\ 3)$. إذا كان $\varphi \in Aut(S_3)$ فإن φ يتحدد تماماً بمعرفة $\varphi(a)$ و $\varphi(b)$. وبما أن $o(\varphi(a)) = o(a) = 2$ وأن $o(\varphi(b)) = o(b) = 3$ و S_3 تحتوي على عنصرين من الرتبة 3 وثلاثة عناصر من الرتبة 2 فإننا نجد أن للعنصر $\varphi(a)$ ثلاثة إختيارات وإختياران للعنصر $\varphi(b)$. إذن، $|Aut(S_3)| \leq 6$. ولـذا فإننـا نخلص إلى أن $6 \leq |Aut(S_3)| \leq 6$. أي أن $|Aut(S_3)| = 6$. وبالتالي فإن $Aut(S_3) \cong S_3$ □

مثال (٣,٧٧)

أثبت أن $\mathrm{Inn}(D_6) \cong D_3$.

الحل

لاحظ أن $D_6 = \langle a,b \rangle$ حيث $o(a)=6$ ، $o(b)=2$ و $ba=a^{-1}b$. كذلك نعلم أن $Z(D_6)=\{e,a^3\}$. إذن $|\mathrm{Inn}(D_6)|=|D_6/Z(D_6)|=6$. وبإستخدام المبرهنة (٣,٤٢) نجد أن $\mathrm{Inn}(D_6) \cong \mathbb{Z}_6$ أو أن $\mathrm{Inn}(D_6) \cong D_3$.

إذا كانت $\mathrm{Inn}(D_6) \cong \mathbb{Z}_6$ فإن $\mathrm{Inn}(D_6)$ دورية ، ولذا فإن $D_6/Z(D_6)$ دورية. ومن ثم فإن D_6 إبدالية وهذا تناقض. إذن ، $\mathrm{Inn}(D_6) \cong D_3$ □

لقد بينا في التمرين (٣) من التمارين المحلولة (٣,١,١) أنه يوجد تماثلان من الزمرة $\mathbb{Z}$ إلى الزمرة $\mathbb{Z}$. ولذا فإن $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$. قبل أن نقوم بحساب زمرة التماثلات الذاتية للزمرة الدورية المنتهية $\mathbb{Z}_n$ نقدم الحالة الخاصة عندما يكون $n=12$ لمساعدتنا على فهم الحالة العامة .

مثال (٣,٧٨)

أثبت أن $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{12}) \cong U_{12}$.

الحل

لاحظ أن $\mathbb{Z}_{12}=\langle [1] \rangle$. وإذا كان $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{12})$ فإن φ يتحدد تماماً بمعرفة $\varphi([1])$ وبما أن $\varphi([1])$ مولداً للزمرة $\mathbb{Z}_{12}$ فإن $\varphi([1])=[1]$ أو $\varphi([1])=[5]$ أو $\varphi([1])=[7]$ أو $\varphi([1])=[11]$. إذا كان $\varphi([1])=[1]$ فإن φ هو التطبيق المحايد ومن ثم فإن $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{12})$. ليكن $\varphi([1])=[5]$. بما أن $\varphi([1])$ مولداً للزمرة $\mathbb{Z}_{12}$ فإن φ شامل . ومن ثم فهو أحادي . كما أن $\varphi([a+b])=5([a]+[b])=5[a]+5[b]=\varphi([a])+\varphi([b])$. أي أن φ تشاكل . وبالتالي فإن $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{12})$. وبالمثل إذا كان $\varphi([1])=[7]$ أو $\varphi([1])=[11]$ فإن $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{12})$. وبالتالي فإن $|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{12})|=4$. ومنه فإن $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{12}) \cong \mathbb{Z}_4$ أو $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{12}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. ولكن من السهل أن نرى أن رتبة كل من عناصر $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{12})$ (عدا المحايد) هي 2 . وبالتالي فإن $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{12}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong U_{12}$ □

المبرهنة التالية تعمم لنا المثال (٧٨, ٣).

مبرهنة (٦٣ , ٣)

$\text{Aut}(\mathbb{Z}_n) \cong U_n$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

البرهان

ليكن $f : \text{Aut}(\mathbb{Z}_n) \to U_n$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $f(\varphi) = \varphi([1])$ لكل $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_n)$.

f معـــرف تعريفــاً حـــسناً : لاحـــظ أولاً أن $m\varphi([1]) = \varphi([m])$. إذن ، $\varphi([m]) = [0]$ إذا وفقط إذا كان n يقسم m . ولذا فإن $o(\varphi([1])) = n$. أي أن $\varphi([1]) \in U_n$. وبذلك يكـــون f معرفاً تعريفاً حسناً .

f تشاكل : لنفرض أن $\varphi , \psi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_n)$. إذن ، $f(\varphi \circ \psi) = (\varphi \circ \psi)([1]) = \varphi(\psi([1]))$. لنفرض أن $\psi([1]) = [k]$. عندئذ:

$$f(\varphi \circ \psi) = \varphi([k]) = k\varphi([1]) = k[1]\varphi([1]) = [k]\varphi([1]) = \varphi([1])[k]$$
$$= \varphi([1])\psi([1]) = f(\varphi)\, f(\varphi)$$

إذن f تشاكل .

f أحادي : إذا كان $\varphi , \psi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ و $[k] \in \mathbb{Z}_n$ فإن :

$$f(\varphi) = f(\psi) \Rightarrow \varphi([1]) = \psi([1]) \Rightarrow [k]\varphi([1]) = [k]\psi([1]) \Rightarrow \varphi([k]) = \psi([k])$$
$$\Rightarrow \varphi = \psi$$

إذن، f أحادي .

f شامل : لنفرض أن $[t] \in U_n$. إذن، $\gcd(n,t) = 1$. ليكن $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ التطبيق المعـــرف بالقاعدة $\varphi([m]) = [mt]$ لكـــل $[m] \in \mathbb{Z}_n$. ســـنبرهن أولاً أن $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_n)$. إذا كـــان $[r] , [s] \in \mathbb{Z}_n$ فإن :

$$[r] = [s] \Rightarrow r - s = nq , q \in \mathbb{Z} \Rightarrow rt - st = nqt \Rightarrow [rt] = [st] \Rightarrow \varphi([r]) = \varphi([s])$$

ولذا فإن φ معرف تعريفاً حسناً . الآن :

$$\varphi([r]) = \varphi([s]) \Rightarrow [rt] = [st] \Rightarrow n \mid (r t - s t)$$
$$\Rightarrow n \mid (r - s)t \Rightarrow n \mid (r - s) \Rightarrow [r] = [s]$$

وذلك لأن $\gcd(t , n) = 1$. إذن، φ أحادي .

لنفرض الآن أن $[r] \in \mathbb{Z}_n$. بما أن $\gcd(n , t) = 1$ فإن $t x + n y = 1$ حيث $x,y \in \mathbb{Z}$. ولذا فإن $r = txr + nyr$. أي أن $[r] = [txr]$ إذن ، $\varphi([xr]) = [xrt] = [r]$. ولذا فإن φ شامل .

من الواضح أن φ تشاكل وبالتالي فإن $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$. أخيراً ، $f(\varphi) = \varphi([1]) = [t]$. إذن ، f شامل . ونخلص إلى أن $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n) \cong U_n$ ◆

(١, ٧ , ٣) تمارين محلولة (**solved Exercises**)

تمرين (١)

لتكن G زمرة منتهية وليكن $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ حيث $\varphi(a) = a$ إذا وفقط إذا كان $a = e$ لكل $a \in G$.

(أ) أثبت أنه لكل $g \in G$ يوجد $a \in G$ بحيث يكون $g = a^{-1}\varphi(a)$.

(ب) إذا كان $\varphi^2 = I$ فأثبت أن G إبدالية .

الحل

(أ) لنفرض أن $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ وأن $H = \{a_1^{-1}\varphi(a_1), a_2^{-1}\varphi(a_2), \ldots, a_n^{-1}\varphi(a_n)\}$. عندئذ ، $H \subseteq G$. سنبرهن الآن أن جميع عناصر H مختلفة . لاحظ أن :

$a_i^{-1}\varphi(a_i) = a_j^{-1}\varphi(a_j) \Leftrightarrow \varphi(a_i a_j^{-1}) = a_i a_j^{-1} \Leftrightarrow a_i a_j^{-1} = e \Leftrightarrow a_i = a_j$. وبما أن $|H| = |G|$ فإن $H = G$. وبالتالي ، إذا كان $g \in G$ فإن $g \in H$. أي يوجد $a \in G$ حيث $g = a^{-1}\varphi(a)$.

(ب) سنثبت أولاً أن $\varphi(g) = g^{-1}$ لكل $g \in G$. باستخدام الفقرة (أ) يوجد $a \in G$ حيث $g = a^{-1}\varphi(a)$ ، عندئذ :

$g = I(g) = \varphi^2(a^{-1}\varphi(a)) = \varphi(\varphi(a^{-1})\varphi^2(a)) = \varphi(\varphi(a^{-1})\, a) = \varphi(g^{-1})$. وبالتالي فإن $\varphi(g) = g^{-1}$. لنفرض الآن أن $a, b \in G$. عندئذ ،

$(ab)^{-1} = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1}$. وبالتالي فإن $ab = ba$ Δ

تمرين (٢)

لتكن $H \leq G$. نقول إن H زمرة جزئية لامتغيرة تماماً **(fully invariant)** إذا كان $\varphi(H) \subseteq H$ لكل تشاكل ذاتي $\varphi : G \to G$. ونقول إن H مميزة (**characteristic**)إذا كان $\varphi(H) \subseteq H$ لكل $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$.

(أ) أثبت أن H مميزة إذا وفقط إذا كان $\varphi(H) = H$ لكل $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$.

(ب) إذا كانت H لامتغيرة تماماً فأثبت أن H مميزة .

(ج) أثبت أن $Z(G)$ مميزة ولكنها ليست بالضرورة لامتغيرة تماماً .

(د) إذا كانت H مميزة فأثبت أن $H \lhd G$. أعط مثالاً يبين أن العكس غير صحيح .

الحل

(أ) لنفرض أن $H \leq G$ مميزة . عندئذ ، $\varphi(H) \leq H$ لكل $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. وبما أن $\varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$ فإن $\varphi^{-1}(H) \leq H$. وعليه فإن $H = \varphi(\varphi^{-1}(H)) \leq \varphi(H)$. وبالتالي فإن $\varphi(H) = H$. أما برهان العكس فهو واضح .

(ب) لنفرض أن H لامتغيرة تماماً . ولنفرض أن $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. بما أن φ تشاكل ذاتي وأن H لامتغيرة تماماً فإننا نخلص إلى أن $\varphi(H) \leq H$. وبالتالي فإن H مميزة .

(ج) لنفرض أن $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. وليكن $\varphi(x) \in \varphi(Z(G))$. عندئذ ، $x \in Z(G)$. ومنه فإن $xa = ax$ لكل $a \in G$. ولذا فإن $\varphi(x)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(x)$. أي أن $\varphi(x) \in Z(G)$ (لأن φ شامل) . وبالتالي فإن $\varphi(Z(G)) \subseteq Z(G)$. أي أن $Z(G)$ مميزة . ولإثبات أن $Z(G)$ ليست بالضرورة لامتغيرة تماماً أعتبر $G = \mathbb{Z}_2 \times S_3$. عندئذ ، $Z(G) = \langle([1]\,,e)\rangle$. ليكن $\varphi : G \to G$ التطبيق المعرف بالقاعدة :

$\varphi([0]\,,\sigma) = ([0]\,,e)\,,\ \varphi([1]\,,\sigma) = ([0]\,,(1\,2))$ لكل $\sigma \in S_3$. من الواضح أن φ تشاكل ذاتي . ولكن $\varphi(Z(G)) \not\subseteq Z(G)$.

(د) لنفرض أن $H \leq G$ مميزة ولنفرض أن $g \in G$. عندئذ ، $\varphi_g \in \mathrm{Aut}(G)$. ومنه فإن $\varphi_g(H) \subseteq H$. أي أن $gHg^{-1} \subseteq H$. وبالتالي فإن $H \lhd G$. ولإثبات أن العكس غير صحيح، أعتبر $G = V$ و $H = \{e\,,a\}$. من الواضح أن $H \lhd G$. ليكن $\varphi : G \to G$ التطابق المعرف على النحو التالي: $\varphi(e) = e$ ، $\varphi(a) = b$ ، $\varphi(b) = c$ و $\varphi(c) = a$.

من الواضح أن $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ ولكن $\varphi(H) = \{e, b\} \not\subseteq H$ Δ

تمارين (٧ , ٤)

(١) إذا كان $a\,,b \in G$ فأثبت أن $\varphi_a = \varphi_b$ إذا وفقط إذا كان $b^{-1}a \in Z(G)$.

(٢) إذا كان $\varphi_a \in \mathrm{Inn}(G)$ فأثبت أن $o(\varphi_a)$ يقسم $o(a)$.

(٣) أثبت أن $\mathrm{Inn}(D_4) \cong \mathrm{Inn}(Q_8)$.

(٤) أثبت أن $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong S_3$.

(٥) أثبت أن $Aut(S_4) \cong S_4$.

(٦) أثبت أن $Inn(T) \cong S_3$.

(٧) إذا كان $Z(G) = \{e\}$ فأثبت أن $Z(Aut (G)) = \{e\}$. هل العكس صحيح ؟

(٨) إذا كان $Aut (G) = \{e\}$ فأثبت أن $G = \{e\}$ أو أن $G \cong \mathbb{Z}_2$.

(٩) لتكن G زمرة منتهية ولتكن $H \leq G$ حيث $[G : H] = 2$ وليكن $o(g) = 2$ لكل $g \in G - H$.

(أ) إذا كان $g \in G - H$ فأثبت أن $\varphi_g \in Aut(H)$ وأن $\varphi_g^2 = I$.

(ب) إذا كان $|H|$ عدداً فردياً فأثبت أن $\varphi_g(h) = h$ إذا وفقط إذا كان $h = e$ لكل $h \in H$.

(ج) أثبت أن G إبدالية .

(١٠) أثبت أن كل من الزمر الجزئية التالية لامتغيرة تماماً (وبالتالي فهي مميزة)

(أ) G' لأي زمرة G (ب) $V \leq A_4$

(ج) $G^n = \{ g^n : g \in G \} \leq G$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$.

(د) $G_n = \{g \in G : g^n = e \} \leq G$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$.

(١١) إذا كانت كل من H و K مميزة في G فأثبت أن $H \cap K$ مميزة في G .

(١٢) إذا كانت كل من H و K مميزة في G فأثبت أن HK مميزة في G .

(١٣) إذا كانت $H \lhd G$ وK مميزة في H فأثبت أن $K \lhd G$.

(١٤) إذا كانت H مميزة في K وكانت K مميزة في G فأثبت أن H مميزة في G.

(١٥) إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من الزمرة المنتهية G حيث $\gcd (|H|,[G : H]) = 1$ فأثبت أن H مميزة في G .

(١٦) ليكن $t \in \mathbb{Q}^*$ وليكن $\varphi_t : (\mathbb{Q},+) \to (\mathbb{Q},+)$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi_t(r) = tr$. أثبت أن $\varphi_t \in Aut(\mathbb{Q})$ ثم استنتج أن الزمر الجزئية المميزة من $\mathbb{Q}$ هي $\{0\}$ و $\mathbb{Q}$ فقط .

(١٧) لتكن $(G,+)$ زمرة إبدالية وليكن p عدداً أولياً يحقق $px = 0$ لكل $x \in G$. إذا كان $|G| = p^n$ فأثبت أن $Aut(G) \cong GL(n,\mathbb{Z}_p)$.

(١٨) إذا كانت $G = H \times K$ وكانت L زمرة جزئية لامتغيرة تماماً من G فأثبت أن $L = (L \cap H) \times (L \cap K)$.

(١٩) بين أياً من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :

(أ) إذا كانت $Aut(G) \cong Aut(H)$ فإن $G \cong H$.

(ب) إذا كانت $Aut(G)$ زمرة دورية فإن G إبدالية .

(ت) إذا كانت $|G| \geq 2$ وكانت G غير إبدالية فإنه من الممكن أن تكون $Aut(G) = \{e\}$.

(ث) إذا كانت G زمرة إبدالية تحتوي على عنصر رتبته لا تساوي 2 فإن $Aut(G) \neq \{e\}$.

(ج) إذا كانت G زمرة دورية منتهية وكانت $H \leq G$ فإن H مميزة في G .

(ح) إذا كانت $H \lhd S_3$ فإن H مميزة في S_3 .

(خ) $Aut(\mathbb{Z}_8) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

(د) $Aut(\mathbb{Z}_{105}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$.

الفصل الرابع

مبرهنات سيلو وتطبيقاتها
SYLOW THEOREMS AND ITS APPLICATIONS

(٤ , ١) تأثير الزمر على المجموعات
Groups Acting on Sets

يعد مفهوم تأثير نظام رياضي على نظام رياضي آخر من المفاهيم الهامة والمتكررة في دراسة الرياضيات ، فعندما يؤثر نظام رياضي على آخر نستطيع إستشفاف معلومات هامة جداً عن النظامين. في هذا البند ندرس مفهوم تأثير زمرة على مجموعة ونوضح هذا المفهوم ببعض الأمثلة . سنوظف هذا المفهوم في البند (٤ , ٣) لإثبات مبرهنات سيلو . كما أنه من الممكن استخدام مفهوم تأثير زمرة على مجموعة في مساعدتنا على تصنيف بعض الزمر .

تعريف (٤ ,١)

لتكن G زمرة ولتكن A مجموعة غير خالية . يعرف تأثير الزمرة G على المجموعة A **(action of a group on a set)** بأنه تطبيق $* : G\times A \to A$ (في العادة نكتب $g*a$ بدلاً من $*(g,a)$) الذي يحقق مايلي :

(أ) $e*a=a$ لكل $a\in A$.

(ب) $(g_1g_2)*a=g_1*(g_2*a)$ لكل $a\in A$ ولكل $g_1,g_2\in G$.

يسمى التأثير المقدم في التعريف (٤ ,١) التأثير الأيسر ، ومن الممكن تعريف التأثير الأيمن بصورة مماثلة . وإذا كان لدينا تأثير (أيمن أو أيسر) لزمرة G على مجموعة A فإننا نقول إن G تؤثر على A .

مثال (٤ ,١)

إذا كان $* : G\times A \to A$ معرفاً بالقاعدة $g*a=a$ لكل $g\in G$ وكل $a\in A$ فيمكن اعتبار أن

G تؤثر على A لأن :

(أ) $e*a=a$ لكل $a \in A$.

(ب) $(g_1g_2)*a = a = g_2 * a = g_1 *(g_2 * a)$ لكل $g_1,g_2 \in G$ وكل $a \in A$.

يسمى هذا التأثير ، التأثير التافه □

مثال (٢ , ٤)

إذا كانت G هي زمرة التبديلات على المجموعة A فإن $* : G \times A \to A$ المعرف بالقاعدة $\sigma * a = \sigma(a)$ لكل $\sigma \in G$ وكل $a \in A$ تأثيراً للزمرة G على A لأن :

(أ) $e*a=e(a)=a$ لكل $a \in A$.

(ب) $(\sigma_1 \circ \sigma_2)*a = (\sigma_1 \circ \sigma_2)(a) = \sigma_1(\sigma_2(a)) = \sigma_1 *(\sigma_2(a)) = \sigma_1 *(\sigma_2 * a)$

لكل $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ وكل $a \in A$ □

مثال (٣ , ٤)

إذا كان V فضاء متجهات على $\mathbb{R}$ فإن $* : \mathbb{R}^* \times V \to V$ المعرف بالقاعدة $r * v = rv$ لكل $r \in \mathbb{R}^*$ وكل $v \in V$ تأثيراً للزمرة $(\mathbb{R}^*, .)$ على المجموعة V لأن :

(أ) $1 * v = 1\, v = v$ لكل $v \in V$.

(ب) $(rs) * v = (rs)v = r(sv) = r(s*v) = r*(s*v)$

لكل $r, s \in \mathbb{R}^*$ وكل $v \in V$ □

مثال (٤ , ٤)

إذا كانت G زمرة فإنه من الواضح أن $* : G \times G \to G$ المعرف بالقاعدة $g_1 * g_2 = g_1g_2$ لكل $g_1,g_2 \in G$ تأثير للزمرة G على المجموعة G □

مثال (٥ , ٤)

إذا كانت $H \le G$ فإنه من الواضح أن $* : H \times G \to G$ المعرف بالقاعدة $h * g = hg$ لكل $h \in H$ وكل $g \in G$ تأثيراً للزمرة H على المجموعة G □

مثال (٦, ٤)

إذا كانت $H \leq G$ وكانت $A = \{ aH \ : \ a \in G \}$ فإن $* : G \times A \to A$ المعرف بالقاعدة $g * aH = (ga)H$ لكل $g \in G$ وكل $aH \in A$ تأثيراً للزمرة G على المجموعة A لأن :

(أ) $e * aH = (ea)H = aH$ لكل $aH \in A$.

(ب) $(g_1g_2) * aH = (g_1g_2a)H = g_1(g_2a)H = g_1(g_2 * aH) = g_1 * (g_2 * aH)$

لكل $g_1, g_2 \in G$ وكل $aH \in A$ □

ملحوظة

يسمى التأثير في الأمثلة من (٤, ٤) إلى (٦, ٤) الضرب من اليسار **(action by left multiplication).**

مثال (٧ , ٤)

إذا كانت $H \leq G$ فإن $* : H \times G \to G$ المعرف بالقاعدة $h * g = hgh^{-1}$ لكل $h \in H$ وكل $g \in G$ تأثيراً للزمرة H على المجموعة G لأن :

(أ) $e * g = ege^{-1} = g$ لكل $g \in G$.

(ب) $$\begin{aligned}(h_1 \ h_2) * g &= (h_1h_2)g(h_1h_2)^{-1} = h_1\left(h_2g\,h_2^{-1}\right)h_1^{-1} \\ &= h_1 * \left(h_2g\,h_2^{-1}\right) = h_1 * (h_2 * g)\end{aligned}$$

لكل $h_1, h_2 \in H$ وكل $g \in G$ □

مثال (٨ , ٤)

إذا كانت $H \lhd G$ فإن $* : G \times H \to H$ المعرف بالقاعدة $g * h = ghg^{-1}$ لكل $g \in G$ وكل $h \in H$ تأثيراً للزمرة G على المجموعة H □

مثال (٩ , ٤)

إذا كانت G زمرة وكانت $A = \{H \ : \ H \leq G\}$ فإن $* : G \times A \to A$ المعرف بالقاعدة $g * H = gHg^{-1}$ لكل $g \in G$ وكل $H \in A$ تأثيراً للزمرة G على المجموعة A لأن :

(أ) $e*H = eHe^{-1} = H$ لكل $H \in A$.

(ب) $(g_1 g_2) * H = (g_1 g_2) H (g_1 g_2)^{-1} = g_1 (g_2 H g_2^{-1}) g_1^{-1}$

$= g_1 * g_2 H g_2^{-1} = g_1 * (g_2 * H)$

لكل $g_1, g_2 \in G$ وكل $H \in A$ □

ملحوظة

يسمى التأثير في الأمثلة من (٧, ٤) إلى (٩, ٤) التأثير بالترافق **(action by conjugation)**.

من الآن فصاعداً نكتب ga بدلاً من $g*a$ إذا لم يحصل التباس.

مبرهنة (١ , ٤)

لنفرض أن الزمرة G تؤثر على المجموعة A . إذا كانت $\approx$ علاقة معرفة على A كالتالي :

$a \approx b \Leftrightarrow \exists g \in G (ga = b)$ لكل $a, b \in A$ فإن $\approx$ علاقة تكافؤ على A .

البرهان

(أ) بما أن $ea = a$ لكل $a \in A$ فإن $a \approx a$. ولذا فإن $\approx$ انعكاسية .

(ب) لنفرض أن $a \approx b$ حيث $a, b \in A$. عندئذٍ ، يوجد $g \in G$ حيث $ga = b$. الآن :

$a = ea = (g^{-1}g)a = g^{-1}(ga) = g^{-1}b$. إذن ، $b \approx a$ ومن ثم فإن $\approx$ تناظرية .

(ج) لنفرض أن $a \approx b$ وأن $b \approx c$ حيث $a, b, c \in A$. عندئذٍ ، يوجد $g_1, g_2 \in G$

حيث $g_1 a = b$ و $g_2 b = c$. إذن ، $(g_2 g_1) a = g_2 (g_1 a) = g_2 b = c$. ولـذا فـإن $a \approx c$.

وبالتالي فإن $\approx$ متعدية ونستنتج إن $\approx$ علاقة تكافؤ ◆

تعريف (٢, ٤)

لتكن الزمرة G تؤثر على المجموعة غير الخالية A .

(أ) تسمى فصول تكافؤ العلاقة $\approx$ المقدمة في المبرهنة (٤,١)، مدارات (**orbits**) G علـى A .

لاحظ أن فصل التكافؤ الذي يحتوي $a \in A$ هو :

$[a] = \{ b \in A : \exists g \in G (ga = b) \} = \{ ga : g \in G \}$.

(ب) يكون تأثير G على A متعـدياً (**transitive**) إذا كـان هنـاك مـدار واحـد فقـط

أي أنه لكل $a, b \in A$ يوجد $g \in G$ بحيث يكون $ga = b$.

مثال (٤,١٠)

إذا كان تـأثير الزمـرة G علـى المجموعـة A هـو التـأثير التافـه المـبين في المثـال (٤,١) فإن مدارات G على A هي عناصر A . لاحظ أن هـذا التـأثير يكـون متعـدياً إذا وفقـط إذا كان $|A|=1$ $\square$

مثال (٤ , ١١)

إذا كانت $G=S_n$ فإن تأثير G على $\{1,2,\ldots,n\}$ $=A$ المبين في المثال (٤ , ٢) متعدياً $\square$

ملحوظة

إذا كانت $H\leq G$ وكان تأثير G على A متعدياً فإنه لـيس مـن الـضروري أن يكـون تـأثير H على A متعدياً ، وهذا ما يوضحه المثال التالي :

مثال (٤,١٢)

إذا كانـت $H=\langle(1\ 2),(3\ 4)\rangle\leq S_4$ فـإن مـدارات H علـى $A=\{1,2,3,4\}$ هي $\{1,2\}$ و $\{3,4\}$. ولذا فإن تأثير H على A ليس متعدياً . لاحظ أنه لا يمكن إيجاد $\sigma\in H$ حيث $\sigma(2)=3$ $\square$

مثال (٤,١٣)

إذا كانت $\sigma\in S_n$ فإنه باستخدام المبرهنة (١ , ١٦) نستطيع أن نجد مـدارات $\langle\sigma\rangle$ بكتابـة σ كتحـصيل دورات منفـصلة . فمـثلاً إذا كانـت $\sigma=(1\ 2)\circ(3\ 4\ 5)(2\ 1)$ فـإن مـدارات $\langle\sigma\rangle$ هي $\{1,2\}$ و $\{3,4,5\}$ $\square$

مبرهنة (٤,٢)

إذا كانت الزمرة G تؤثر على المجموعة A وكان $a\in A$ فإن : $G_a=\{g\in G: ga=a\}\leq G$.

البرهان

بما أن $ea=a$ لكل $a\in A$ فإن $e\in G_a$. ولذا فإن $G_a\neq\phi$. لنفرض الآن أن $g,h\in G_a$.

عندئــــذ ، $ga = ha = a$. ومنـــــه فــــإن $(gh^{-1})\,a = g\,(h^{-1}a) = ga = a$. إذن ، $gh^{-1} \in G_a$. وبالتالي فإن $G_a \le G$ ◆

تعريف (٣ , ٤)

تسمى الزمرة G_a في المبرهنة (٢ , ٤) مثبتة a (**stabilizer of a**) أو الزمرة الموحدَّة الخـــواص (**isotropic group**) . كما تعّرف نواة (**kernel**) تأثير G على A كالتالي :

$$G_A = \{\, g \in G \ : \ ga = a \quad \forall a \in A \} = \bigcap_{a\in A} G_a \,.$$

نقول إن تأثير G على A تأثيراً أميناً (**faithful action**) إذا كانت $G_A = \{e\}$.

مثال (١٤ , ٤)

إذا كان تـــأثير الزمـــرة G علـــى المجموعـــة A هـــو التـــأثير التافـــه المـــبين في المثـــال (٤,١) فإن $G_a = G$ لكل $a \in A$. ولذا فإن $G_A = G$. ومن ثم فإن هذا التـــأثير لـــيس أمينـــاً إلا إذا كانت $G = \{e\}$ □

مثال (١٥ , ٤)

إذا كانت G زمرة وكانت $A = \{\, H \ : \ H \le G \}$ وكان تأثير G على A هو التأثير بالترافق فإن الزمرة المثبتة للعنصر $H \in A$ هي $G_H = \{ g \in G \ : \ gHg^{-1} = H \}$. لاحظ أن G_H ما هي إلا $N(H)$ (منظم H في G) □

المبرهنة التالية تبين لنا العلاقة الوثيقة بين دليل G_a في G وبين عدد عناصر المدار $[a]$.

مبرهنة (٣ , ٤)

إذا أثرت الزمرة G على المجموعة A فإن $\left|[a]\right| = [G : G_a]$ لكل $a \in A$.

البرهان

لنفرض أن $L = \{\, xG_a : x \in G \}$ هي مجموعة جميع المجموعات المشاركة اليسرى للزمرة الجزئية G_a في G . وليكن $[a] = \{\, ga : g \in G \}$ هو مدار a . ولنعرف التطبيق $f : L \to [a]$ بالقـــاعدة

$f(xG_a) = xa$ لكل $xG_a \in L$. الآن :

$$xG_a = yG_a \Leftrightarrow y^{-1}x \in G_a \Leftrightarrow y^{-1}(xa) = a \Leftrightarrow xa = ya \Leftrightarrow f(xG_a) = f(yG_a)$$

إذن ، f معرفاً تعريفاً حسناً وأحادياً . ومن الواضح أيضاً أن f شامل ، لأنه لكل $b \in [a]$ يوجد $x \in G$ حيث $xa = b$. ولذا فإن $f(xG_a) = xa = b$. إذن ،

$$|L| = [G : G_a] = |[a]| \quad ◆$$

نتيجة (٤ , ٤)

إذا أثرت الزمرة G على المجموعة A وكانت $B \subseteq A$ هي مجموعة ممثلات مدارات A فإن $|A| = \sum_{b \in B} [G : G_b]$.

البرهان

باستخدام المبرهنة (٤ , ١) نعلم أن $A = \bigcup_{b \in B} [b]$. وباستخدام المبرهنة (٤ , ٣) نخلص إلى أن :

$$|A| = \sum_{b \in B} |[b]| = \sum_{b \in B} [G : G_b] \quad ◆$$

نستخدم الآن مفهوم تأثير الزمرة على مجموعة لتعميم مبرهنة كيلي .

مبرهنة (٤ , ٥)

إذا أثرت الزمرة G على المجموعة A بالضرب من اليسار (أي $g * a = ga$) فإن :

(أ) لكل $g \in G$ يكون التطبيق $\tau_g : A \to A$ المعرف بالقاعدة $\tau_g(a) = ga$ تبديلاً .

(ب) $\tau_{g_1 g_2} = \tau_{g_1} \circ \tau_{g_2}$ لكل $g_1, g_2 \in G$.

(ج) يكون التطبيق $\psi : G \to S_A$ المعرف بالقاعدة $\psi(g) = \tau_g$ تشاكلاً .

البرهان

(أ) لنفرض أن $\tau_g(a) = \tau_g(b)$ حيث $a, b \in A$. عندئذ ، $ga = gb$. الآن :

$$a = ea = (g^{-1}g)a = g^{-1}(ga) = g^{-1}(gb) = (g^{-1}g)b = eb = b \ .$$

ولذا فإن τ_g أحادي . τ_g شامل أيضاً لأنه إذا كان $b \in A$ فإن :

$\tau_g(g^{-1}b) = g(g^{-1}b) = (gg^{-1})b = eb = b$. إذن ، τ_g تبديل .

(ب) إذا كان $g_1, g_2 \in G$ فإنه لكل $a \in A$:

$$\tau_{g_1g_2}(a) = (g_1g_2)\,a = g_1\,(g_2a) = \tau_{g_1}(g_2a) = \tau_{g_1}(\tau_{g_2}(a)) = (\tau_{g_1}\circ\tau_{g_2})(a)$$

ولذا فإن $\tau_{g_1g_2} = \tau_{g_1}\circ\tau_{g_2}$.

(ج) $\psi(g_1g_2) = \tau_{g_1g_2} = \tau_{g_1}\circ\tau_{g_2} = \psi(g_1)\circ\psi(g_1)$. إذن ، ψ تشاكل ◆

ملحوظات

(١) يسمى التشاكل ψ في المبرهنة (٥ , ٤) التمثيل التبديلي المقرن مع التأثير **(permutation representation associated with the action)** .

(٢) لاحظ أيضاً أن عكس المبرهنة (٥ , ٤) صحيح أيضاً . أي أنه إذا كان $\psi : G \to S_A$ تشاكلاً فإننا نستطيع تعريف تأثير $* : G\times A \to A$ كالتالي : $g*a = \psi(g)(a)$. ولذا فإننا نستنتج أن تأثير زمرة على مجموعة والتمثيل المقرن به ما هما إلا وجهان لعملة واحدة (أي أنه يوجد تقابل بينهما) .

(٣) لاحظ أن نواة تأثير زمرة على مجموعة هي نواة التمثيل التبديلي المقرن به (أنظر التمرين (١٤) من تمارين هذا البند).

نتيجة (٦, ٤) [مبرهنة كيلي المعممة]

إذا كانت $H \leq G$ وكانت $A = \{aH : a \in G\}$ فإنه يوجد تشاكل $\psi : G \to S_A$ يحقق $\text{Ker}\psi \subseteq H$.

البرهان

لاحظ أولاً أن G تؤثر على A بالضرب من اليسار. أي أن $g*(aH) = (ga)H$ لكل $g \in G$ و $aH \in A$. إذن ، باستخدام المبرهنة (٥ , ٤) يوجد تشاكل $\psi : G \to S_A$ معرفاً بالقاعدة $\psi(g) = \tau_g$. الآن :

$$g \in \text{Ker}\psi \Rightarrow \psi(g) = \tau_e \Rightarrow \tau_g(aH) = aH \quad \forall aH \in A$$

$$\Rightarrow g(aH) = aH \quad \forall aH \in A \Rightarrow g(eH) = eH \Rightarrow gH = H \Rightarrow g \in H$$

إذن ، $\text{Ker}\psi \subseteq H$ ◆

النتيجة التالية هي مبرهنة كيلي .

نتيجة (٧ , ٤) [مبرهنة كيلي]

إذا كانت G زمرة فإن G تماثل زمرة جزئية من S_G .

البرهان

إذا أخذنا $H = \{e\}$ في النتيجة (٦ , ٤) فإن $A = G$ وإن $\text{Ker}\psi = \{e\}$. إذن ، ψ تشاكل أحادي من G إلى S_G ◆

النتيجة التالية تعرف أحياناً باسم مبرهنة الدليل **(index theorem)** ، وتزودنا باختبار هام لوجود زمر جزئية ناظمية من زمرة منتهية G .

نتيجة (٨ , ٤) [مبرهنة الدليل]

إذا كانت H زمرة جزئية من الزمرة المنتهية G حيث $[G:H]=n$ ، وإذا كان $|G|$ لا يقسم $n!$ فإن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة .

البرهان

باستخدام النتيجة (٦ , ٤) يوجد تشاكل $\psi : G \to S_n$ يحقق $\text{Ker}\psi \subseteq H$. ولذا ، باستخدام مبرهنة التماثل الأولى نجد أن $G/\text{Ker}\psi \cong \psi(G) \le S_n$. إذن ، $\dfrac{|G|}{|\text{Ker}\psi|}$ يقسم $n!$. وبما أن $|G|$ لا يقسم $n!$ فإننا نجد أن $|\text{Ker}\psi| \neq 1$. وبالتالي فإن $\text{Ker}\,\psi$ زمرة جزئية ناظمية غير تافهة من G ◆

مثال (١٦، ٤)

إذا كانت $H \le G$ حيث $|G| = 80$ و $|H| = 16$ فإن $[G:H] = 5$. وبما أن 80 لا يقسم !5 فإن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة ☐

(٤ ,١ ,١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

لتكن G زمرة منتهية ولتكن $H \leq G$ ، $[G:H]=p$ حيث p هو أصغر قاسم أولي للعدد $|G|$.

أثبت أن $H \lhd G$.

الحل

لنفرض أن $A=\{aH : a \in G\}$. عندئذٍ ، $|A| = [G:H]=p$. باستخدام النتيجة (٦ , ٤) يوجد تشاكل $\psi : G \to S_p$ معرفاً بالقاعدة $\psi(g)=\tau_g$ حيث $\operatorname{Ker}\psi \subseteq H$. ولذا فإن $G/\operatorname{Ker}\psi \cong \psi(G) \leq S_p$. ومنه فإن $|G/\operatorname{Ker}\psi|$ يقسم $p!$. لنفرض أن $|G/\operatorname{Ker}\psi| = n$ ولنفرض أن $n = p_1 p_2 \ldots p_k$ حيث p_i أعداداً أولية . الآن : $n = [G:H][H:\operatorname{Ker}\psi] \geq p$. بما أن $p_i \mid |G|$ لكل i وأن p أصغر قاسم أولي للعدد $|G|$ فإن $p_i \geq p$ لكل i . وبما أن $n \mid p!$ فإن $p_i \mid p!$ لكل i . وبما أن $p_i \geq p$ فإننا نخلص إلى أن $i=1$ وأن $p_i = p$. وبالتالي فإن $n=p$. أي أن $[H:\operatorname{Ker}\psi]=1$. ومنه فإن $H = \operatorname{Ker}\psi \lhd G$ Δ

تمرين (٢)

لتكن G زمرة منتهية من الرتبة pn حيث p عدد أولي $p>n$. ولتكن $H \leq G$ حيث $|H| = p$. أثبت أن $H \lhd G$.

الحل

لنفرض أن $A=\{aH : a \in G\}$. عندئذٍ ، $|A|=[G:H]=\frac{pn}{p}=n$. ليكن $\psi : G \to S_n$ هو التشاكل الذي نحصل عليه من النتيجة (٦ , ٤) . عندئذٍ ، $\operatorname{Ker}\psi \subseteq H$. وبما أن $|H| = p$ فإن $\operatorname{Ker}\psi = \{e\}$ أو أن $\operatorname{Ker}\psi = H$. إذا كان $\operatorname{Ker}\psi = \{e\}$ فإن G تماثل زمرة جزئية من S_n . ومنه فإن $|G| = pn$ يقسم $n!$. أي أن $p \mid (n-1)!$ وهذا مستحيل لأن $p>n$. إذن ، $\operatorname{Ker}\psi = H$. وبالتالي فإن $H \lhd G$ Δ

تمارين (١, ٤)

(١) أثبت أن $r*(x,y)=(x+ry,y)$ تأثير للزمرة $(\mathbb{R},+)$ على المجموعة $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

(٢) أثبت أن $g*a=ag^{-1}$ تأثير للزمرة G على نفسها .

(٣) إذا كان لكل $1\le i\le n$ يوجد $\sigma\in S_n$ حيث $\sigma(1)=i$ فأثبت أن S_n متعدية على $\{1,2,3,\dots,n\}$.

(٤) أثبت أن زمرة كلاين الرابعة V متعدية على $\{1,2,3,4\}$.

(٥) إذا كانت $H=\langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle\le S_4$ فأثبت أن H متعدية على $\{1,2,3,4\}$.

(٦) إذا كانت $H=\langle(1\ 2\ 3)\rangle\le S_4$ فأثبت أن H ليست متعدية على $\{1,2,3,4\}$.

(٧) أثبت أن D_4 متعدية على $\{1,2,3,4\}$.

(٨) لنفرض أن G تؤثر على المجموعة A . أثبت أن هذا التأثير يُحدث لنا تأثير للزمرة G على $P(A)$.

(٩) أثبت أن $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}*(x,y)=(ax+by,cx+dy)$ تأثير للزمرة $GL(2,\mathbb{R})$ على المجموعة $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

(١٠) أثبت أن التأثير $g*a=ga$ للزمرة G على المجموعة G تأثيراً أميناً .

(١١) إذا كانت الزمرة G تؤثر على G بالترافق فأثبت أن :

(أ) إذا كان $|G|>1$ فإن التأثير ليس متعدياً .

(ب) إذا كان $a\in G$ فإن $\{a\} = [a]$ إذا وفقط إذا كان $a\in Z(G)$.

(١٢) ليكن $\sigma*i=\sigma(i)$ هو تأثير الزمرة S_n على المجموعة $\{1,2,3,\dots,n\}$. أثبت أن هذا التأثير أميناً وأن $(S_n)_i\cong S_{n-1}$ لكل $1\le i\le n$.

(١٣) إذا كانت $|G|=160$ وكانت $H\le G$ حيث $|H|=32$ فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة .

(١٤) أثبت أن نواة التأثير للزمرة G على المجموعة A هو نواة التمثيل التبديلي المقرن مع التأثير .

(١٥) إذا كان تأثير الزمرة G على المجموعة A متعدياً فأثبت أن :

(أ) $G_b=gG_ag^{-1}$ لكل $a,b\in A$ وكل $g\in G$ (ب) $G_A=\bigcap_{g\in G} gG_ag^{-1}$.

(١٦) إذا كانت $H\le G$ وكانت G تؤثر على $A=\{aH : a\in G\}$ بالضرب من اليسار فأثبت أن:

(أ) التأثير متعـــــــدي (ب) $G_H = H$ (ج) $G_A = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$.

(د) G_A هي أكبر زمرة جزئية ناظمية من G محتواة في H .

(١٧) لنفرض أن $H \le G$ حيث G زمرة منتهية . و لنفرض أن H تؤثر على G بالضرب من اليسار .أثبت أن $|H| = |[a]|$ لكل $a \in G$ ثم استنتج مبرهنة لاجرانج .

(١٨) إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها $2m$ حيث m عدد فردي فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية رتبتها m .

(١٩) إذا كانت $H \le S_n$ فأثبت أنه إما أن تكون جميع عناصر H فردية أو أن نصف هذه العناصر بالضبط زوجي والنصف الآخر الفردي.

(٢٠) إذا كانت G زمر منتهية لا تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة وكانت $H \le G$ حيث $[G:H] = n$ فأثبت أن G تماثل زمرة جزئية من A_n [إرشاد : استخدم التمرين (١٩) والتمرين (١٦) من تمارين (٣,٣)] .

(٢١) بين أياً من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :

(أ) إذا كانت $H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle \le S_3$ فإن H متعدية على $\{1, 2, 3\}$.

(ب) إذا كانت $H = \langle (2\ 3) \rangle \le S_3$ فإن H متعدية على $\{1, 2, 3\}$.

(ت) S_3 متعدية على $\{1, 2, 3, 4\}$.

(ث) إذا كانت $H \le G$ حيث $|G| = 24$ و $|H| = 8$ فإن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة .

(ج) كل زمرة منتهية G يجب أن تحتوي زمرة جزئية H دليلها عدداً أولياً .

(ح) إذا كانت G زمرة رتبتها 63 ولا تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة فإنها لا يمكن أن تحتوي على زمرة جزئية رتبتها 21 .

(خ) إذا كانت $H \le G$ حيث $|G| = 58$ و $|H| = 29$ فإن $H \lhd G$.

(د) إذا كانت G زمرة رتبتها 66 فإنها تحتـــــوي على زمرة جزئية ناظمية رتبتها 33 .

(ذ) إذا كانت $H \le G$ حيث $[G:H] = n$ وكانت H لا تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة من G فإن H تماثل زمرة جزئية من S_n .

(ر) إذا كانت $H \le G$ حيث $|G| = 112$ و $|H| = 16$ فإن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة .

(٢ , ٤) فصول الترافق ومبرهنة كوشي
Conjugacy Classes and Cauchy's Theorem

في هذا البند سنركز اهتمامنا على نوع هام من تأثير الزمرة على مجموعة وهو التأثير بالترافق . تسمى مدارات هذا التأثير فصول الترافق حيث تساعدنا هذه الفصول في الحصول على تفريق لرتبة الزمرة المنتهية على صورة معادلة تعرف بمعادلة الفصول. ولمعادلة الفصول أهمية خاصة لأنها تلقي الضوء على تركيب الزمر المنتهية . كما أنها تستخدم في برهان مبرهنة كوشي الهامة والتي تعتبر المفتاح الأساسي لبرهان مبرهنات سيلو . ولكن قبل تقديم معادلة الفصول نقدم نوع خاص من الزمر .

تعريف (٤ , ٤)

إذا كان p عدداً أولياً فإننا نقول إن الزمرة G هي زمرة من النوع p **(p-group)** إذا كانت رتبة كل من عناصرها قوة للعدد p . وإذا كانت $H \le G$ فإننا نقول إن H زمرة جزئية من النوع p إذا كانت H زمرة من النوع p .

إذا كانت G زمرة منتهية من الرتبة p^n حيث p عدداً أولياً فإنه من الواضح أن G زمرة من النوع p لأن رتبة أي عنصر في الزمرة يجب أن يقسم رتبة الزمرة . وسنبرهن في نهاية هذا البند أن العكس صحيحاً أيضاً للزمر المنتهية . ولكننا نقدم الآن مثالاً على زمرة غير منتهية من النوع p .

ليكن p عدداً أولياً ولتكن $\mathbb{Q}^p = \left\{ \frac{a}{p^n} : \frac{a}{p^n} \in \mathbb{Q} \right\}$. من الواضح أن $(\mathbb{Q}^p , +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Q} , +)$. لنفرض الآن أن $\mathbb{Z}(p^\infty) = \mathbb{Q}^p / \mathbb{Z}$. من الواضح أن $\mathbb{Z}(p^\infty)$ زمر إبدالية غير منتهية . وعلاوة على ذلك فإن $\mathbb{Z}(p^\infty)$ زمرة من النوع p . لأنه لو كان $x = \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}(p^\infty)$ فإن $p^n x = \frac{p^n a}{p^n} + \mathbb{Z} = a + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. ولذا فإن $o(x)$ يقسم p^n . إذن، $o(x) = p^m$ حيث $m \le n$. وبالتالي فإن $\mathbb{Z}(p^\infty)$ زمرة من النوع p .

سنقدم المزيد من خواص الزمر المنتهية من النوع p مع نهاية هذا البند ولكننا نعود الآن إلى موضوعنا الأساسي .

تعريف (٥ , ٤)

إذا أثرت الزمرة G على المجموعة A وكان $a \in A$ فإننا نقول إن a مثبتاً بالعنصر $g \in G$ **(a fixed by g)** إذا كان $ga = a$. وإذا كان a مثبتاً بجميع عناصر G فإننا نقول إن a مثبتاً بالزمرة G **(fixed by G)** . سنرمز بالرمز A_g (A_G) لجميع عناصر A المثبتة بالعنصر g (بالزمرة G) . أي أن :

$$A_g = \{ a \in A : ga = a \} \quad \text{وأن} \quad A_G = \{ a \in A : ga = a \ \forall g \in G \} .$$

ملحوظة

لاحظ أن $a \in A_G$ إذا وفقط إذا كان $ga = a$ لكل $g \in G$. أي أن $[a] = \{a\}$. وبالتالي فإن A_G هي اتحاد المدارات التي تحتوي كل منها على عنصر واحد فقط .

لنفرض الآن أن G تؤثر على المجموعة المنتهية A ولنفرض أن عدد مدارات G على A هو r ولنفرض أن $\{ a_1 , a_2 , \dots , a_r \}$ هي مجموعة ممثلات المدارات . إذن باستخدام النتيجة (٤ , ٤) نجـــد أن :

$$|A| = \sum_{i=1}^{r} |[a_i]| = \sum_{i=1}^{r} [G : G_{a_i}] \qquad (١)$$

ولكن ، كما لاحظنا أعلاه فإن A_G هي اتحاد المدارات التي يحتوي كل منها على عنصر واحد فقط . فإذا كان عدد هذه المدارات هو k حيث $0 \le k \le r$ فإن المعادلة (١) تصبح :

$$|A| = \sum_{i=1}^{k} |[a_i]| + \sum_{i=k+1}^{r} |[a_i]| = |A_G| + \sum_{i=k+1}^{r} [G : G_{a_i}] \qquad (٢)$$

نستخدم الآن هذه المعادلة للحصول على نتائج على قدر كبير من الأهمية للزمر المنتهية من النوع p .

مبرهنة (٩ , ٤)

إذا كانت G زمرة رتبتها p^n حيث p عدد أولي وإذا كانت G تؤثر على المجموعة المنتهية A فإن $|A| \equiv |A_G| \pmod p$.

البرهان

بما أن $|A| = |A_G| + \sum_{i=k+1}^{r} [G : G_{a_i}]$ وأن $[G : G_{a_i}]$ يقسم $|G|$ لكل $k+1 \le i \le r$ فإن

p يقسم $\left[G : G_{a_i}\right]$ لكل $k+1 \leq i \leq r$. ولذا فإن p يقسم $|A_G| - |A|$. ونخلص إلى أن $|A| \equiv |A_G| \pmod p$ ◆

مبرهنة (١٠ , ٤)

إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $H \leq G$ حيث $|H| = p^k$ و p عدد أولي فإن :

(أ) $[G:H] \equiv [N(H):H] \pmod p$.

(ب) إذا كان p يقسم $[G:H]$ فإن $N(H) \neq H$.

البرهان

(أ) لنفرض أن H تؤثر على $A = \{xH : x \in G\}$ بالضرب من اليسار . بما أن $|H| = p^k$ فإننا نجد باستخدام المبرهنة (٩ , ٤) أن $|A| \equiv |A_H| \pmod p$.الآن ، $|A| = [G:H]$ وأن :

$$xH \in A_H \Leftrightarrow h(xH) = xH \;\forall h \in H \Leftrightarrow x^{-1}hx \in H \;\forall h \in H \Leftrightarrow x^{-1}Hx \subseteq H$$

وبما أن $|x^{-1}Hx| = |H|$ و H منتهية فإننا نجد أن $x^{-1}Hx = H$. إذن ،

$xH \in A_H \Leftrightarrow x^{-1}Hx = H \Leftrightarrow x \in N(H)$. ولذا فإن A_H هي مجموعة جميع المجموعات المشاركة للزمرة الجزئية H في $N(H)$. ومن ثم فإن $|A_H| = [N(H):H]$. وبالتالي فإن $[G:H] \equiv [N(H):H] \pmod p$.

(ب) بما أن p يقسم $[G:H]$ فإنه باستخدام (أ) نجد أن p يقسم $[N(H):H]$. ولذا فإن $[N(H):H] \geq p$. وبالتالي فإن $N(H) \neq H$ ◆

إذا أثرت الزمرة المنتهية G على نفسها بالترافق فإننا نحصل على النتيجة الهامة التالية :

مبرهنة (١١, ٤)

إذا أثرت الزمرة المنتهية G على نفسها بالترافق فإن : $\left[G : G_{a_i}\right] \sum_{i=k+1}^{r} + |G| = |Z(G)|$.

حيث r هو عدد المدارات و k هو عدد المدارات التي تحتوي كل منها على عنصر واحد فقط .

البرهان

في هذه الحالة تأخذ المعادلة (٢) الصورة : $|G| = |G_G| + \sum_{i=k+1}^{r} \left[G : G_{a_i}\right]$. الآن :

$$G_G = \{x \in G : gxg^{-1} = x \;\; \forall g \in G\} = \{x \in G : gx = xg \;\forall g \in G\} = Z(G)$$

إذن ، $\left|G\right| = \left|Z(G)\right| + \sum_{i=k+1}^{r} \left[G : G_{a_i}\right]$ ◆

تعريف (٦ , ٤)

تسمى المعادلة في المبرهنة (٤,١١) معادلة الفصـــول للزمرة G (**class equation of** G).كمـــا تسمى مدارات تأثير G على G بالترافق ، فصول الترافق (**conjugate classes**). ولذا فإن فصل الترافق الذي يحتوي $x \in G$ هو : $[x] = \left\{ gxg^{-1} : g \in G \right\}$.

ملحوظات

(١) لاحظ أنه باستخدام المبرهنة (٣ , ٤) نجد أن عدد عناصر فصل الترافــق$[x]$ (أي عـــدد مرافقات x) هـــو$\left[G:G_x\right]$. ولكن :

$$G_x = \{ g \in G : gxg^{-1} = x \} = \{ g \in G : gx = xg \} = C(x)$$

إذن ، عدد مرافقات x ما هو إلا دليل المركز $C(x)$ في الزمرة G . أي $\left[G : C(x) \right]$.

(٢) أما إذا كانت الزمرة G تؤثر على المجموعة $A = \left\{ H : H \le G \right\}$ بالترافق فإننا نجد أن عـــدد مرافقات $H \in A$ هو$\left[G : G_H \right]$. ولكن $G_H = N(H)$ (في هذه الحالة) . إذن ، عدد مرافقات الزمرة الجزئية H هو دليل المنظم $N(H)$ في G . أي $\left[G : N(H) \right]$.

مثال (١٧ , ٤)

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية وكان $x \in G$ فإن فصل ترافق x هو :

$$[x] = \left\{ gxg^{-1} : g \in G \right\} = \left\{ gg^{-1}x : g \in G \right\} = \left\{ x \right\} .$$

ولذا فإن معادلة الفصول للزمرة الإبدالية لا تقدم لنا معلومات إضافية عن الزمرة □

مثال (١٨ , ٤)

بما أن أي دورتين في S_n تكونان مترافقتين إذا وفقط إذا كانتا متساويتين في الطول فإننا نســـتطيع أن نرى وبسهولة أن فصول ترافق S_3 هي :

$$\{ e \} , \{ (1\ 2\ 3) , (1\ 3\ 2) \} , \{ (1\ 2) , (1\ 3) , (2\ 3) \} .$$

ولذا فإن معادلة فصول S_3 هي : $6 = 1 + 2 + 3$ □

ملحوظة

لكل زمرة G نستطيع أن نرى وبسهولة أن $\langle x\rangle \leq C(x)$. وهذه الحقيقة تساعدنا على حساب فصول ترافق بعض الزمر .

مثال (٤ ,١٩)

لإيجاد معادلة فصول الزمرة Q_8 ، لاحظ أولاً أن $Z(Q_8)=\{e, a^2\}$. الآن : $\langle a\rangle \leq C(a) \leq Q_8$. وبما أن $a \notin Z(Q_8)$ وأن $[Q_8 : \langle a\rangle] = 2$ فإن $C(a)=\langle a\rangle$. ولذا فإن $|[a]| = 2$. وبحساب بسيط نجد أن $[a] = \{a, a^3\}$.

وعلى المنوال نفسه نجد أن فصول ترافق Q_8 هي :

$\{e, a^2\}, \{a, a^3\}, \{b, a^2b\}, \{ab, a^3b\}$. ولذا فإن معادلة الفصول للزمرة Q_8 هي :

$$8 = 2+2+2+2 \quad \square$$

مثال (٤ ,٢٠)

لإيجاد معادلة فصول D_4 ، لاحظ أولاً أن $Z(D_4)=\{e, a^2\}$ وإذا كان $x \notin Z(D_4)$ فإن $|C(x)|=4$. ولذا فإن فصل ترافق x يحتوي على عنصرين فقط . وتكون فصول D_4 هي $\{e, a^2\}, \{a, a^3\}, \{b, a^2b\}, \{ab, a^3b\}$. ولذا فإن معادلة فصول D_4 هي:

$$8 = 2+2+2+2 \quad \square$$

مثال (٤ , ٢١)

إنه ليس بالأمر العسير أن نتحقق من أن فصول ترافق A_4 هي :

$$[(1)] = \{(1)\}$$

$$[(1\ 2\ 3)] = \{(1\ 2\ 3), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}$$

$$[(1\ 3\ 2)] = \{(1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (2\ 3\ 4), (1\ 4\ 3)\}$$

$$[(1\ 2)\circ(3\ 4)] = \{(1\ 2)\circ(3\ 4), (1\ 3)\circ(2\ 4)\circ(1\ 4)\circ(2\ 3)\}$$

ولذا فإن معادلة فصول A_4 هي : $12 = 1+4+4+3$ $\square$

نقدم الآن طريقة لحساب فصول ترافق زمرة التبديلات S_n .

تعريف (٤ , ٧)

(أ) إذا كانت $\sigma \in S_n$ هي تحصيل دورات منفصلة أطوالها $n_1 , n_2 , \ldots , n_k$ حيث $1 \le n_1 \le n_2 \le \ldots \le n_k$ فإن الأعداد $n_1 , n_2 , \ldots , n_k$ تسمى النمط الدوري (**cycle type**) للتبديل σ .

(ب) إذا كان $n \in \mathbb{Z}^+$ فإننا نعني بتجزئة n أي متتالية غير متناقصة من الأعداد الصحيحة الموجبة التي مجموع حدودها يساوي n .

مثال (٤ , ٢٢)

إذا كانت $\sigma = (1\ 2) \circ (3\ 4\ 5) \circ (6\ 7\ 8\ 9) \in S_{11}$ فإن النمط الدوري لها هو $1,1,2,3,4$. أما النمط الدوري للدورة $(2\ 3\ 4\ 5\ 6) \in S_{11}$ فهو $1,1,1,1,1,1,5$ □

مثال (٤ ,٢٣)

تجزئات العدد 5 هي : $\{2,3\},\{1,2,2\},\{5\},\{1,4\},\{1,1,3\},\{1,1,1,2\},\{1,1,1,1,1\}$ □

مبرهنة (٤ , ١٢)

إذا كان $\sigma = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_{k_1}) \circ (b_1\ b_2\ \ldots\ b_{k_2}) \circ \ldots$ هو تحصيل دورات منفصلة وإذا كان $\tau \in S_n$ فإن :

$$\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = (\tau(a_1)\,\tau(a_2)\ldots\tau(a_{k_1})) \circ (\tau(b_1)\,\tau(b_2)\ldots\tau(b_{k_1})) \circ \ldots$$

البرهان

لاحظ أنه إذا كان $\sigma(i) = j$ فإن $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}(\tau(i)) = \tau(\sigma(i)) = \tau(j)$. ولذا ، إذا ظهر الزوج المرتب (i , j) في كتابة σ كتحصيل دورات منفصلة فإن الزوج المرتب $(\tau(i), \tau(j))$ يظهر في كتابة $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ كتحصيل دورات منفصلة ◆

مبرهنة (٤ , ١٣)

إذا كان $\sigma_1 , \sigma_2 \in S_n$ فإن : σ_1 و σ_2 مترافقان في S_n إذا وفقط إذا كان لهما النمط الدوري نفسه.

البرهان

إذا كان σ_2 و σ_1 مترافقان في S_n فإنه باستخدام المبرهنة (١٢, ٤) نجد أن لهما النمط الدوري نفسه. ولبرهان العكس ، نفرض أن σ_2 و σ_1 لهما النمط الدوري نفسه. أي أن :

$$\sigma_1 = \left(a_1\ a_2\ \dots\ a_{n_1} \right) \circ \left(b_1\ b_2\ \dots\ b_{n_2} \right) \circ\ \dots\ \circ \left(x_1\ x_2\ \dots\ x_{n_k} \right)$$

$$\sigma_2 = \left(\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_{n_1} \right) \circ \left(\beta_1\ \beta_2\ \dots\ \beta_{n_2} \right) \circ\ \dots\ \circ \left(\chi_1\ \chi_2\ \dots\ \chi_{n_k} \right)$$

ولنفرض أن :

$$.\ \tau = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n_1} & \dots & x_1 & x_2 & \dots & x_{n_k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n_1} & \dots & \chi_1 & \chi_2 & \dots & \chi_{n_k} \end{pmatrix}$$

إذن ، $\tau \circ \sigma_1 \circ \tau^{-1} = \sigma_2$. وبالتالي فإن σ_2 و σ_1 مترافقان ◆

نتيجة (١٤ , ٤)

عدد فصول ترافق S_n يساوي عدد تجزئات n .

البرهان

لنفرض أن $\sigma \in S_n$. إذا كان $n_1, n_2\ \dots\ ,n_k$ هو النمط الدوري للتبديل σ فإنه من الواضح أن $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. ولذا فإننا نحصل على تجزئة للعدد n . الآن باستخدام المبرهنة (١٣, ٤) نجد أن σ يرافق أي تبديل آخر له نفس النمط الدوري . ومن ثم فإننا نحصل على التجزئة نفسها للعدد n . إذن ، نخلص إلى أن التبديلات المترافقة تقابل تجزيئاً واحداً للعدد n . وبالتالي فإنه يوجد تقابل بين فصول ترافق S_n وتجزئات n ◆

نقدم الآن صيغة (دون برهان) لحساب عدد عناصر كل من فصول ترافق S_n .

مبرهنة (١٥ , ٤)

لنفرض أن $\sigma \in S_n$. ولنفرض أن $m_1, m_2, \dots, m_k$ هي الأعداد الصحيحة المختلفة التي تظهر في النمط الدوري للتبديل σ (بما في ذلك الدورات من الطول 1) . ولنفرض لكل $i \in \{ 1 , 2 , \dots , s \}$ أن σ تحتوي على k_i دورة من الطول m_i (أي أن $\sum_{i=1}^{s} k_i m_i = n$)

عندئذٍ يكون عدد عناصر فصل ترافق σ (أي عدد مرافقات σ) هو :

$$\|[\sigma]\| = \frac{n!}{(k_1!\, m_1^{k_1})\,(k_2!\, m_2^{k_2})\ \ldots\ (k_s!\, m_s^{k_s})} .$$

مثال (٢٤ , ٤)

إذا كانت $\sigma = (1\ \ 2) \circ (3\ \ 4) \in S_n$ حيث $n \geq 4$ فإن $m_1 = 1, m_2 = 2$ وإن $k_1 = n-4, k_2 = 2$. ولذا فإن :

$$\|[\sigma]\| = \frac{n!}{\left((n-4)!\ 1^{n-4}\right)\left(2!\ 2^2\right)} = \frac{n!}{8\,(n-4)!} .$$

أما إذا كانت $\sigma = (1\ \ 2) \circ (3\ \ 4\ \ 5) \in S_5$ فإن $m_1 = 2\ ,\ m_2 = 3$ وأن $k_1 = k_2 = 1$

ونستنتج أن $\|[\sigma]\| = \dfrac{5!}{(1!2^1)(1!3^1)} = 20$ □

مثال (٢٥ , ٤)

الجدول التالي يبين لنا فصول ترافق وعدد عناصر كل من هذه الفصول للزمرة S_5 :

تجزئة 5	ممثل فصل الترافق	عدد عناصر فصل الترافق
1,1,1,1,1	(1)	1
1,1,1,2	$(1\,2)$	10
1,1,3	$(1\,2\,3)$	20
1,4	$(1\,2\,3\,4)$	30
5	$(1\,2\,3\,4\,5)$	24
1,2,2	$(1\ \ 2) \circ (3\ \ 4)$	15
2,3	$(1\ \ 2) \circ (3\ \ 4\ \ 5)$	20

ولذا فإن معادلة فصول S_5 هي : $120 = 1 + 10 + 20 + 30 + 24 + 15 + 20$ □

ننتقل الآن إلى تقديم بعض تطبيقات معادلة الفصول .

مبرهنة (١٦ , ٤)

إذا كانت G زمرة رتبتها p^n حيث p عدداً أولياً فإن $1 < |Z(G)|$.

البرهان

نعلم أن : $|G| = |Z(G)| + \sum_{i=k+1}^{r} [G : G_{a_i}]$. إذا كان $|G| = |Z(G)|$ فإن النتيجة واضحة . ولنفرض إذن أن $Z(G)$ زمرة جزئية فعلية من G . بما أن $[G : G_{a_i}] = \frac{|G|}{|G_{a_i}|}$ فإن $[G : G_{a_i}]$ يقسم p^i لكل $k+1 \le i \le r$. ولذا فإن p يقسم $[G : G_{a_i}]$ لكل $k+1 \le i \le r$.

ومنه فإن p يقسم $|G| - \sum_{i=k+1}^{r} [G : G_{a_i}]$. إذن ، p يقسم $|Z(G)|$. ونستنتج أن $|Z(G)| \ge p$ ◆

نتيجة (١٧ , ٤)

إذا كانت G زمرة رتبتها p^2 فإن G إبدالية .

البرهان

بما أن $|Z(G)| > 1$ فإن $|Z(G)| = p^2$ أو أن $|Z(G)| = p$. إذا كان $|Z(G)| = p^2$ فإن $G = Z(G)$. ومنه فإن G إبدالية . أما إذا كان $|Z(G)| = p$ فإن $|G/Z(G)| = p$ إذن ، $G/Z(G)$ دورية . وبالتالي فإن G إبدالية حسب المبرهنة (٣,٤٥) ◆

باستخدام المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية والنتيجة (١٧, ٤) نحصل على :

نتيجة (١٨, ٤)

يوجد فقط زمرتان غير متماثلتين من الرتبة p^2 حيث p عدداً أولياً هما $\mathbb{Z}_{p^2}$ و $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ ◆

لقد سبق وأن قدمنا في الفصل الثالث مبرهنة كوشي للزمر الإبدالية المنتهية . نستخدم الآن معادلة الفصول لإثبات مبرهنة كوشي للزمر المنتهية بصورة عامة.

مبرهنة (١٩ , ٤) [مبرهنة كوشـــي]

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها n وكان p عدداً أولياً يقسم n فإن G تحتوي على عنصر من الرتبة p ومن ثم زمرة جزئية من الرتبة p .

البرهان

باستخدام الاستقراء الرياضي على $|G| = n$. إذا كان $n = 2$ فإن G دورية من الرتبة 2 ولذا فإنها تحتوي على عنصر من الرتبة 2 .

لنفرض الآن أن العبارة صحيحة لكل $2 \le r < n$. لدينا معادلة الفصول للزمرة G :

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{a \notin Z(G)}^{r} [G : G_{a_i}] .$$

إذا كانت $G = Z(G)$ فإن G إبدالية . ومن ثم فإن العبارة صحيحة باستخدام المبرهنة (٤٥, ٣) .

لنفرض إذن ، أن $G \neq Z(G)$ وأن $a \in G - Z(G)$. عندئذ ، $G \neq G_a$. ولذا فإن $[G : G_a] > 1$. باستخدام مبرهنة لاجرانج لدينا $|G_a| < |G| = [G : G_a] |G_a|$. الآن إما أن p يقسم $|G_a|$ أو أن p لا يقسم $|G_a|$. إذا كان p يقسم $|G_a|$ فإنه باستخدام فرضية الاستقراء نجد أن G_a (ومن ثم G) تحتوي على عنصر رتبته p . أما إذا كان p لا يقسم $|G_a|$ لكل $a \notin Z(G)$ فإننا نجد أن p يقسم $[G : G_a]$ (لأن p يقسم $|G|$) . إذن p يقسم $|G| - \sum_{a \notin Z(G)}^{r} [G : G_a]$. ومنه فإن p يقسم $|Z(G)|$. وبما أن $Z(G)$ إبدالية فإنه باستخدام المبرهنة (٤٥ , ٣) نجد أن $Z(G)$ (ومن ثم G) تحتوي على عنصر رتبته p ◆

نتيجة (٢٠ , ٤)

إذا كانت G زمرة منتهية من النوع p (أي رتبة أي عنصر في G هي قوة للعدد p) فإن $|G| = p^n$.

البرهان

لنفرض أن G زمرة منتهية من النوع p . ولنفرض لغرض التناقض أن q عدد أولي لا يساوي p ويقسم $|G|$. عندئذ ، باستخدام مبرهنة كوشي تحتوي G على عنصر رتبته q وهذا مستحيل . إذن ، p هو القاسم الأولي الوحيد لرتبة الزمرة G . وبالتالي فإن $|G| = p^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$ ◆

(٤ ,٢ ,١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

أثبت أنه لا يمكن إيجاد زمرة منتهية $G \neq \{e\}$ تحقق الشرط التالي:

كل $e \neq a \in G$ يتبدل مع نصف عناصر G .

الحل

لنفرض أن $|G| = n > 1$ تحقق الشرط . وليكن $e \neq x \in G$. عندئذٍ ، $|C(x)| = \frac{n}{2}$. ولذا فإن $2 = [G : C(x)] = \|[x]\|$. ولكن لدينا من معادلة الفصول للزمرة G :

$$|G| = \|[e]\| + \sum_{x \neq e} \|[x]\| .$$

بما أن $\|[e]\| = 1$ وأن $\|[x]\| = 2$ لكل $e \neq x \in G$ فإننا نجد أن $|G|$ فردي . ولكن $|C(x)| = \frac{n}{2} = \frac{|G|}{2}$. ومنه فإن $|G|$ زوجي وهذا مستحيل Δ

تمرين (٢)

إذا كانت G زمرة من الرتبة pq حيث p و q عددان أوليان فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة .

الحل

إذا كان $p = q$ فإن $|G| = p^2$. ولذا فإن p إبدالية. وباستخدام مبرهنة كوشي نجد أن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة p وهذه الزمرة ناظمية لأن G إبدالية .

أما إذا كان $p > q$ فإننا نجد باستخدام مبرهنة كوشي أيضاً أن G تحتوي على زمرة جزئية H من الرتبة p . وباستخدام التمرين (٢) من التمارين المحلولة (١, ١, ٤) نجد أن $H \lhd G$ Δ

تمرين (٣)

إذا كانت G زمرة منتهية من الرتبة p^n حيث p عدد أولي و $n \in \mathbb{Z}^+$ فأثبت أن أي زمرة جزئية من G رتبتها p^{n-1} يجب أن تكون ناظمية من G .

الحل

نستخدم الاستقراء الرياضي على n .

إذا كان $n = 1$ فإن G زمرة دورية من الرتبة p ولذا فإن أي زمرة جزئية من G يجب أن تكون ناظمية من G .

لنفرض الآن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر من الرتبة p^m حيث $1 \leq m < n$. ولنفرض أن $H \leq G$ من الرتبة p^{n-1} . إذا كانت $H \neq N(H)$ فإن $|N(H)| > p^{n-1}$. ولذا فإن $|N(H)| = p^n$.

ومنه فإن $N(H)=G$. وبالتالي $H \lhd G$. لنفرض الآن أن $H=N(H)$. بما أن G زمرة من الرتبة p^n فإن $Z(G)\neq\{e\}$. ولذا باستخدام مبرهنة كوشي يوجد $e\neq a\in Z(G)$ حيث $o(a)=p$. باستخدام فرضية الاستقراء نجد أن $K=\langle a\rangle \lhd G$. وبما أن $|H/K|=p^{n-2}$ وأن $|G/K|=p^{n-1}$ فإننا نجد باستخدام فرضية الاستقراء أن $H/K \lhd G/K$ وبالتالي فإن $H \lhd G$ Δ

تمارين (٢ , ٤)

(١) لتكن H زمرة جزئية من G وليكن $x\in G$. أثبت أن عدد مرافقات x في H أصغر من أو يساوي عدد مرافقات x في G . أعط مثالاً على زمرة G بحيث يكون عدد مرافقات x في H أصغر من عدد مرافقات x في G .

(٢) إذا كانت $G=S_5$ وكانت $H=A_5$ وكان $\alpha=(1\ 2\ 3)$ فأثبت أن عدد مرافقات α في A_5 يساوي عدد مرافقات α في S_5 . ومن ثم استنتج أن جميع الدورات الثلاثية مترافقة في A_5 .

(٣) لتكن G زمرة منتهية ولتكن $H\leq G$ حيث $[G:H]=2$. وليكن $x\in H$ حيث أن عدد مرافقات x في G هو m . أثبت أن عدد مرافقات x في H هو m أو $\frac{m}{2}$.

(٤) أثبت أن A_5 مولدة بدورات ثلاثية .

(٥) أثبت أن A_5 لا تحتوي على زمرة جزئية فعلية ناظمية غير تافهة .

(٦) جد معادلة فصول الزمرة A_5 .

(٧) جد معادلة فصول الزمرة S_6 .

(٨) إذا كانت H زمرة إبدالية ناظمية من الزمرة G فأثبت أنه يوجد تشاكل من G/H إلى $\mathrm{Aut}(H)$.

(٩) إذا كانت كل من H وK زمرة جزئية من G فأثبت أن $H\lhd K$ إذا وفقط إذا كان $H\subseteq K\subseteq N(H)$.

(١٠) إذا كانت الزمرتان الجزئيتان H وK مترافقتين في G فأثبت أن $N(H)$ و $N(K)$ مترافقتان في G .

(١١) إذا كانت G زمرة غير إبدالية رتبتها p^3 فأثبت أن $Z(G)$ زمرة دورية .

(١٢) إذا أثرت الزمرة G على نفسها بالترافق فأثبت أنه يوجد تشاكل $\psi: G\rightarrow \mathrm{Aut}(G)$

حيث $\mathrm{Ker}\psi = Z(G)$.

(١٣) إذا كانت $H \lhd G$ وكانت كل من H و G/H زمرة من النوع p فأثبت أن G زمرة من النوع p .

(١٤) إذا كانت G زمرة منتهية وكان للعنصر $a \in G$ مرافقان فقط فأثبت أن $C(a) \lhd G$.

(١٥) إذا كانت G زمرة منتهية من الرتبة n وكان عدد فصول ترافقها هو 2 فأثبت أن $n = 2$.

(١٦) إذا كانت G زمرة من الرتبة p^m حيث p عدداً أولياً وكانت H زمرة جزئية فعلية من G فأثبت أنه يوجد $a \in G - H$ حيث $aHa^{-1} = H$.

(١٧) إذا كانت $H \leq G$ فأثبت أن $H \lhd G$ إذا وفقط إذا كانت H هي إتحاد فصول ترافق G.

(١٨) إذا كانت G زمرة من الرتبة p^n حيث p عدداً أولياً و $n \in \mathbb{Z}^+$ فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة p^i لكل $0 \leq i \leq n$.

(١٩) لتكن $\sigma = (a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_r) \in S_n$.

(أ) جد عدد فصول ترافق σ (ب) احسب $|C(\sigma)|$ (ج) عين $C(\sigma)$

(٢٠) بين أياً من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :

(أ) إذا كان $a \in G$ فإن $a \in Z(G)$ إذا وفقط إذا كان $|[a]| = \{a\}$.

(ب) إذا كانت $|G| = 14$ فإن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية رتبتها 7 .

(ت) إذا كانت $|G| = 15$ فإن G إبدالية .

(ث) إذا كانت $|G| = 28$ وكانت G تحتوي على زمرة جزئية وحيدة من الرتبة 4 فإن G إبدالية .

(ج) إذا كانت $|G| = 81$ فإن G تحتوي على زمرة جزئية فعلية ناظمية رتبتها أكبر من 3 .

(ح) يوجد عنصران $\sigma, \mu \in A_5$ مترافقان في S_5 ولكنهما غير مترافقين في A_5 .

(خ) إذا كانت $|G| = 99$ فإن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية وحيدة من الرتبة 11.

(٣, ٤) مبرهنات سيلو

Sylow Theorems

لتكن G زمرة منتهية . لقد سبق وأن برهنا (مبرهنة لاجرانج) أن رتبة أي زمرة جزئية من G يجب أن تقسم رتبة G . ولقد بينا أيضاً أن عكس مبرهنة لاجرانج صحيحاً أيضاً للزمر الدورية

والزمر الإبدالية المنتهية . ولكن عكس مبرهنة لاجرانج ليس صحيحاً للزمر المنتهية بصورة عامة ، إذ سبق وأن بينا أن A_4 لا تحتوي على زمرة جزئية رتبتها 6 .

إن التحقق من وجود زمر جزئية معينة من زمر منتهية مسألة صعبة بصورة عامة. ومن أهم المنجزات في هذا الاتجاه ما قدمه الرياضي النرويجي لدويغ سيلو (**Ludwig Sylow**) حيث قدم لنا ثلاث مبرهنات ، الأولى منها تنص على أنه إذا كان p^k يقسم رتبة الزمرة G حيث p عدداً أولياً فإن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة p^k . والمبرهنة الثانية تضمن لنا ترافق (ومن ثم تماثل) جميع هذه الزمر الجزئية ، وأما المبرهنة الثالثة فهي تزودنا بمعلومات عن عدد هذه الزمر الجزئية .

من الجدير ذكره هنا أن سيلو برهن مبرهناته الثلاث لزمر التبديلات ، وكان الرياضي جورج فروبينس (**George Frobenius**) هو أول من قدم برهاناً عاماً لهذه المبرهنات حيث كانت مبرهنة كيلي حافزاً له لتقديم هذه البراهين . وبعد ذلك نشر العديد من البراهين المختلفة لمبرهنات سيلو ولكننا سنقدم هنا ما نراه أفضل هذه البراهين وهو البرهان الذي يعتمد على مبرهنة كوشي وتأثير الزمرة على مجموعة .

مبرهنة (٤,٢١) [مبرهنة سيلو الأولى]

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها $p^n m$ حيث p عدداً أولياً، $n \in \mathbb{Z}^+$ و $\gcd(p,m) = 1$ فإن :

(أ) G تحتوي على زمرة جزئية رتبتها p^k لكل $1 \le k \le n$.

(ب) إذا كانت $H \le G$ حيث $|H| = p^k$ ، $1 \le k < n$ فإنه يوجد زمرة جزئية K من G رتبتها p^{k+1} بحيث تكون $H \lhd K$.

البرهان

(أ) بإستخدام الإستقراء الرياضي على n . إذا كان $n = 1$ فإن $|G| = pm$. وباستخدام مبرهنة كوشي G تحتوي على زمرة جزئية رتبتها p .

لنفرض الآن أن G تحتوي على زمرة جزئية H رتبتها p^k لكل $1 \le k < n$. عندئذٍ H زمرة جزئية فعلية من G. وباستخدام المبرهنة (٤,١٠) لدينا :

$$[G:H] \equiv [N(H):H] \pmod p$$

وكذلك $H \ne N(H)$ لأن p يقسم $[G:H]$. الآن :

p يقسم $[N(H):H] = |N(H)/H|$. ولذا فباستخدام مبرهنة كوشي يوجد زمرة جزئية K/H من $N(H)/H$ رتبتها p حيث $K \le N(H) \le G$. إذن :

$|K| = |K/H|\,|H| = pp^k = p^{k+1}$. ومن ثم فإن K زمرة جزئية من G رتبتها p^{k+1} ونكون قد أنتهينا .

(ب) إذا كانت $H \le G$ حيث $|H| = p^k$ فإنه باستخدام الفقرة (أ) نجد أن $|K| = p^{k+1}$. ومن التمرين (٣) من التمارين المحلولة (١, ٢, ٤) نجد أن $H \lhd K$ ◆

تعريف (٨ , ٤)

إذا كانت G زمرة منتهية وكان p عدداً أولياً يقسم $|G|$ فإننا نقول إن الزمرة الجزئية P من G هـــي زمرة سيلو من النوع p (**Sylow p-subgroup**) إذا كانت P زمرة جزئية أعظمية من النوع p (أي أنها غير محتواة فعلياً في زمرة جزئية أخرى من النوع p) .

لاحظ أن مبرهنة سيلو الأولى تضمن لنا وجود زمر سيلو من النوع p لكل p يقـــسم $|G|$ وإذا كانت $|G| = p^n m$ فإن رتبة زمرة سيلو من النوع p هي p^n . سنرمز لمجموعة زمر سيلو الجزئية من G من النوع p بالرمز $Syl_p(G)$.

مبرهنة (٢٢, ٤) [مبرهنة سيلو الثانية]

إذا كانـــت $|G| = p^n m$ حيـــث p عـــدداً أوليـــاً و$n \in \mathbb{Z}^+$ و $\gcd(p,m)=1$ وكانـــت $H, K \in Syl_p(G)$ فإن H وK مترافقتان (ومن ثم متماثلتان) .

البرهان

لنفرض أن $A = \{aH : a \in G\}$ وأن K تؤثر على A بالضرب من اليسار . باستخدام المبرهنة (٩ , ٤) نجد أن $|A| \equiv |A_K| \pmod p$. الآن : $|A| = [G:H]$ و أن $A_K = \{aH \in A : (ka)H = aH\ \forall k \in K\} \ne \phi$. بما أن $H \in Syl_p(G)$ فـــإن p لا يقسم $|A|$ ومن ثم فإن $|A_K| \ne 0$. لنفرض أن $aH \in A_K$. عندئذ :

$k(aH) = aH\ \forall k \in K \Rightarrow a^{-1}ka \in H\ \forall k \in K \Rightarrow a^{-1}Ka \subseteq H$. وبما أن $|H| = |K| = |a^{-1}Ka|$ فإن $a^{-1}Ka = H$. وبالتالي فإن K وH مترافقتان ◆

نتيجة (٤ ,٢٣)

إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $H \in Syl_p(G)$ فإن H وحيدة إذا وفقط إذا كانت $H \lhd G$.

البرهان

لنفرض أولاً أن H وحيدة . لاحظ أنه لكل $g \in G$ لدينا $|H| = |gHg^{-1}|$. ولذا فإن $gHg^{-1} \in Syl_p(G)$. إذن ، $gHg^{-1} = H$. ومنه فإن $H \lhd G$. ولبرهان العكس ، نفرض أن $H \lhd G$. ولنفرض ان $K \in Syl_p(G)$. إذن ، باستخدام مبرهنة سيلو الثانية نجد أن $K = xHx^{-1}$ حيث $x \in G$. ولكن $xHx^{-1} = H$ لأن $H \lhd G$. إذن ، $K = H$ ◆

مبرهنة (٤ , ٢٤) [مبرهنة سيلو الثالثة]

إذا كانت G زمرة منتهية من الرتبة $p^n m$ حيث p عدداً أولياً ، $n \in \mathbb{Z}^+$ و $\gcd(m,p)=1$

وإذا كان n_p هوعدد زمر سيلو الجزئية من النوع p فإن :

(أ) $n_p \equiv 1 \pmod p$ (ب) n_p يقسم $|G|$

البرهان

لتكن $A = \{H \leq G : H \in Syl_p(G)\}$.

(أ) لنفرض أن $H \in A$ تؤثر على A بالترافق . عندئذٍ ، باستخدام المبرهنة (٩ , ٤) نجد أن $|A| \equiv |A_H| \pmod p$.الآن، $|A| = n_p$ وأن :

$K \in A_H \Rightarrow hKh^{-1} = K \forall h \in H \Rightarrow H \subseteq N(K)$.ومنه فإن $H,K \in Syl_p(N(K))$. ولذا فهما مترافقتان في $N(K)$. أي أن $xKx^{-1} = H$ حيث $x \in N(K)$. وعليه فإن ، $H = K$.

ولذا فإن $A_H = \{H\}$. إذن ، $n_p = |A| \equiv 1 \pmod p$.

(ب) لبرهان أن n_p يقسم $|G|$ نفرض أن G تؤثر على A بالترافق . باستخدام المبرهنة (٣ , ٤) نجد أن $|[H]| = [G : G_H]$ لكل $H \in A$. ولكن $\{gHg^{-1} : g \in G\} = [H]$. وأن $G_H = \{g \in G : gHg^{-1} = H\} = N(H)$. وباستخدام المبرهنة الثانية لسيلو نعلم أن جميع زمر سيلو من النوع p مترافقة . إذن يوجد مدار واحد فقط للمجموعة A . ومنه فإن $A = [H]$.

ولذا فإن $n_p = |A| = |[H]| = [G : G_H] = [G : N(H)]$. ونخلص إلى أن n_p يقسم $|G|$ ◆

مثال (٤ , ٢٦)

في هذا المثال سنحدد جميع زمر سيلو الجزئية للزمرة S_3 . لدينا: $|S_3| = 2 \times 3$ ، وباستخدام مبرهنة

سيلو الثالثة نجد أن $n_2 \equiv 1 \pmod 2$ ويقسم 6 . ومنه فإن ، $n_2 = 1$ أو $n_2 = 3$. ولكن كل من $\langle (1\ 2) \rangle$،$\langle (1\ 3) \rangle$ و $\langle (2\ 3) \rangle$ زمرة جزئية من S_3 رتبتها 2 . إذن ، $n_2 = 3$. وبما أن $n_3 \equiv 1 \pmod 3$ فإن $n_3 = 1$. إذن ، توجد زمرة سيلو وحيدة من النوع 3 وهي $H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$. ومن ثم فإن $H \triangleleft S_3$ □

مثال (٤ , ٢٧)

سنحدد جميع زمر سيلو الجزئية للزمرة A_4 . نعلم أن $|A_4| = 2^2 \times 3$ ، كما أن $n_2 \equiv 1 \pmod 2$. ولذا فإن $n_2 = 1$ أو $n_2 = 3$. ولكن باستخدام مبرهنة لاجرانج نعلم أن أي زمرة جزئية من A_4 رتبتها 4 لا يمكن أن تحتوي على دورة طولها 3 . إذن، $n_2 = 1$ وهذه الزمرة هي :

$$H = \{(1), (1\ 3)\circ(2\ 4), (1\ 4)\circ(2\ 3), (1\ 2)\circ(3\ 4)\} \triangleleft A_4$$

الآن ، $n_3 \equiv 1 \pmod 3$. ولذا فإن $n_3 = 1$ أو $n_3 = 4$. ولكن كل من الزمر التالية زمرة جزئية من A_4 رتبتها 3 :

$H_1 = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$، $H_2 = \langle (1\ 2\ 4) \rangle$ ، $H_3 = \langle (1\ 3\ 4) \rangle$ و $H_4 = \langle (2\ 3\ 4) \rangle$.

وبالتالي فإن $n_3 = 4$ □

مثال (٤ , ٢٨)

سنحدد جميع زمر سيلو الجزئية للزمرة S_4 ونبين أنها مترافقة . لاحظ أن $|S_4| = 2^3 \times 3$ وأن $n_3 \equiv 1 \pmod 3$. ومنه فإن ، $n_3 = 1$ أو $n_3 = 4$. ولكن كل من الزمر التالية زمرة جزئية من S_4 رتبتها 3 : $\langle (2\ 3\ 4) \rangle$ ،$\langle (1\ 3\ 4) \rangle$ ،$\langle (1\ 2\ 4) \rangle$ و$\langle (1\ 2\ 3) \rangle$. إذن ، $n_3 = 4$. لاحظ أيضاً أن :

$$\langle (1\ 2\ 4) \rangle = (3\ 4)\circ\langle (1\ 2\ 3) \rangle\circ(3\ 4)$$
$$\langle (1\ 3\ 2) \rangle = (2\ 4)\circ\langle (1\ 2\ 3) \rangle\circ(2\ 4)$$
$$\langle (2\ 3\ 4) \rangle = (1\ 4)\circ\langle (1\ 2\ 3) \rangle\circ(1\ 4)$$

ولذا فإنها جميعاً مترافقة . الآن $n_2 \equiv 1 \pmod 2$. ومن ثم فإن $n_2 = 1$ أو $n_2 = 3$. ولكننا نعلم أن D_4 زمرة جزئية من S_4 رتبتها 8 . وإذا اعتبرنا أن D_4 زمرة تناظرات المربع الذي رؤوسه 1,2,3,4 فإننا نجد أن :

$$H = D_4 = \{(1), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3)\circ(2\ 4), (1\ 4\ 3\ 2), (1\ 3), (2\ 4), (1\ 2)\circ(3\ 4), (1\ 4)\circ(2\ 3)\}$$

وإذا أعدنا ترتيب الرؤوس مرة على الصورة 1,3,2,4 ومرة على الصورة 1,3,4,2 فإننا نحصل على الزمرتين :

$$K \cong D_4 = \{(1), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 2)\circ(3\ 4), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 2), (3\ 4), (1\ 4)\circ(2\ 3), (1\ 3)\circ(2\ 4)\}$$

$$L \cong D_4 = \{(1), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4)\circ(2\ 3), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (1\ 3)\circ(2\ 4), (1\ 2)\circ(3\ 4)\}$$

إذن ، $n_2 = 3$. ومن السهل أيضاً أن نرى أن :

$K = (2\ 3)\circ H\circ(2\ 3)$ و أن $L = (2\ 3\ 4)\circ H\circ(2\ 3\ 4)^{-1}$. وبالتالي فجميعها مترافقة □

نستخدم الآن مبرهنات سيلو لمساعدتنا في تصنيف بعض الزمر المنتهية .

مبرهنة (٤ , ٢٥)

عدد الزمر غير المتماثلة من الرتبة 12 يساوي 5 .

البرهان

لنفرض أن G زمرة رتبتها 12 . إذا كانت G إبدالية فإنه باستخدام المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية نجد أن $G \cong \mathbb{Z}_{12}$ أو $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$. وبهذا فإنه يوجد زمرتين إبداليتين غير متماثلتين من الرتبة 12 . لنفرض الآن أن G غير إبدالية . ولنفرض أن $P \in Syl_3(G)$. إذن ، $|P| = 3$ و $[G:P] = 4$. إذا جعلنا G تؤثر على $A = \{xP : x \in G\}$ بالضرب من اليسار فإننا نحصل باستخدام النتيجة (٦ , ٤) على تشاكل $\psi : G \to S_4$ حيث $Ker\psi \subseteq P$. إذن ، $Ker\psi = \{e\}$ أو $Ker\psi = P$. إذا كان $Ker\psi = \{e\}$ فإن ψ أحادي . ولذا فإن G تماثل زمرة جزئية من S_4 رتبتها 12 . ولكن باستخدام تمرين (١٥) من تمارين (٣ , ٣) نجد أن A_4 هي الزمرة الجزئية الوحيدة من S_4 من الرتبة 12 . إذن ، $G \cong A_4$.

إذا كان $Ker\psi = P$ فإن $P \lhd G$. ولذا فإن P وحيدة . ومن ثم فإن G تحتوي على عنصرين فقط رتبة كل منهما 3 . لنفرض أن x أحد هذين العنصرين . عندئذ ، $|[x]| = 1$ أو $|[x]| = 2$.

ومنـــــه فـــــإن $[G:C(x)]=1$ أو $[G:C(x)]=2$. إذن ، $|C(x)|=6$ أو $|C(x)|=12$.
وباستخدام مبرهنة كوشي فإن $C(x)$ تحتوي على عنصر y من الرتبة 2. لنفـــرض أن $a=xy$.
إذن، $o(a)=6$. ومنه فإن $H=\langle a\rangle \lhd G$. لنفرض الآن أن $e\neq b\in G$ وأن $b\notin H$.
إذن ، $bab^{-1}\in H$. ولذا فإن bab^{-1} هو أحد العناصر e,a,a^2,a^3,a^4,a^5 . الآن :
إذا كان $bab^{-1}=e$ فإن $a=e$ وهذا تناقض . إذا كان $bab^{-1}=a$ فإن $ab=ba$ وهذا تناقض .
إذا كان $bab^{-1}=a^2$ فإن $(bab^{-1})^3=ba^3b^{-1}=a^6=e$. ولذا فإن $a^3=e$ وهذا تناقض .
إذا كان $bab^{-1}=a^3$ فإن $(bab^{-1})^2=ba^2b^{-1}=a^6=e$. ولذا فإن $a^2=e$ وهذا تنـــاقض.
إذا كان $bab^{-1}=a^4$ فإن $(bab^{-1})^3=ba^3b^{-1}=a^{12}=e$ ولذا فإن $a^3=e$ وهذا تنـــاقض.
إذن $bab^{-1}=a^5=a^{-1}$. أي أن $ba=a^{-1}b$. الآن بما أن $|G/H|=2$ فإن $b^2\in H$. ولـــذا
فإن b^2 هو أحد العناصر e,a,a^2,a^3,a^4,a^5 . إذا كان $b^2=a^2$ فإن :

$$ba=a^{-1}b\Rightarrow ba^2=a^{-1}ba\Rightarrow b^3=a^{-1}ba\Rightarrow b^6=e=a^{-1}b^2a\Rightarrow b^2=e\Rightarrow a^2=e .$$

وهذا تناقض . إذا كان $b^2=a^4$ فإن :

$$b^2=a^4\Rightarrow b^2a^2=e\Rightarrow ba^{-1}ba=e\Rightarrow ba^{-2}b=e\Rightarrow a^{-2}=b^{-2}\Rightarrow a^2=b^2$$

وبذلك نحصل على تناقض . إذا كان $b^2=a$ فإن $b^{12}=a^6=e$. ولذا فإن $o(b)=12$. ومن
ثم فإن G إبدالية وهذا تناقض. وبالمثـــل إذا كـــان $b^2=a^5$ فـــإن G إبداليـــة . إذن $b^2=e$
أو $b^2=a^3$. وبالتالي فإننا نخلص إلى أن :

(أ) $G=\langle a,b\rangle$ حيث $o(a)=6$ ، $o(b)=2$ و $ba=a^{-1}b$. وفي هـــذه الحالـــة
$G\cong D_6$. أو

(ب) $G=\langle a,b\rangle$ حيـــث $o(a)=6$ ، $b^2=a^3$ و $ba=a^{-1}b$. وفي هـــذه الحالـــة
$G\cong T$. لاحظ أن الزمر A_4,D_4,T ليست متماثلة (لماذا ؟) . وبهذا يتم البرهان ◆

مبرهنة (٢٦ , ٤)

إذا كانت G زمرة من الرتبة pq حيث p و q عددان أوليان و $p<q$ فإن :

(أ) G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية وحيدة رتبتها q .

(ب) إذا كان $q\not\equiv 1 \pmod p$ فإن G دورية .

(ج) إذا كان $q\equiv 1 \pmod p$ فـــإن $G=\langle a,b\rangle$ حيـــث $o(b)=p$ ، $o(a)=q$
و $ba=a^rb$ حيث q لا يقسم $r-1$ ولكن q يقسم r^p-1 .

البرهان

(أ) لاحظ أن $n_q \equiv 1 (\bmod q)$ ويقسم p . بما أن $p < q$ فإن $n_q = 1$. ولذا فإنه يوجد زمرة وحيدة $H \in Syl_q(G)$. ومن ثم فإن $H \lhd G$ من الرتبة q .

(ب) $n_p \equiv 1 (\bmod p)$ يقسم q . عندئذ ، $n_p = 1$ أو $n_p = q$. وبما أن $q \not\equiv 1 \ (\bmod p)$ فإن $n_p = 1$. إذن ، توجد زمرة وحيدة $K \in Syl_p(G)$. ولذا فإن $K \lhd G$ من الرتبة p . لاحظ أن $H \cong \mathbb{Z}_q$ وأن $K \cong \mathbb{Z}_p$ وأن $H \cap K = \{e\}$. إذن ، $|HK| = |H|\,|K| = pq = |G|$. ولذا فإن $G = HK$. وبالتالي فإن $G \cong K \times H \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{pq}$.

(ج) لنفرض أن $H = \langle a \rangle$ وأن $K = \langle b \rangle$. بما أن $q \equiv 1 (\bmod p)$ فإن K ليست وحيدة ولذا فإنها ليست ناظمية في G . ولكن $H \lhd G$. إذن $bab^{-1} = a^r$ حيث $1 \le r \le q$. إذا كان q يقسم $r-1$ فإن $r-1 = mq$. ولذا فإن $bab^{-1} = a^{mq+1} = a$. ومنه فإن $ba = ab$. أي أن G إبدالية . إذن نفرض أن q لا يقسم $r-1$. الآن باستخدام الاستقراء الرياضي على n نستطيع أن نبرهن أن $b^n a b^{-n} = a^{r^n}$. إذن ، على وجه الخصوص يكون لدينا $b^p a b^{-p} = a^{r^p}$. أي أن $a = a^{r^p}$. ومنه فإن $q = o(a)$ يقسم $r^p - 1$ ◆

باستخدام النتائج (٣,١٢) ، (٣,٣٩) ،(٤,١٧) والمبرهنات (٣,٤٠) ، (٣,٤١) ، (٤,٢٥) ، (٤,٢٦) نكون قد وجدنا جميع الزمر (باستثناء التماثل) من الرتب التي لا تزيد عن 15 والتي نلخصها في الجدول التالي :

الرتبة	عدد الزمر	الزمر الابدالية	الزمر غير الابدالية
1	1	$\{e\}$	لا يوجد
2	1	$\mathbb{Z}_2$	لا يوجد
3	1	$\mathbb{Z}_3$	لا يوجد
4	2	$\mathbb{Z}_4 , \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	لا يوجد
5	1	$\mathbb{Z}_5$	لا يوجد
6	2	$\mathbb{Z}_6$	D_3
7	1	$\mathbb{Z}_7$	لا يوجد
8	5	$\mathbb{Z}_8 , \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 , \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	D_4 , Q_8
9	2	$\mathbb{Z}_9 , \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	لا يوجد
10	2	$\mathbb{Z}_{10}$	D_5

لا يوجد	$\mathbb{Z}_{11}$	1	11
A_4 , D_6 , T	$\mathbb{Z}_{12} , \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	5	12
لا يوجد	$\mathbb{Z}_{13}$	1	13
D_7	$\mathbb{Z}_{14}$	2	14
لا يوجد	$\mathbb{Z}_{15}$	1	15

ومن الجدير ذكره هنا أن عدد الزمر غير المتماثلة من الرتبة 16 هو 14 زمرة ، خمس منها إبدالية والباقي زمر غير إبدالية .

(١,٣ , ٤) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

جد جميع الزمر غير المتماثلة من الرتبة 66.

الحل

لنفرض أن G زمرة حيث $|G| = 66 = 2\times3\times11$. ولتكن $H \in Syl_3(G)$ و $K \in Syl_{11}(G)$. بما أن $n_{11} = 1$ فإن $K \lhd G$. ولذا فإن $HK \leq G$ من الرتبة 33 . وباستخدام المبرهنة (٢٦, ٤) نجد أن HK دورية . لنفرض أن $HK = \langle x \rangle$. وبما أن $[G : \langle x \rangle] = 2$ فإن $\langle x \rangle \lhd G$. وباستخدام مبرهنة كوشي يوجد $y \in G$ حيث $o(y) = 2$. ولذا فإن $yxy^{-1} \in \langle x \rangle$. أي أنه يوجد i ، $1 \leq i \leq 32$ حيث $yxy^{-1} = x^i$. أي أن $yx = x^i y$. الآن ، بما أن عناصر G على الصورة $x^s y^t$ فإننا نستطيع تحديد G بمعرفة قيم i . سنبرهن الآن أنه يوجد أربع قيم فقط للعدد i .

بما أن $o(x^i) = o(x)$ فإن $\gcd(i, 33) = 1$. وبما أن $o(y) = 2$ فإن :

$$x = y^{-1}\left(yxy^{-1}\right)y = y^{-1}x^i y = y\,x^i y^{-1} = \left(y\,x\,y^{-1}\right)^i = \left(x^i\right)^i = x^{i^2} \text{ .}$$

ومنه فإن $x^{i^2-1} = e$. ولذا فإن $33 \mid (i^2 - 1)$. وبالتالي فإننا نجد أن القيم الممكنة للعدد i هي $i = 1, 10, 23, 32$. ومن ثم فإنه يوجد على الأكثر أربع زمر غير متماثلة من الرتبة 66. وأخيراً لإثبات أن عدد هذه الزمر هو بالضبط أربعة ، لاحظ أن رتبة كل من الزمر الأربعة التالية هي 66: $\mathbb{Z}_{66}$ ، D_{33} ، $D_{11} \times \mathbb{Z}_3$, $D_3 \times \mathbb{Z}_{11}$. كما أن جميع هذه الزمر غير متماثلة (أنظر تمرين (٣) من التمارين المحلولة (١, ٤ , ٣) . وبالتالي فإننا نخلص إلى أنه يوجد فقط أربعة زمر غير المتماثلة من الرتبة 66 Δ

تمرين (٢)

لتكن G زمرة من الرتبة $231 = 3 \times 7 \times 11$. ولتكن $H \in Syl_{11}(G)$ ، $K \in Syl_7(G)$ و $L \in Syl_3(G)$. أثبت أن :

(أ) $H \lhd G$ و $K \lhd G$ (ب) G تحتوي على زمرة جزئية دورية من الرتبة 77 .

(ج) $G = HKL$ (د) $H \subseteq Z(G)$.

الحل

(أ) بما أن $n_{11} \equiv 1 \pmod{11}$ يقسم 3×7 فإن $n_{11} = 1$. ولذا فإن $H \lhd G$. وبما أن $n_7 \equiv 1 \pmod 7$ يقسم 3×11 فإن $n_7 = 1$. ولذا فإن $K \lhd G$.

(ب) بما أن $H \lhd G$ وأن $K \lhd G$ فإن $HK \lhd G$. وبما أن $H \cap K = \{e\}$ فإن : $|HK| = |H||K| = 77$. وبما أن $11 \not\equiv 1 \pmod 7$ فإن HK دورية . استناداً إلى المبرهنة (٤,٢٦).

(ج) بما أن $L \cap (HK) = \{e\}$ فإن : $|G| = 231 = 77 \times 3 = \dfrac{|HK||L|}{|HK \cap L|} = |HKL|$.

ولذا فإن $HKL = G$.

(د) بما أن H و K ناظميتان من G وأن $H \cap K = \{e\}$ فإن $hk = kh$ لكل $h \in H$ و $k \in K$. وبما أن $|G/K| = 3 \times 11$ فإن G/K دورية وبالتالي إبدالية . لنفرض أن $e \neq a \in L$ وأن $e \neq b \in H$. عندئذ ، $a, b \notin K$. وبما أن G/K زمرة إبدالية فإن $(ab)K = (aK)(bK) = (bK)(aK) = (ba)K$. ومنه فإن $(ab)^{-1}(ba) = b^{-1}a^{-1}ba \in K$. وبما أن $b \in H$ وأن $H \lhd G$ فإن $b^{-1}a^{-1}ba \in H$. ولذا فإن $b^{-1}a^{-1}ba \in H \cap K = \{e\}$. ومنه فإن $b^{-1}a^{-1}ba = e$. أي أن $ba = ab$. لنفرض الآن أن $x \in G$ وأن $h \in H$ . . بما أن $G = HKL$ فإن $x = abc$ حيث $a \in H$ ، $b \in K$ و $c \in L$. الآن :

$$xh = (abc)h = ab(ch) = ab(hc) = a(bh)c = a(hb)c$$
$$= (ah)(bc) = (ha)bc = hx$$

وبالتالي فإن $h \in Z(G)$. أي أن $H \subseteq Z(G)$ Δ

تمرين (٣)

إذا كانت G زمرة من الرتبة $255 = 3\times 5\times 17$ فأثبت أن $G \cong \mathbb{Z}_{255}$.

الحل

لتكن $H \in Syl_{17}(G)$. بما أن $n_{17} \equiv 1 (\bmod 17)$ يقسم 3×5 فإن $n_{17} = 1$. ولهذا فإن $H \lhd G$. و باستخدام المبرهنة (٣,١٩) نجد أن $N(H) = G$. وباستخدام المبرهنة (٣,٦٠) والمبرهنة (٣,٦٣) نجد أن :

$|G/C(H)| = |N(H)/C(H)|$ يقسم $|Aut(H)|$. ولكن $|Aut(H)| = |Aut(\mathbb{Z}_{17})| = |U_{17}| = 16$. ومنه فإن $|G/C(H)|$ يقسم 16. وبما أن $|G/C(H)|$ يقسم أيضاً $|G| = 255$ فإن $|G/C(H)| = 1$. ولهذا فإن $G = C(H)$. أي أن جميع عناصر G تتبادل مع جميع عناصر H ، وهذا يعني أن $H \subseteq Z(G)$. ومنه فإن17 يقسم $|Z(G)|$. وبما أن $|Z(G)|$ يقسم أيضاً 255 فإن القيم الممكنة هي : $|Z(G)| = 17, 51, 85, 255$. ولذا فإن $|G/Z(G)| = 15,5,3,1$.

ولكن أي زمرة من الرتبة 1، 3، 5 أو 15 يجب أن تكون دورية ولذا فإن $G/Z(G)$ دورية . ومنه فإن G إبدالية . وباستخدام المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية نجد أن $G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{17} \cong \mathbb{Z}_{255}$ Δ

تمرين (٤)

إذا كانت G زمرة من الرتبة p^2q حيث p و q عددان أوليان وحيث $q \not\equiv 1 (\bmod p)$ و $p^2 \not\equiv 1 (\bmod q)$ فإن $G \cong \mathbb{Z}_{p^2q}$ أو أن $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{pq}$.

الحل

لنفرض أن $H \in Syl_p(G)$ وأن $K \in Syl_q(G)$. بما أن $q \not\equiv 1 (\bmod p)$ فإن $n_p = 1$. ولهذا فإن $H \lhd G$. وبما أن $p^2 \not\equiv 1 (\bmod q)$ فإن $n_q = 1$. ولهذا فإن $K \lhd G$. الآن ، $|H| = p^2$ و $|K| = q$. ومنه فإن H إبدالية وأن K دورية . وبما أن $H \cap K = \{e\}$ فإن $|HK| = |H||K| = p^2q = G$. ومن ثم فإن $G = HK$. ومنه فإن $G = H\times K$. وبما أن كل من H و K إبدالية فإن G إبدالية . وبالتالي فإننا نخلص باستخدام

المبرهنة الأساسية للزمر الأبدالية المنتهية أن $G \cong \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{p^2q}$ أو أن $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{pq}$ Δ

تمرين (٥)

لتكن G زمرة منتهية من الرتبة $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_t^{k_t}$ بحيث إن جميع زمر سيلو الجزئية من G ناظمية أثبت أن G تساوي الضرب المباشر الداخلي لزمر سيلو الجزئية منها .

الحل

لنفرض أن $H_i \in Syl_{p_i}(G)$ لكل i، $1 \le i \le t$ . . بما أن $H \lhd G$ وأن $H_i \cap H_j = \{ e \}$ لكل $i \ne j$ فإن $h_i h_j = h_j h_i$ لكل $h_i \in H_i$, $h_j \in H_j$. لنفرض الآن أن $x \in H_i \cap (H_1 \ldots H_{i-1} H_{i+1} \ldots H_t)$. عندئذ ، $x \in H_i$ و $x = h_1 \ldots h_{i-1} h_{i+1} \ldots h_t$ حيث $h_j \in H_j$. وبما أن $o(x)$ يقسم كل من $p_i^{k_i}$ و $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_{i-1}^{k_{i-1}} p_{i+1}^{k_{i+1}} \ldots p_t^{k_t}$ فإن $o(x) = 1$. ومنه فإن $x = e$. كما أن $|G| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_t^{k_t} = |H_1 H_2 \ldots H_t|$. ومنه فإن $G = H_1 H_2 \ldots H_t$. وبالتالي فإن $G = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_t$ Δ

تمرين (٦)

لتكن G زمرة من الرتبة $p^m n$ حيث p عدداً أولياً و $\gcd(p, n) = 1$ ولتكن $K \lhd G$.

(أ) إذا كانت $P \in Syl_p(G)$ فأثبت أن $P \cap K \in Syl_p(K)$.

(ب) إذا كانت $B \in Syl_p(K)$ فأثبت أن $B = P \cap K$ حيث $P \in Syl_p(G)$.

الحل

(أ) بما أن $|P \cap K|$ يقسم $|P| = p^m$ فإن $|P \cap K| = p^i$ حيث $i \le m$. لنفرض الآن أن $|K| = p^s t$. سنبرهن أن $s = i$. إذا كان $s > i$ فإن $|PK| = \frac{|P|\ |K|}{|P \cap K|} = \frac{p^m p^s t}{p^i} = p^{m+s-i} t$ وهذا مستحيل لأن $PK \le G$ وأن $|G| = p^m n$. إذن، $s = i$. وبالتالي فإن : $P \cap K \in Syl_p(K)$.

(ب) لنفرض أن $|K| = p^s t$ حيث $\gcd(p, t) = 1$ وأن $B \in Syl_p(K)$. لنفرض أن $Q \in Syl_p(G)$. عندئذ ، باستخدام الفقرة (أ) نجد أن $Q \cap K \in Syl_p(K)$. وبما أن

$B \in Syl_p(K)$ فإن B و $Q \cap K$ مترافقتان في K . أي أنه يوجد $a \in K$ حيث $B = a^{-1}(Q \cap K)a = a^{-1}Qa \cap a^{-1}Ka = P \cap K$ حيث $P = a^{-1}Qa \in Syl_p(G)$ Δ

تمرين (٧)

لتكن $H \lhd G$ حيث G زمرة منتهية من الرتبة $p^n m$ ، p عدد أولي لا يقسم m .

(أ) إذا كان $[G : H] = k$ وp أوليين نسبياً فأثبت أن H تحتوي على جميع زمر سيلو الجزئية من النوع p للزمرة G .

(ب) بين أن الفقرة (أ) ليست صحيحة إذا لم تكن H ناظمية من G .

الحل

(أ) بما أن $p^n m = |G| = k|H|$ فإن p^n يقسم $k|H|$. وبما أن $\gcd(p, k) = 1$ فـإن p^n يقسم $|H|$. ولذا فإن $|H| = p^n s$ حيث $\gcd(p, s) = 1$. لنفرض أن $P \in Syl_p(H)$ عندئذٍ، $|P| = p^n$. ولذا فإن $P \in Syl_p(G)$. لنفرض الآن أن $Q \in Syl_p(G)$. عندئذٍ ، يوجد $a \in G$ حيث $Q = a^{-1}Pa \subseteq a^{-1}Ha = H$.

(ب) إذا كانت $G = S_3$ وكانت $H = \langle (1\ 2) \rangle$ فإن H ليست ناظمية من G وأن $[G : H] = 3$ ، $\gcd(3, 2) = 1$. ولكن H لا تحتوي جميع زمر سيلو الجزئية من النوع 2 للزمرة G Δ

تمارين (٣ , ٤)

(١) صنف جميع زمر سيلو الجزئية من النوع p للزمرة A_5 ثم احسب عدد كل منها.

(٢) عين جميع زمر سيلو الجزئية من النوع 3 للزمرة S_5 .

(٣) عين جميع زمر سيلو الجزئية من النوع 5 للزمرة S_5 .

(٤) إذا كانت G زمرة من الرتبة $2p$ حيث p عدداً أولياً فردياً فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية وحيدة من الرتبة p وأن G تحتوي على p من الزمر الجزئية كل منها من الرتبة 2 أو أنها تحتوي على زمرة جزئية واحدة فقط من الرتبة 2 .

(٥) إذا كان $|G| = p^n m$ حيث p عدداً أولياً و $\gcd(p,m) = 1$ وكانت $P \in Syl_p(G)$ و H زمرة جزئية من G من النوع p تحتوي P فأثبت أن $H = P$.

(٦) ليكن p عدداً أولياً يقسم رتبة الزمرة المنتهية G ، ولتكن $P \in Syl_p(G)$ و H زمرة جزئية من G من النوع p . أثبت أنه يوجد $g \in G$ حيث $gHg^{-1} \leq P$.

(٧) إذا كانت K زمرة جزئية ناظمية من النوع p من الزمرة المنتهية G فأثبت أن K محتواة في أي زمرة سيلو جزئية من النوع p .

(٨) إذا كانت $H \in Syl_p(G)$ فأثبت أن $N(N(H)) = N(H)$.

(٩) إذا كانت G زمرة من الرتبة $p^n m$ حيث $\gcd(m, p) = 1$ وإذا كانت $H \in Syl_p(G)$ فأثبت أن H هي الزمرة الجزئية الوحيدة من G التي تحقق $H \subseteq N(H)$.

(١٠) لتكن $H \in Syl_p(G)$ وليكن $a, b \in Z(H)$ حيث $a = xbx^{-1}$ ، $x \in G$. أثبت أنه يوجد $y \in N(H)$ يحقق $a = yby^{-1}$.

(١١) لتكن $H \in Syl_p(G)$ وليكن $a \in G$ حيث $o(a) = p^k$. إذا كان $aHa^{-1} = H$ فأثبت أن $a \in H$.

(١٢) لتكن K زمرة جزئية ناظمية من الزمرة المنتهية G ولتكن $P \in Syl_p(K)$. أثبت أن :

(أ) $g^{-1}Pg \in Syl_p(K)$ لكل $g \in G$ (ب) $G = N(P)K$.

(ج) إذا كانت $Q \in Syl_p(G)$ وكانت $H \leq G$ حيث $N(Q) \leq H$ فأثبت أن $N(H) = H$.

(١٣) لتكن G زمرة من الرتبة $p^n m$ حيث p عدداً أولياً وحيث $\gcd(p, m) = 1$. ولتكن $H \triangleleft G$.

(أ) إذا كانت $P \in Syl_p(G)$ فأثبت أن $PH/H \in Syl_p(G/H)$.

(ب) إذا كانت $K/H \in Syl_p(G/H)$ فأثبت أن $K/H = PH/H$ حيث $P \in Syl_p(G)$.

(١٤) إذا كانت $P \in Syl_p(G)$ وكانت Q زمرة جزئية من النوع p من G فأثبت أن $Q \cap N(P) = Q \cap P$.

(١٥) لتكن $P \in Syl_p(G)$. أثبت أن P وحيدة إذا وفقط إذا كانت P مميزة في G.

(١٦) لتكن $P \in Syl_p(G)$ ولتكن $S = \{x \in G : o(x) = p^k, k \in \mathbb{Z}^+\}$. أثبت أن P وحيدة إذا وفقط إذا كانت $\langle S \rangle$ زمرة جزئية من النوع p من G .

(١٧) إذا كانت $P \in Syl_p(H)$ وكان $P \triangleleft H \triangleleft G$ فأثبت أن $P \triangleleft G$.

(١٨) لتكن G زمرة منتهية حيث جميع زمر سيلو الجزئية من G دورية ولتكن $H \leq G$. أثبت أن جميع زمر سيلو الجزئية من H دورية أيضاً .

(١٩) أثبت أن أي زمرة من الرتب التالية يجب أن تكون دورية :

15 , 33 , 35 , 51 , 65, 69, 77, 85 , 87 , 91 , 95 ,115 , 119 , 123 ,
133 , 141 , 143 , 145, 159 , 161 , 177 , 185 , 187 , 323 , 4747

(٢٠) جد جميع الزمر غير المتماثلة لكل من الرتب التالية : 45، 99، 175، 245، 637 .

(٢١) أثبت أن أي زمرة من الرتب التالية يجب أن تكون دورية : 1001، 1547، 1645، 1855.

(٢٢) إذا كانت G زمرة من الرتبة p^2q^2 حيث p و q عددان أوليان مختلفان وحيث $p^2 \not\equiv 1 \pmod q$, $q^2 \not\equiv 1 \pmod p$ فأثبت أن G زمرة إبدالية .

(٢٣) جد جميع الزمر غير المتماثلة لكل من الرتب التالية : 1225، 5929، 14161 .

(٢٤) إذا كانت G زمرة من الرتبة 455 فأثبت أن G دورية .

(٢٥) إذا كانت G زمرة من الرتبة 105 فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة 35 .

(٢٦) إذا كانت G زمرة من الرتبة 375 فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة 15 .

(٢٧) إذا كانت G زمرة من الرتبة595 فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية من الرتبة 17.

(٢٨) (أ) إذا كانت G زمرة من الرتبة 231 وكانت $H \in Syl_{11}(G)$ فأثبت أن $H \subseteq Z(G)$.

(ب) إذا كانت G زمرة من الرتبة 385 وكانت $H \in Syl_7(G)$ فأثبت أن $H \subseteq Z(G)$.

(٢٩) إذا كانت G زمرة من الرتبة 1045 وكانت $H \in Syl_{19}(G)$ و $K \in Syl_{11}(G)$ فأثبت أن $K \lhd G$ وأن $H \subseteq Z(G)$.

(٣٠) إذا كانت G زمرة من الرتبة 627 وكانت $H \in Syl_{11}(G)$ و $K \in Syl_{19}(G)$ فأثبت أن $K \lhd G$ و $H \subseteq Z(G)$.

(٣١) إذا كانت G زمرة من الرتبة 60 فأثبت أن G إما أن تحتوي على أربعة عناصر أو أربعاً وعشرون عنصراً من الرتبة 5 .

(٣٢) إذا كانت G زمرة من الرتبة 60 فأثبت أن $|Z(G)| \neq 4$.

(٣٣) إذا كانت G زمرة من الرتبة 60 ولا تحتوي على زمر جزئية ناظمية فعلية غير تافهة فأثبت أن G لا تحتوي على زمر جزئية من الرتب 15, 20, 30 .

(٣٤) إذا كانت G زمرة من الرتبة 168 ولا تحتوي على زمر جزئية ناظمية فعلية غير تافهة فأثبت أن:

(أ) $n_7 = 8$ (ب) إذا كانت $H \in Syl_7(G)$ فإن $|N(H)| = 21$

(ج) G لا تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة 14 .

(٣٥) جد جميع الزمر غير المتماثلة من الرتبة 30.

(٣٦) بين أياً من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :

(أ) توجد زمرة منتهية G حيث $|G/Z(G)|=91$.

(ب) باستثناء التماثل توجد زمرة منتهية وحيدة من الرتبة 77 .

(ت) إذا كانت $P\in Syl_p(G)$ حيث $P\lhd G$ وإذا كانت $H\le G$ فإن $P\cap H\in Syl_p(H)$ وحيدة .

(ث) إذا كانت $P\in Syl_p(G)$ وكانت $P\subseteq H\le G$ فإن $P\in Syl_p(H)$.

(ج) إذا كانت $H\le G$ وكانت $P\in Syl_p(H)$ فإن $P\in Syl_p(G)$.

(ح) إذا كانت $H\le G$ وكانت $P\in Syl_p(H)$ فإن $gPg^{-1}\in Syl_p(gHg^{-1})$ لكل $g\in G$.

(خ) إذا كانت $H\le G$ وكانت $P\in Syl_p(G)$ فإن $P\cap H\in Syl_p(H)$.

(د) إذا كانت G زمرة من الرتبة 957 فإن G دورية .

(ذ) توجد زمرتان فقط غير متماثلتين من الرتبة 2873 .

(ر) إذا كانت G زمرة من الرتبة 1729 فإن G إبدالية .

(ز) توجد زمرة غير إبدالية من الرتبة 255 .

(٤, ٤) الزمر البسيطة
Simple Groups

تسمى الزمرة G زمرة بسيطة (**simple**) إذا كانت G لا تحتوي على زمر جزئية ناظمية عدا الزمرتين G و $\{e\}$.

إن أول من قدم مفهوم الزمر البسيطة هو جالو (**Galois**) في القرن التاسع عشر الميلادي أثناء محاولته البرهان على إستحالة حل معادلة كثيرة الحدود من الدرجة الخامسة باستخلاص الجذور .

تكمن أهمية الزمر البسيطة في كونها اللبنات الأساسية في بناء الزمر المنتهية (كما الأعداد الأولية في نظرية الأعداد أو العناصر في الكيمياء) . وهذا البناء يتم على النحو التالي :

لنفرض أن $G=G_0$ زمرة منتهية ولنفرض أن G_1 زمرة جزئية ناظمية أعظمية من G_0 (أي أن $G_1\lhd G_0$ وإذا كانت $G_1\lhd H\lhd G_0$ فإن $H=G_0$ أو أن $G_1=H$) . عندئذٍ ، تكون G_0/G_1 زمرة بسيطة . الآن نختار زمرة جزئية ناظمية أعظمية G_2 من G_1 فتكون G_1/G_2 زمرة بسيطة . ونستمر على هذا المنوال إلى أن نتوقف عند $G_n=\{e\}$. وبهذا يكون لدينا السلسلة :

$$\{e\}=G_n\lhd G_{n-1}\lhd\ldots\lhd G_2\lhd G_1\lhd G_0=G$$

حيث زمر خارج القسمة : $G_0/G_1 , G_1/G_2 , \ldots , G_{n-1}/G_n$ جميعها زمر بسيطة يطلق عليها العوامل المُحصّلة (**composition factors**) للزمرة G . ولقد برهن جوردان وهولدر (**Jordan and Holder**) أن هذا العوامل لا تعتمد على طريقة اختيار الزمر الناظمية . وفي حالات كثيرة من الممكن تحديد زمرة بمعرفة عواملها المحصّلة ومن الممكن أيضاً معرفة الكثير من خواص الزمرة من دراسة عواملها المحّصلة . وإذا علمنا أن الكثير من خصائص الزمر المنتهية يتم برهانها بالاستقراء الرياضي مستخدمين الزمر البسيطة كخطوة أساسية فإن هذا يوضح لنا بدون شك أهمية الزمر البسيطة لدراسة الزمر المنتهية . ولهذا السبب اعتبرت مسألة تصنيف جميع الزمر المنتهية البسيطة من المسائل الأساسية في نظرية الزمر.

إن مسألة إيجاد جميع الزمر الإبدالية البسيطة المنتهية مسألة سهلة وسنبين في هذا البند أنه يوجد زمرة وحيدة (باستثناء التماثل) هي $\mathbb{Z}_p$ حيث p عدد أولي . أما مسألة تصنيف الزمر غير الإبدالية البسيطة المنتهية فهي مسألة صعبة جداً احتاج حلها إلى عمل شاق وطويل اشترك فيه أكثر من مائة باحث رياضي ونشر أكثر من عشرة آلاف صفحة في المجلات العلمية المتخصصة في محاولة لحل هذه المسألة إلى إن تم تصنيف هذه الزمر تماماً في العام ١٩٨١م .

في هذا البند سنبين من خلال الأمثلة واستخدام المفاهيم التي درسناها أنه توجد زمرتان فقط غير إبداليتين بسيطتين من بين الزمر التي رتبها أصغر من أو يساوي 200 . إحدى هذه الزمر من الرتبة 60 وأما الأخرى فرتبتها 168 .

المبرهنة التالية تصنف لنا جميع الزمر الإبدالية البسيطة.

مبرهنة (٢٧ , ٤)

إذا كانت G زمرة إبدالية فإن G زمرة بسيطة إذا وفقط إذا كانت $G \cong \mathbb{Z}_p$ حيث p عدداً أولياً أو أن $p = 1$ . .

البرهان

لنفرض أولاً أن G زمرة إبدالية بسيطة ولنفرض أن $e \neq a \in G$. بما أن $\langle a \rangle \lhd G$ وأن G بسيطة فإن $G = \langle a \rangle$. ولذا فإن G دورية . إذن ، $G \cong \mathbb{Z}_n$ أو $G \cong \mathbb{Z}$. وبما أن $\mathbb{Z}$ ليست بسيطة فإن $G \cong \mathbb{Z}_n$. وأخيراً إذا كان $n = pq$ عدداً مؤلفاً فإن $\langle a^p \rangle$ زمرة جزئية من G رتبتها q وهذا

مستحيل . إذن ، n عدداً أولياً . ونخلص إلى أن $G \cong \mathbb{Z}_p$. وبرهان العكس واضحاً لأن $\mathbb{Z}_p$ زمرة بسيطة ◆

ننتقل الآن إلى تطبيق مبرهنات سيلو للبرهان على أنه إذا كانت G زمرة من الرتبة n حيث $1 \le n \le 200$ ، n مؤلفاً و $n \ne 60$ و $n \ne 168$ فإن G زمرة غير بسيطة .

مبرهنة (٢٨ , ٤)

إذا كانت $|G| = p^n$ حيث $n > 1$ و p عدداً أولياً فإن G زمرة غير بسيطة . ولذا لا يوجد زمرة بسيطة من الرتب : $4 , 8 , 9 , 16 , 25 , 27 , 32 , 49 , 64, 81 , 121 , 125 , 128 , 169$

البرهان

باستخدام المبرهنة (١٦ , ٤) نعلم أن $Z(G) \ne \{e\}$. إذا كان $G = Z(G)$ فإن G إبدالية . ولذا فإن G غير بسيطة . أما إذا كان $G \ne Z(G)$ فإن $Z(G) \lhd G$. ولذا فإن G غير بسيطة ◆

مبرهنة (٢٩ , ٤)

إذا كانت $|G| = p^n m$ حيث $n \ge 1$ ، p عدداً أولياً و $p > m > 1$ فإن G ليست بسيطة . ولذا لا يوجد زمر بسيطة من الرتب :

6,10,14,15,18,20,21,22,26,28,33,34,35,38,39,42,44,46,50,51,52,54,55,57,
58,62,65,66,68,69,74,75,76,77,78,82,85,86,87,88,91,92,93,94,95,98,99,
100,102,104,106,110,111,114,115,116,117,118,119,122,123,124,129,130,
133,134,136,138,141,142,143,145,146,147,148,150,152,153,155,156,158,
159,161,162,164,166,170,171,172,174,177,178,183,184,185,186,187,188,
190,194,196

البرهان

باستخدام مبرهنة سيلو الثالثة نجد أن $n_p = pk+1$ ويقسم m . إذن ، $n_p = 1$ أو $n_p = m$. وبما أن $p > m$ فإن $n_p = 1$. ولذا فإن G تحتوي على زمرة سيلو وحيدة H من النوع p ، ومنه فإن ، $H \lhd G$ وبالتالي فإن G ليست بسيطة لأن $H \ne G$ حيث $m = [G : H] > 1$ ◆

مبرهنة (٣٠ , ٤)

إذا كانت $|G| = 2m$ حيث $m > 1$ عدداً فردياً فإن G زمرة غير بسيطة . ولذا لا يوجد زمر بسيطة من الرتب : $30,70,90,126,154,182,198$.

البرهان

بإستخدام مبرهنة كيلي يوجد تشاكل أحادي $\psi : G \to S_{2m}$ معرفاً بالقاعدة $\psi(g) = \tau_g$ حيث $\tau_g(a) = ga$. ليكن $g \in G$ حيث $o(g) = 2$. الآن : $\tau_g(a) = ga \Rightarrow \tau_g(ga) = g^2a = a$. إذن ، τ_g (كعنصر في S_{2m}) هو تحصيل مناقلات على الصورة $(a \quad ga)$. وبما أن $|G| = 2m$ فإن عدد هذه المناقلات يساوي m . وبما أن m فردي فإن عدد هذه المناقلات فردياً . ولذا فإن τ_g فردي . إذن ، $G \cong \psi(G)$ تحتوي على تبديل فردي . ليكن التطبيق $f : G \to \mathbb{Z}_2$ معرفاً بالقاعدة

$$f(\sigma) = \begin{cases} 0 \quad , & \sigma \text{ فردي} \\ 1 \quad , & \sigma \text{ زوجي} \end{cases}$$

من الواضح أن f تشاكل غامر. إذن ، باستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن $G / \text{Kerf} \cong \mathbb{Z}_2$. ولذا فإن : $|\text{Ker } f| = \dfrac{|G|}{|\mathbb{Z}_2|} = \dfrac{2m}{2} = m$. إذن ، $\{e\} \neq \text{Kerf} \lhd G$

وبالتالي فإن G ليست بسيطة ◆

ملحوظات

(١) باستخدام مبرهنة سيلو الثالثة نستطيع أن نثبت أن أي زمرة من الرتب :

$40,45,63,84,135,140,165,175,176,189,195,200$

تحتوي على زمرة سيلو وحيدة من النوع p . ولذا فهي ليست بسيطة .

(٢) باستخدام مبرهنة الدليل (النتيجة (٨ , ٤)) بأخذ $H \in Syl_p(G)$ حيث رتبة H كبيرة ، نستطيع أن نبرهن أن أي زمرة من الرتب : $12,24,36,48,96,108,160,192$ ليست بسيطة .

نقدم الآن نسخة معدلة عن مبرهنة الدليل تستخدم للمساعدة على اكتشاف المزيد من الزمر غير البسيطة ولكن برهانها يحتاج إلى الحقيقة التالية عن زمر التبديلات .

تمهيدية (٣١ , ٤)

إذا كانت $H \le S_n$ فإن $H \le A_n$ أو إن نصف عناصر H بالضبط زوجياً .

البرهان

حسب المبرهنة الثانية للتماثل لدينا : $H/(A_n \cap H) \cong HA_n / A_n$. إذا كانت جميع عناصر H زوجية فإن $H < A_n$. أما إذا احتوت H على تبديل فردي فإن $HA_n = S_n$. وبالتالي : $|H/(H \cap A_n)| = |HA_n / A_n| = |S_n / A_n| = 2$ ومنه نستنتج أن $|H \cap A_n| = \frac{1}{2}|H|$ ◆

مبرهنة (٣٢ , ٤)

إذا كانت G زمرة منتهية بسيطة وكانت $H \le G$ حيث $[G:H] = n$ فإن G تماثل زمرة جزئية من A_n .

البرهان

لنفرض أن G تؤثر على المجموعة $A = \{ aH : a \in G \}$. عندئذٍ ، يوجد تشاكل $\psi : G \to S_n$. بما أن $Ker\psi \lhd G$ وأن G بسيطة فإننا نجد أن $Ker\psi = \{e\}$. ولذا فإن G تماثل زمرة جزئية $\psi(G)$ من S_n . لنفرض أن $G \cong \psi(G)$ ليست زمرة جزئية من A_n . إذن باستخدام التمهيدية (٣١ , ٤) ، نجد أن نصف عناصر $\psi(G)$ تبديلات فردية .
ولكن $H = \{\mu \in \psi(G) : \mu \text{ زوجي}\}$ زمرة جزئية من $\psi(G)$ دليلها 2 . ولذا فإن $H \lhd \psi(G)$ وهذا تناقض . وبالتالي فإننا نخلص إلى أن $G \cong \psi(G) \le A_n$ ◆

ملحوظات

(١) باستخدام المبرهنة (٣٢ , ٤) ، نستطيع أن نثبت أن الزمرة من الرتبة 80 أو 112 ليست بسيطة فإذا كانت $|G| = 80 = 2^4 \times 5$ بسيطة وكانت $H \in Syl_2(G)$ فإن $[G:H] = 5$. ولذا فإن G تماثل زمرة جزئية من A_5 . إذن ، 80 يقسم $|A_5|$ وهذا مستحيل. وبالتالي فإن G ليست

بسيطة . وبالمثل ، إذا كانت $|G| = 112 = 2^4 \times 7$ بسيطة فإن G تماثل زمرة جزئية من A_7 وهذا مستحيل لأن 112 لا يقسم $|A_7|$.

(٢) بقي لدينا الآن الزمر من الرتب : $56, 60, 72, 105, 120, 132, 144, 168, 180$. سنبرهن لاحقاً أنه يوجد زمرة بسيطة رتبتها 60 وزمرة بسيطة رتبتها 168 . أما ما تبقى فهي زمرغير بسيطة وسنبرهن ذلك لكل زمرة على حدة .

مثال (٤ ,٢٩)

إذا كانت $|G| = 56 = 2^3 \times 7$ فإن G ليست بسيطة .

الحل

لاحظ أن $n_7 = 1$ أو 8 وأن $n_2 = 1$ أو 7 . إذا كان $n_7 = 1$ أو $n_2 = 1$ فإن G ليست بسيطة . لنفرض ، إذن أن $n_7 = 8$ و $n_2 = 7$. عندئذٍ ، G تحتوي على $8 \times 6 = 48$ عنصراً من الرتبة 7 . لنفرض أن $H_1, H_2 \in Syl_2(G)$. بما أن $H_1 \cap H_2 \leq H_1$ فإن $|H_1 \cap H_2| \leq 4$. ولذا فإن $|H_1 \cup H_2| \geq 12$ ولا يوجد أي عنصر من عناصر $H_1 \cup H_2$ رتبته 7 . إذن ، $|G| \geq 48 + 12 = 60$ وهذا مستحيل . ولذا فإن $n_7 = 1$ أو أن $n_2 = 1$. وبالتالي فإن G ليست بسيطة □

مثال (٤ , ٣٠)

إذا كانت $|G| = 72 = 2^3 \times 3^2$ فإن G ليست بسيطة .

الحل

لاحظ أن $n_3 = 4$ أو $n_3 = 1$. إذا كان $n_3 = 1$ فإن G ليست بسيطة . لنفرض إذن أن $n_3 = 4$. ولنفرض أن $H \in Syl_3(G)$. إذن ، باستخدام المبرهنة الثالثة لسيلو نجد أن $[G : N(H)] = n_3 = 4$. وبما أن $|G|$ لا يقسم $4!$ فإنه باستخدام مبرهنة الدليل نخلص إلى أن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية فعلية غير تافهة . إذن ، G ليست بسيطة □

مثال (٤ , ٣١)

إذا كانت $|G| = 105 = 3 \times 5 \times 7$ فإن G ليست بسيطة .

الحل

لاحظ أن($n_7=15$ أو $n_7=1$) و ($n_5=21$ أو $n_5=1$) و($n_3=7$ أو $n_3=1$) . إذا كانت G بسيطة فإن $n_7=15$ ، $n_5=21$ و $n_3=7$. إذن ، G تحتوي على $15\times 6=90$ عنصراً من الرتبة 7 وتحتوي على $21\times 4=84$ عنصراً من الرتبة 5 وتحتوي على $7\times 2=14$ عنصراً من الرتبة 3 . ولذا فإن $|G|\geq 90+84+14=188$ وهذا مستحيل. إذن ، G ليست بسيطة □

مثال (٤ , ٣٢)

إذا كانت $|G|=132=2^2\times 3\times 11$ فإن G ليست بسيطة .

الحل

لنفرض أن G بسيطة . إذن ، $n_{11}=12$ ، $n_3\geq 4$ و $n_2\geq 3$. ولذا فإن G تحتوي على 120 عنصراً من الرتبة 11 وعلى الأقل 8 عناصر من الرتبة 3 وعلى الأقل 9 عناصر من الرتبة 2 أو 4 . ولذا فإن $|G|\geq 120+8+9=137$ وهذا مستحيل . إذن ، G ليست بسيطة □

مثال (٤ , ٣٣)

إذا كانت $|G|=144=2^4\times 3^2$ فإن G ليست بسيطة .

الحل

لنفرض أن G بسيطة . إذن ، $n_3=16$ أو $n_3=4$ و $n_2\geq 3$. لنفرض أن $n_3=4$ وأن $H\in Syl_3(G)$. عندئذ ، $[G:N(H)]=4$ وهذا مستحيل لأن 144 لا يقسم !4 . إذن، $n_3=16$. الآن إذا كان $|H_i\cap H_j|=1$ لكل $H_i, H_j\in Syl_3(G)$, $i\neq j$ فإن G تحتوي على 128 عنصراً من الرتبة 3 أو 9 . وبما أن $n_2\geq 3$ فإن $|G|>144$ وهذا مستحيل . إذن، يوجد $H_i, H_j\in Syl_3(G)$ حيث $|H_i\cap H_j|\neq 1$ ، $i\neq j$. ولذا فإن $|H_i\cap H_j|=3$. إذن، $H_i\cap H_j\lhd H_i$ و $H_i\cap H_j\lhd H_j$. ولذا فإن كل من H_i, H_j محتواة في $N(H_i\cap H_j)$. ومن ثم فإن $H_iH_j\subseteq N(H_i\cap H_j)$. ومنه فإن $|N(H_i\cap H_j)|\geq|H_iH_j|=\dfrac{9\times 9}{3}=27$. كذلك ، 9 يقسم $|N(H_i\cap H_j)|$ و

ولذا فإن $|N(H_i \cap H_j)|$ يقسم 144 . وعليه فإن $|N(H_i \cap H_j)| \geq 36$. ولذا فإن $[G : N((H_i \cap H_j))] \leq 4$ وهذا مستحيل لأن 144 لا يقسم $m!$ حيث $m \leq 4$. إذن، G ليست بسيطة □

مثال (٤ , ٣٤)

إذا كانت $|G| = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ فإن G ليست بسيطة .

الحل

لنفرض أن G بسيطة . إذن ، $n_3 = 10$ و $(n_5 = 36$ أو $n_5 = 6)$. لنفرض أن $n_5 = 36$. إذن ، G تحتوي على $36 \times 4 = 144$ عنصراً من الرتبة 5 . لنفرض الآن أن $|H_i \cap H_j| = 1$ لكل $H_i, H_j \in Syl_3(G)$. إذن، G تحتوي على $10 \times 8 = 80$ عنصراً من الرتب 3 أو 9 . ولذا فإن $|G| \geq 144 + 80 = 224$ وهذا مستحيل . إذن ، يوجد $H_i, H_j \in Syl_3(G)$ حيث $|H_i \cap H_j| = 3$. وكما هو مبين في المثال (٣٣ , ٤) نجد أن :

$$|N(H_i \cap H_j)| \geq |H_iH_j| = \frac{9 \times 9}{3} = 27$$

وأن 9 يقسم $|N(H_i \cap H_j)|$ و $|N(H_i \cap H_j)|$ يقسم 180 . إذن ، $|N(H_i \cap H_j)| \geq 36$. ومن ثم فإن $[G : N((H_i \cap H_j))] \leq 5$ وهذا مستحيل. وأخيراً نفرض أن $n_5 = 6$. ولنفرض أن $H \in Syl_5(G)$. إذن ، $[G:N(H)] = 6$. ولذا فإن $|N(H)| = 30$. وباستخدام المبرهنة (٤,٢٧) فإن $N(H)$ تحتوي على عنصر من الرتبة 15 . ولكن G تماثل زمرة جزئية من A_6 و A_6 لا تحتوي على أي عنصر من الرتبة 15 مما يؤدي إلى تناقض . إذن ، G ليست بسيطة □

مثال (٤ ,٣٥)

إذا كانت $|G| = 120 = 2^3 \times 3 \times 5$ فإن G ليست بسيطة .

الحل

لنفرض أن G زمرة بسيطة . عندئذ ، $n_5 = 6$. لنفرض أن $H \in Syl_5(G)$. عندئذ ، $n_5 = [G:N(H)] = 6$. ولذا فإن $|N(H)| = 2^2 \times 5$. لنفرض الآن أن $K \in Syl_2(N(H))$. ولذا فإن ، $|K| = 4$. وبما أن $K \leq N(H)$ و $H \in Syl_5(G)$ فإن $N(K) \geq N(N(H)) = N(H)$. ومنه فإن $|N(H)| = 2^2 \times 5$ يقسم $|N(K)|$

وبما أن $|K| = 2^2$ فإنه يوجد $P \in Syl_2(G)$ حيث $K \lhd P$. ومنه فإن $P \le N(P) \le N(K)$
ولذا فإن $|P| = 8$ يقسم $|N(K)|$. ومنه فإن $\text{lcm}(8, 20) = 2^3 \times 5$ يقسم $|N(K)|$.
ولذا فإن $[G : N(K)] \le 3$ وهذا مستحيل لأن $|G|$ لا يقسم $3!$. إذن ، G ليست بسيطة □

ننتقل الآن لبرهان أن A_n زمرة بسيطة لكل $n \ne 4$. لاحظ أولاً أن $A_2 = \{(1)\}$ وأن $A_3 \cong \mathbb{Z}_3$. ولذا فإن كل منهما زمرة بسيطة . أما A_4 فهي زمرة ليست بسيطة لأن $V \lhd A_4$. سنبرهن الآن أن A_n زمرة بسيطة لكل $n \ge 5$ ولإنجاز ذلك نحتاج أولاً إلى بعض النتائج التحضيرية .

تمهيدية (٣٣ , ٤)

لتكن $H \lhd A_n$ حيث $n \ge 5$. إذا احتوت H على دورة طولها 3 فإن $H = A_n$.

البرهان

لنفرض أن $(a\ b\ c) \in H$. ولتكن $(u\ v\ w) \in A_n$ ولنفرض أن $\pi \in S_n$ حيث $\pi(a) = u$ ، $\pi(b) = v$ و $\pi(c) = w$. عندئذ ، $\pi \circ (a\ b\ c) \circ \pi^{-1} = (u\ v\ w)$.
إذا كان $\pi \in A_n$ فإن $(u\ v\ w) \in H$ ونكون قد انتهينا . لنفرض الآن أن $\pi \notin A_n$. عندئذ ، π تبديل فردي . وبما أن $n \ge 5$ فإنه يوجد d و f مختلفان عن a ، b ، c . ومنه فإن : $\pi \circ (d\ f) \in A_n$. الآن :

$$
\begin{aligned}
(u\ v\ w) &= \pi \circ (a\ b\ c) \circ \pi^{-1} = \pi \circ (a\ b\ c) \circ (d\ f) \circ (d\ f)^{-1} \circ \pi^{-1} \\
&= \pi \circ (d\ f) \circ (a\ b\ c) \circ (d\ f)^{-1} \circ \pi^{-1} \\
&= (\pi \circ (d\ f)) \circ (a\ b\ c) \circ (\pi \circ (d\ f))^{-1} \in H
\end{aligned}
$$

ولذا فإن H تحتوي على جميع الدورات الثلاثية . وبما أن الدورات الثلاثية تولد A_n فإننا نخلص إلى أن $H = A_n$ ◆

تمهيدية (٣٤ , ٤)

A_5 زمرة بسيطة .

البرهان

لاحظ أن $|A_5| = 60$ وأن 24 عنصراً من عناصر A_5 من الرتبة 5 ، 20 عنصراً من الرتبة 3 , 15 عنصراً من الرتبة 2 . لنفرض أن $\{e\} \neq H \lhd A_5$. عندئذٍ ، باستخدام مبرهنة لاجرانج نجد أن : $|H| = 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30$. ولقد بينا في التمرين (٤) من التمارين المحلولة (١, ٥ , ٣) أن A_5 لا يمكن أن تحتوي على زمرة جزئية رتبتها 3 ، 5 ، 6 ، 10 ، 12 ، 15 ، 20 أو 30 . ولذا فإن $|H| = 2$ أو $|H| = 4$.ومنه فإن $|A_5 / H| = 30$ أو $|A_5 / H| = 15$. أي أن A_5 / H تحتوي على عنصر من الرتبة 15 وهذا مستحيل لأن A_5 لا تحتوي على عناصر من الرتبة 15 . وبالتالي فإن A_5 زمرة بسيطة ◆

تمهيدية (٣٥ , ٤)

A_6 زمرة بسيطة .

البرهان

لنفرض أن $\{e\} \neq H \lhd A_6$. لنفرض أولاً أن $(1) \neq \pi \in H$ حيث $\pi(i) = i$ ، $1 \leq i \leq 6$. ولتكن $K = \{\sigma \in A_6 : \sigma(i) = i\}$. من الواضح أن $K \cong A_5$. ولذا فإن K زمرة بسيطة . وبما أن $\pi \in H \cap K$ فإن $H \cap K \neq \{e\}$. وبما أن $H \cap K \lhd K$ وأن K زمرة بسيطة فإن $H \cap K = K$. ومنه فإن $K \leq H$. وبما أن K تحتوي على دورة ثلاثية فإن H تحتوي على دورة ثلاثية. ومن ثم نجد باستخدام التمهيدية (٣٣ , ٤) أن $H = A_6$.

لنفرض الآن أن $\pi(i) \neq i$ لكل $(1) \neq \pi \in H$ ولكل $1 \leq i \leq 6$. في هذه الحالة يكون من السهل أن نرى أن $\pi = (1\ 2)\circ(3\ 4\ 5\ 6)$ أو أن $\pi = (1\ 2)\circ(3\ 4)\circ(5\ 6)$. في الحالة الأولى نجد أن $\pi^2 \in H$ وأن $\pi^2(1) = 1$ وهذا مستحيل . وفي الحالة الثانية فإن $\pi \circ (\beta \circ \pi^{-1} \circ \beta^{-1}) \in H$ حيث $\beta = (2\ 3\ 4)$. وهذا مستحيل أيضاً لأن $\pi \circ (\beta \circ \pi^{-1} \circ \beta^{-1})(1) = 1$. وبالتالي فإننا نخلص إلى أن $H = A_6$ ◆

مبرهنة (٣٦, ٤)

A_n زمرة بسيطة لكل $n \geq 5$.

البرهان

لنفرض أن $\{e\} \neq H \lhd A_n$. ولنفرض أن $(1) \neq \beta \in H$. عندئذٍ ، يوجد i ، $1 \leq i \leq n$ بحيث يكون $\beta(i) = j \neq i$. لنفرض أن α دورة طولها 3 بحيث أن $\alpha(i) = i$ وأن $\alpha(j) \neq j$. لاحظ

أن α و β لا يتبدلان لأن : $(\beta\circ\alpha)(i)=\beta(i)=j$ ولكن $(\alpha\circ\beta)(i)=\alpha(j)\neq j$.
ولذا فإن : $\left(\alpha\circ\beta\circ\alpha^{-1}\right)\circ\beta^{-1}\in H$ $\gamma=$ $\neq(1)$. ولكن $\beta\circ\alpha^{-1}\circ\beta^{-1}$ دورة ثلاثية . ولذا فإن γ حاصل ضرب دورتين ثلاثيتين . ومنه فإن γ تحرك ستة عناصر على الأكثر ولتكن $i_1, i_2, \ldots, i_6$.

لنفرض الآن أن :
$K=\left\{\sigma\in A_n : \sigma(i)=i\ \forall\, i\notin\{i_1, i_2, \ldots, i_6\}\right\}$. عندئذ ، $K\cong A_6$. ولذا فإن K زمرة بسيطة . كما أن $(1)\neq\gamma\in H\cap K\lhd K$. ومنه فإن $H\cap K=K$. أي أن $K\leq H$. ولذا فإن H تحتوي على دورة ثلاثية . وبالتالي فإن $H=A_n$ ◆

ننتقل الآن إلى المثال الثاني على الزمر البسيطة حيث نجد زمرة بسيطة من الرتبة 168. إذا كان p عدداً أولياً فإننا سنكتب $GL(n,p)$ بدلاً من $GL(n,\mathbb{Z}_p)$ ونكتب $SL(n,p)$ بدلاً من $SL(n,\mathbb{Z}_p)$. كما أننا نكتب $U_p=\{1,2,\ldots,p-1\}$ بدلاً من $U_p=\{[1],[2],\ldots,[p-1]\}$.

إذا كان $\varphi : GL(n,p)\rightarrow U_p$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(A)=\det A$ فإنه من الواضح أن φ تشاكل غامر وأن $\operatorname{Ker}\varphi=SL(n,p)$. ولذا فباستخدام مبرهنة التماثل الأولى نجد أن $GL(n,p)/SL(n,p)\cong U_p$.

إذا كان $a\in U_p$ فإننا نعرف المصفوفة $E_{ij}(a)$ على أنها المصفوفة التي يكون فيها $a_{ij}=a$ وباقي العناصر أصفاراً. كذلك نعرف المصفوفة $T_{ij}(a)$ على أنها $T_{ij}(a)=I_n+E_{ij}(a)$.

إذا كان $i\neq j$ فإن $T_{ij}(a)$ تسمى مصفوفة مناقلة **(transvection)**.

لاحظ أنه إذا كان $i\neq j$ فإن :

$$T_{ij}(a)T_{ij}(b)=T_{ij}(a+b)$$

$$[T_{ij}(a)]^{-1}=T_{ij}(-a)$$

$$[T_{ij}(a)]^{m}=T_{ij}(ma) \quad \text{لكل } m\in\mathbb{Z}$$

نركز اهتمامنا الآن على الحالة الخاصة التي يكون فيها $n=2$.

مبرهنة (٣٧ , ٤)

إذا كان $p>2$ عدداً أولياً فإن $Z(SL(2,p))=\{I_2,-I_2\}$.

البرهان

لنفرض أن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Z(SL(2,p))$. عندئذ ، $AT_{12}(1) = T_{12}(1)A$. أي أن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$. ومنه فإن :

$$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{bmatrix}$$. ومن ثم فإن $a = a + c$. أي أن $c = 0$. ولذا

فإن $b = 0$. ومن ثم فإن $a = d$. أي أن $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. وبما أن $\det A = 1$ فإن $a^2 = 1$.

ومنه فإن $a = \pm 1$. وبالتالي فإن $Z(SL(2,p)) = \{I_2 , -I_2\}$ ◆

نتيجة (٣٨ , ٤)

إذا كان p عدداً أولياً فإن الزمرة $SL(2,p)$ ليست بسيطة .

البرهان

إذا كان $p > 2$ فإننا نجد باستخدام المبرهنة (٣٧ , ٤) أن $\{e\} \neq Z(SL(2,p)) \lhd SL(2,p)$.

أما إذا كان $p = 2$ فإن :

$$SL(2,2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

ولذا فإن : $$H = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

زمرة جزئية من $SL(2,2)$ دليلها 2 . وبالتالي فإن $H \lhd SL(2,2)$ ◆

مبرهنة (٣٩ , ٤)

الزمرة $SL(2,p)$ مولدة بمصفوفات مناقلة .

البرهان

لنفرض أن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,p)$. إذا كان $c \neq 0$ فإننا بحساب مباشر وملاحظة أن $ad - bc = 1$ نجد: $A = T_{12}(c^{-1}(a-1))\,T_{21}(c)\,T_{12}(b + c^{-1}d(1-a))$. أما إذا كان $c = 0$ فإن $a \neq 0$. لنفرض أن $B = T_{21}(1)A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b+d \end{bmatrix}$. وبحساب مباشر نجد أن :

$B = T_{12}(a^{-1}(a-1))T_{21}(a)T_{12}(b+a^{-1}(b+d)(1-a))$. ولـــذا فـــإن $A = T_{21}(-1)B$ حاصل ضرب مصفوفات مناقلة في هذه الحالة أيضاً . وبالتالي فإن $SL(2,p)$ مولدة بمـصفوفات مناقلة ◆

تعريف (٤ , ٩)

تعّرف الزمرة الخطية الخاصة الإسقاطية **(projective special linear group)** ويرمز لها بالرمز $PSL(2,p)$ على أنها زمرة خارج القسمة : $PSL(2,p) = SL(2,p)/Z(SL(2,p))$.

مبرهنة (٤ , ٤٠)

$|SL(2,p)| = p(p^2-1)$ لكل عدد أولي p . وإذا كان $p > 2$ فإن :

$|PSL(2,p)| = \frac{1}{2}p(p^2-1)$.

البرهان

لنفرض أن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,p)$. ولنفرض أولاً أن $c = 0$. عندئذ، عدد طرق اختيار العنصر a في هذه الحالة هو $p-1$ (لأن $a \neq 0$) . وعدد طرق اختيار العنصر b هو p . وبما أن $ad = 1$ فإن $d = a^{-1}$. ولذا فإن d يتحدد تماماً بمعرفة a . ومنه فإن عدد عناصر $SL(2,p)$ من هذا النوع $p(p-1)$.

نفرض الآن أن $c \neq 0$. عندئذ ، عدد طرق إختيار العنصر c هو $p-1$ وعدد طرق إختيار كل من a و d هو p . وبما أن $ad - bc = 1$ فإن b يتحدد تماماً بمعرفة كل من a, c, d . ولذا فإن عدد عناصر $SL(2,p)$ من هذا النوع هو $p^2(p-1)$. إذن ،

$|SL(2,p)| = p(p-1) + p^2(p-1) = p(p^2-1)$.

وأخيراً إذا كان $p > 2$ فإن $|PSL(2,p)| = \frac{|SL(2,p)|}{|Z(SL(2,p))|} = \frac{1}{2}p(p^2-1)$ ◆

ملحوظة

لاحظ أن $|PSL(2,2)| = |SL(2,2)| = 6$.

مبرهنة (٤ , ٤١)

لتكن $H \lhd SL(2, p)$. عندئذ :

(أ) إذا كانت $A \in H$ فإن $A^T \in H$.

(ب) إذا احتوت H على مصفوفة مناقلة فإن $H = SL(2, p)$.

البرهان

(أ) لنفرض أن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in H$. ولتكن $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. بما أن $H \lhd SL(2, p)$ فإن $B^{-1}A^{-1}B \in H$. ولكن :

$$B^{-1}A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = A^T$$

. إذن، $A^T \in H$.

(ب) لنفرض أن $T_{12}(a) \in H$. سنبرهن أن $T_{12}(b) \, , \, T_{21}(b) \in H$ لكل $b \in \mathbb{Z}_p$. إذا كان $b = 0$ فإن $T_{12}(b) = T_{21}(b) = I_2 \in H$. أما إذا كان $b \neq 0$ فإن $b = na$ حيث $n \in \mathbb{Z}$. ومنه فإن : $T_{12}(b) = T_{12}(na) = [T_{12}(a)]^n \in H$. وبما أن $T_{21}(b) = [T_{12}(b)]^T$ فإن $T_{21}(b) \in H$. وبالتالي فإن H تحتوي على جميع مصفوفات المناقلة ونخلص باستخدام المبرهنة (٤,٣٩) إلى أن $H = SL(2,p)$ ◆

مبرهنة (٤,٤٢)

إذا كانت $Z(SL(2,p)) \subset H \lhd SL(2,p)$ حيث $p \geq 5$ فإن $H = SL(2,p)$.

البرهان

بإستخدام المبرهنة (٤,٤١) يكفي أن نثبت أن H تحتوي على مصفوفة مناقلة.

لنفرض أن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in H$ حيث $A \neq \pm I_2$. لاحظ أولاً أنه إذا كان $b = c = 0$ فإن $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$. ولذا فإن : $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{-1} & a - a^{-1} \\ 0 & a \end{bmatrix} \in H$.

وبما أن $a \neq \pm 1$ فإن $a - a^{-1} \neq 0$. لذا فإننا نستطيع أن نفرض أن H تحتوي على عنصر $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ حيث على الأقل $b \neq 0$ أو $c \neq 0$. ولكن بإستخدام المبرهنة (٤, ٤١) نعلم أن

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in H$. ولذا فإننا نستطيع أن نفرض أن H تحتوي على عنصر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ حيث $c \neq 0$. الآن ، بما أن $H \lhd SL(2, p)$ فإن :

$\begin{bmatrix} 0 & -c^{-1} \\ c & a+d \end{bmatrix} \in H$. $B = (T_{12}(c^{-1}a))^{-1} A \, T_{12}(c^{-1}a) =$ لنفرض أن $X = T_{12}(x^2)$ حيث $0 \neq x \in \mathbb{Z}_p$. إذن ، $BXB^{-1}X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -x^2 \\ -x^2c^2 & 1+x^4c^2 \end{bmatrix} \in H$. وإذا كان $D = \begin{bmatrix} x^{-1}c^{-1} & -x^{-1}c^{-1} \\ 0 & xc \end{bmatrix}$ فإن $D^{-1}BXB^{-1}X^{-1}D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2+x^4c^2 \end{bmatrix} \in H$

الآن ، إذا كان $p \geq 7$ فإن $\mathbb{Z}_p$ يجب أن تحتوي على عنصر $x \neq 0$ حيث $x^4 \neq 1$ (لأنه إذا كان $x^4 = 1$ لكل $x \neq 0$ فإن للمعادلة $x^4 - 1 = 0$ أكثر من 4 , حلول وهذا مستحيل) . وفي هذه الحالة يكون : $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2+c^2 \end{bmatrix} \in H$. $T_{12}(c^2(x^4-1)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2+x^4c^2 \end{bmatrix}^{-1}$

أما إذا كان $p = 5$ فإن $x^4 = 1$ لكل $0 \neq x \in \mathbb{Z}_5$. ولذا فإن $D^{-1}BXB^{-1}X^{-1}D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2+c^2 \end{bmatrix} \in H$. وعلى وجه الخصوص فإن $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \in H$ (عندما $c = \pm 1$) أو أن $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in H$ (عندما $c = \pm 2$) . إذا كان $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \in H$ فإن $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^2 \in H$. وبوضع $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ فإننا نجد أن $D^{-1}BXB^{-1}X^{-1}D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in H$. أما إذا كان $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in H$ فإن $D^{-1}BXB^{-1}X^{-1}D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \in H$.إذن، H تحتوي كل من $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

ولذا فإن $T_{12}(2) \in H$ $= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. ونخلص إلى أن H تحتوي على مصفوفة مناقلة وبهذا ينتهي البرهان ◆

نتيجة (٤٣ , ٤)
إذا كان $p \geq 5$ عدداً أولياً فإن $PSL(2,p)$ زمرة بسيطة .

البرهان
لنفرض أن $K \lhd PSL(2,P)$. بإستخدام مبرهنة التقابل نجد أن :
$K = H/Z(SL(2,p))$ حيث $Z(SL(2,p)) \subset H \lhd SL(2,p)$. ولذا باستخدام المبرهنة (٤٢ , ٤) نجد أن $H = SL(2,p)$. وبالتالي فإن :

$$K = SL(2,p)/Z(SL(2,p)) = PSL(2,p) \quad \blacklozenge$$

(١ , ٤ , ٤) تمارين محلولة (Solved Exerises)

تمرين (١)
إذا كانت G زمرة بسيطة رتبتها 60 فأثبت أن G تحتوي زمرة جزئية رتبتها 12 .

الحل
لنفرض أن G لا تحتوي زمرة جزئية من الرتبة 12 . الآن ، $|G| = 60 = 2^2 \times 3 \times 5$. باستخدام مبرهنة سيلو الثالثة نجد أن $n_5 = 1$ أو $n_5 = 6$. وبما أن G زمرة بسيطة فإن $n_5 = 6$. لنفرض أن $A_1, A_2, \dots, A_6$ زمر سيلو الجزئية من النوع 5 للزمرة G . بما أن $|A_i| = 5$ وأن $A_i \cap A_j = \{e\}$ لكل $i \neq j$ فإن G تحتوي على $6 \times 4 = 24$ عنصر من الرتبة 5 . الآن ، $n_2 = 1, 3, 5, 15$. وبما أن G بسيطة فإن $n_2 \neq 1$. ولذا فإن $n_2 = 3, 5, 15$. لنفرض أن $n_2 = 15$ وأن هذه الزمر هي $B_1, B_2, \dots, B_{15}$. إذا كان $B_i \cap B_j = \{e\}$ لكل $i \neq j$ فإن $\bigcup_{i=1}^{15} B_i$ تحتوي على $3 \times 15 = 45$ عنصر رتبة كل منها لا يساوي 5 . ولذا فإن $|G| \geq 24 + 45 = 69$ وهذا مستحيل . إذن ، يوجد $i \neq j$ حيث $B_i \cap B_j \neq \{e\}$. وبما أن $|B_i| = |B_j| = 4$ فإن $|B_i \cap B_j| = 2$. ولذا فإن $B_i \cap B_j \lhd B_i$ وأن $B_i \cap B_j \lhd B_j$. ومنه فإن $B_i, B_j \subseteq N(B_i \cap B_j)$. أي أن $B_iB_j \subseteq N(B_i \cap B_j)$. ولذا فإن

$$|N(B_i \cap B_j)| \geq |B_iB_j| = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

. وبما أن $N(B_i \cap B_j) \leq G$ فإن $|N(B_i \cap B_j)| = 12, 20, 30, 60$. ولكن من الفرض نعلم أن $|N(B_i \cap B_j)| \neq 12$. إذا كان $|N(B_i \cap B_j)| = 30$ فإن $N(B_i \cap B_j) \lhd G$ وهذا مستحيل لأن G زمرة

بسيطة. إذا كان $|N(B_i \cap B_j)| = 20$ فإن $[G : N(B_i \cap B_j)] = 3$ ومنه فإن $|G|$ لا يقسم $3!$. ولذا باستخدام النتيجة (٨ , ٤) نجد أن G تحتوي على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة وهذا مستحيل . إذا كان $|N(B_i \cap B_j)| = 60$ فإن $N(B_i \cap B_j) = G$. ومن ثم فباستخدام المبرهنة (١٩, ٣) نجد أن $B_i \cap B_j \lhd G$ وهذا مستحيل أيضاً .

لنفرض الآن أن $n_2 = 3$ أو $n_2 = 5$. ولتكن $H \in Syl_2(G)$. عندئذ ، $[G : N(H)] = n_2 \neq 1$. ولذا فإن $N(H) \neq H$. ومنه فإن $|N(H)| \neq 4$. وبما أن 4 يقسم $|N(H)|$ وأن $|N(H)|$ يقسم 60 فإننا نجد أن $|N(H)| = 12, 20, 60$. وبطريقة مماثلة لما سبق نحصل على تناقض في هذه الحالة ايضاً . وبالتالي فإننا نخلص إلى أن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة 12 Δ

تمرين (٢)

إذا كانت G زمرة بسيطة رتبتها 60 فأثبت أن $G \cong A_5$.

الحل

بما أن $|G| = 60$ فباستخدام التمرين (١) نجد أن G تحتوي على زمرة جزئية H حيث $|H| = 12$. وبما أن $[G : H] = 5$ فنجد باستخدام النتيجة (٤,٦) تشاكل $\psi : G \to S_5$ حيث $Ker\psi \subseteq H$. وبما أن G زمرة بسيطة فإن $Ker\psi = \{e\}$. أي أن ψ أحادي ومن ثم فإن $G \cong \psi(S_5) \leq S_5$. سنثبت الآن أن $\psi(S_5)$ لا تحتوي على تبديلات فردية وبالتالي فإن $\psi(S_5) = A_5$ ونكون قد انتهينا. لنفرض لغرض التناقض أن $\psi(S_5)$ تحتوي على تبديل فردي . ولتكن K مجموعة جميع التبديلات الزوجية من $\psi(S_5)$. عندئذ ، $K \lhd \psi(S_5)$ وأن $[\psi(S_5) : K] = 2$ وبما أن $\psi(S_5) \cong G$ فإن $\psi^{-1}(K) \lhd G$ وهذا مستحيل لأن G زمرة بسيطة . ومن ثم فإن جميع تبديلات $\psi(S_5)$ زوجية. ومنه فإن $\psi(S_5) \leq A_5$. وبما أن: $|A_5| = |\psi(S_5)| = |G| = 60$ فإننا نخلص إلى أن $G \cong \psi(S_5) = A_5$ Δ

تمرين (٣)

لتكن G زمرة بسيطة من الرتبة $168 = 2^3 \times 3 \times 7$.

(أ) أثبت أن G لا تحتوي على زمر جزئية من الرتب 28، 42، 56 أو84 .

(ب) أثبت أن $n_7 = 8$ وإذا كانت $H \in Syl_7(G)$ فإن $|N(H)| = 21$.

(ج) أثبت أن G لا تحتوي على زمرة جزئية رتبتها 14 .

الحل

(أ) لنفرض أن $H \leq G$ حيث $|H|=28$. عندئذٍ ، $[G:H]=6$. ولذا باستخدام المبرهنة (٣٢ , ٤) نجد أن $G \leq A_6$. ولذا فإن 168 يقسم $|A_6|$ وهذا تناقض . وبالتالي فإن G لا تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة 28 . وبالمثل ، إذا كانت $H \leq G$ حيث $|H|=42$ أو $|H|=56$ أو $|H|=84$ فإن $G \leq A_4$ أو $G \leq A_3$ أو $G \leq A_2$ وهذا مستحيل .

(ب) $n_7 = 7k+1$ يقسم 24 . ولذا فإن $n_7 = 1$ أو $n_7 = 8$. وبما أن G زمرة بسيطة فإن $n_7 = 8$. الآن ، $[G:N(H)]=n_7=8$. ولذا فإن $|N(H)|=21$.

(ج) بما أن $n_7 = 8$ فإن $[G:N(H)]=8$ حيث $H \in Syl_7(G)$. ولذا فإن $|N(H)|=21$. لنفرض أن $K \leq G$ حيث $|K|=14$. ولنفرض أن m هو عدد زمر سيلو الجزئية من النوع 7 للزمرة K . عندئذٍ ، $m \equiv 1 \pmod 7$ ويقسم 14 . ولذا فإن $m=1$. لنفرض أن $L \in Syl_7(K)$. عندئذٍ ، $L \lhd K$. وبما أن $|L|=7$ فإن $L \in Syl_7(G)$. وبما أن $L \lhd K$ فإن $K \leq N(L)$. ومنه فإن $|K|=14$ يقسم $|N(L)|=21$ وهذا مستحيل Δ

تمارين (٤ , ٤)

(١) إذا كانت G زمرة من الرتبة 210 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٢) إذا كانت G زمرة من الرتبة 216 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٣) إذا كانت G زمرة من الرتبة 280 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٤) إذا كانت G زمرة من الرتبة 300 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٥) إذا كانت G زمرة من الرتبة 302 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٦) إذا كانت G زمرة من الرتبة 312 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٧) إذا كانت G زمرة من الرتبة 351 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٨) إذا كانت G زمرة من الرتبة 375 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٩) إذا كانت G زمرة من الرتبة 396 فأثبت أن G غير بسيطة .

(١٠) إذا كانت G زمرة من الرتبة 462 فأثبت أن G غير بسيطة .

(١١) إذا كانت G زمرة من الرتبة 525 فأثبت أن G غير بسيطة .

(١٢) إذا كانت G زمرة من الرتبة 528 فأثبت أن G غير بسيطة .

(١٣) إذا كانت G زمرة من الرتبة 542 فأثبت أن G غير بسيطة .

(١٤) إذا كانت G زمرة من الرتبة pq حيث $p < q$ عددان أوليان فأثبت أن G ليست بسيطة.

(١٥) أثبت أن كل من الأعداد التالية لا يمكن أن يكون رتبة لزمرة بسيطة :

10403 ، 115939 و 329839 .

(١٦) إذا كانت G زمرة من الرتبة pqr حيث $p < q < r$ أعداداً أولية وحيث $r \not\equiv 1 \pmod q$ فأثبت أن G ليست بسيطة.

(١٧) أثبت أن كل من الأعداد التالية لا يمكن أن يكون رتبة لزمرة بسيطة :

12673 ، 71299 و 80571 .

(١٨) إذا كانت G زمرة من الرتبة p^2q حيث p وq عددان أوليان فأثبت أن G ليست بسيطة .

(١٩) أثبت أن كل من الأعداد التالية لا يمكن أن يكون رتبة لزمرة بسيطة :

963 ، 2725 و 5537 .

(٢٠) إذا كانت G زمرة من الرتبة p^2q^2 حيث p وq عددان أوليان فأثبت أن G ليست بسيطة .

(٢١) أثبت أن كل من الأعداد التالية لا يمكن أن يكون رتبة لزمرة بسيطة :

8281 ، $104\,329$ و $137\,641$.

(٢٢) إذا كان $201 \le n \le 220$ حيث n عدداً مؤلفاً فأثبت أنه لا يوجد زمرة بسيطة رتبتها n .

(٢٣) إذا كانت G زمرة من الرتبة 1785 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٢٤) إذا كانت G زمرة من الرتبة 4389 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٢٥) إذا كانت G زمرة من الرتبة 6545 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٢٦) إذا كانت G زمرة من الرتبة 3675 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٢٧) إذا كانت G زمرة من الرتبة 4851 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٢٨) إذا كانت G زمرة من الرتبة 5145 فأثبت أن G غير بسيطة .

(٢٩) لتكن G زمرة منتهية من الرتبة $p^n m$ حيث $n \ge 1$ و $\gcd(p, m) = 1$. إذا كان $n_p \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ فأثبت أنه يوجد $H \ne K \in Syl_p(G)$ حيث $|H \cap K| = p^{n-1}$.

(٣٠) إستخدم التمرين (٢٩) لإثبات أن كل من الأعداد التالية لا يمكن أن يكون رتبة لزمرة بسيطة :

144 ، 351 ، 525 ، 2025 و 3159 .

(٣١) إذا كان $n \ge 3$ وكانت $H \le S_n$ حيث $|H| = \frac{n!}{2}$ فأثبت أن $H = A_n$.

(٣٢) أثبت أن $PSL(2, 3)$ زمرة ليست بسيطة .

(٣٣) هل توجد زمرة بسيطة من الرتبة 660 ؟

(٣٤) هل توجد زمرة بسيطة من الرتبة 360 ؟

(٣٥) جد الزمرة المشتقة A'_n للزمرة A_n حيث $n \geq 5$.

(٣٦) أثبت أن S_n , A_n , $\{e\}$ هي جميع الزمر الناظمية من S_n حيث $n \geq 5$.

(٣٧) إذا كانت $H \leq G$ حيث $[G:H]=p$ و p عدداً أولياً فأثبت أن H زمرة جزئية أعظمية من G.

(٣٨) إذا كانت $H \lhd G$ فأثبت أن H زمرة جزئية ناظمية أعظمية من G إذا وفقط إذا كانت G/H زمرة بسيطة .

(٣٩) بين أياً من العبارات التالية صحيحة وأيها خاطئة :

(أ) إذا كانت G زمرة من الرتبة 5103 فإن G ليست بسيطة .

(ب) إذا كانت G زمرة من الرتبة 76 فإنها تحتوي على عنصر وحيد من الرتبة 19.

(ت) إذا كانت G زمرة من الرتبة 70 فإن G تحتوي على زمرة جزئية وحيدة من الرتبة 7 وزمرة جزئية وحيدة من الرتبة 5 .

(ث) إذا كانت G زمرة من الرتبة 70 فإن G تحتوي على زمرة جزئية دورية رتبتها 35 .

(ج) إذا كانت G زمرة من الرتبة 215 فإن G تحتوي على زمرة جزئية وحيدة رتبتها n لكل قاسم n للعدد 215 .

(ح) $S'_n = S_n$ لكل $n \geq 5$.

(خ) $\mathbb{Z}_p$ تحتوي على زمرة جزئية أعظمية وحيدة لكل عدد أولي p .

(د) إذا كانت G زمرة منتهية وكانت H زمرة جزئية فعلية غير تافهة من G فإن H محتواة في زمرة جزئية أعظمية من G .

(ذ) إذا كانت H زمرة جزئية أعظمية من الزمرة المنتهية G فإن $[G:H]$ عدداً أولياً .

(ر) إذا كانت G زمرة بسيطة فإن G غير قابلة للإختزال جزئياً .

(ز) إذا كانت G زمرة غير قابلة للإختزال جزئياً فإن G زمرة بسيطة .

(س) $SL(2,2) \cong S_3$.

(ش) $PSL(2,5) \cong A_5$.

الفصل الخامس

إنشاء زمر جديدة
CONSTRUCTING NEW GROUPS

(٥,١) الزمر الحرة
Free Groups

لقد قدمنا في الفصل الثاني مفهوم الزمرة المولّدة بمجموعة S. كما أننا عرضنا أمثلة على زمر من هذا النوع حيث توجد علاقات بين هذه العناصر، مثل الزمرة D_4 والزمرة Q_8.

نقدم في هذا البند مفهوم الزمرة الحرة حيث لاتوجد علاقات بين عناصرها المولدة ، ونستعين بالزمرة الحرة في البند (٥,٢) ، في تقديم أسلوب جبري للزمرة المولّدة بعناصر ترتبط بعلاقات فيما بينها.

تكمن الفكرة الأساسية في تعريف الزمرة الحرة المولّدة بالمجموعة S في عدم وجود علاقات تربط عناصر S بعضها ببعض (أي أن S خالية من العلاقات) . على سبيل المثال ، إذا كانت $S=\{a,b\}$ فإن عناصر الزمرة الحرة تأخذ الصورة :

$$a, aa, ab, abab, bab, \ldots$$

مضافاً إلى هذه العناصر نظائرها ، وإعتبار أن جميعها مختلفة .

نقدم الآن التعريف الرياضي الدقيق للزمرة الحرة :

لتكن S مجموعة ولتكن S^{-1} مجموعة أخرى تحقق $S\cap S^{-1}=\phi$ و $|S|=|S^{-1}|$. وليكن $s^{-1}\in S^{-1}$ هو العنصر الوحيد المقابل للعنصر $s\in S$ لكل $s\in S$. وليكن $t^{-1}\in S$ هو العنصر الوحيد المقابل للعنصر $t\in S^{-1}$ لكل $t\in S^{-1}$. (أي أن $(s^{-1})^{-1}=s$ لكل $s\in S$) . وليكن $e\notin S\cup S^{-1}$. ولنفرض أن $e^{-1}=e$ ، $x^1=x$ لكل $x\in S\cup S^{-1}\cup\{e\}$.

تعريف (٥,١)

إذا كانت S مجموعة فإننا نعني بكلمة (**word**) على S أنها المتتالية $(s_1,s_2,s_3,\ldots)$ حيث $s_i\in S\cup S^{-1}\cup\{e\}$ وبحيث يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ يحقق : $s_i=e$ لكل $i\geq k$.

من التعريف السابق نجد أنه يمكن النظر إلى الكلمة على أنها حاصل ضرب عدد منتهٍ من عناصر S ونظائرها بحيث نسمح بتكرار هذه العناصر. على سبيل المثال ، إذا كانت $S=\{s_1,s_2,s_3\}$ فإن s_3^2 ، $s_1s_3^{-4}s_2^2s_3$ ، $s_2^3s_2^{-1}s_3s_1^2s_1^{-7}$ جميعها كلمات على S.

لكي نضمن عدم حدوث تكرار غير ضروري في عناصر الكلمة فإننا بحاجة إلى كلمات لا تحتوي على إختصار واضح بين عناصرها وهذا ما يقدمه التعريف التالي :

تعريف (٥,٢)

تكون الكلمة $(s_1,s_2,s_3,\ldots)$ مختزلة (**reduced**) إذا حققت ما يلي :

(أ) $s_{i+1}\neq s_i^{-1}$ لكل $e\neq s_i$.

(ب) إذا كان $s_k=e$ فإن $s_i=e$ لكل $i\geq k$.

إذا كانت $S=\{x,y\}$ فإن كل من xy ، $x^{-1}yxyx^{-1}$ ، $x^{-1}yyxy^{-1}$ كلمة مختزلة على S وكل من الكلمتين $yxyxx^{-1}$ و $x^{-1}yxyy^{-1}$ غير مختزلة على S. ولكننا نستطيع الحصول على كلمة مختزلة yxy من $yxyxx^{-1}$ وأخرى مختزلة $x^{-1}yx$ من $x^{-1}yxyy^{-1}$.

ملحوظات

(١) تسمى الكلمة المختزلة $(e,e,e,\ldots)$ الكلمة الخالية ونرمز لها بالرمز e .

(٢) من الآن فصاعداً نكتب الكلمة المختزلة $(s_1^{a_1},s_2^{a_2},\ldots,s_n^{a_n},e,e,\ldots)$ حيث $s_i\in S$ و $a_i=\pm1$ على الصورة $s_1^{a_1}s_2^{a_2}\ldots s_n^{a_n}$.

تعريف (٥,٣)

نقول إن الكلمتين المختزلتين $s_1^{a_1}s_2^{a_2}\ldots s_n^{a_n}$ و $r_1^{b_1}r_2^{b_2}\ldots r_m^{b_m}$ متساويتان إذا كان $n=m$ ، $r_i=s_i$ ، $a_i=b_i$ لكل $1\leq i\leq n$.

لتكن $F(S)$ هي مجموعة جميع الكلمات المختزلة على المجموعة S . من الواضح أن التطبيق $f:S\to F(S)$ المعرف بالقاعدة $f(s)=(s,e,e,\ldots)$ أحادياً . ولذا فإننا نعتبر من الآن فصاعداً

أن $S \subseteq F(S)$. كما نعتبر أن $F(\{\phi\}) = \{e\}$. نعرف الآن عملية ثنائية على $F(S)$.

تعريف (٥,٤)

إذا كان $r_1^{b_1} r_2^{b_2} \dots r_m^{b_m}, s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n} \in F(S)$ حيث $m \le n$ وإذا كان $1 \le k \le m+1$ أصغر عدد صحيح يحقق $s_k^{a_k} \ne r_{m-k+1}^{-b_{m-k+1}}$ فإننا نعرف عملية ثنائية على $F(S)$ كالتالي :

$$(r_1^{b_1} r_2^{b_2} \dots r_m^{b_m})(s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n}) = \begin{cases} r_1^{b_1} \dots r_{m-k+1}^{b_{m-k+1}} s_k^{a_k} \dots s_n^{a_n} & , \ k \le m \\ s_{m+1}^{a_{m+1}} \dots s_n^{a_n} & , \ k = m+1 \le n \\ e & , \ k = m+1, m = n \end{cases}$$

أما إذا كان $n \le m$ فإن العملية الثنائية على $F(S)$ تعرف بطريقة مماثلة. ومن الواضح في كلا الحالتين أن حاصل ضرب كلمتين مختزلتين كلمة مختزلة أيضاً.

مبرهنة (٥,١)

$F(S)$ زمرة حيث العملية الثنائية هي كما وردت في التعريف (٥,٤) .

البرهان

من الواضح أن e هو العنصر المحايد وأن نظير الكلمة المختزلة $s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n}$ هي الكلمة المختزلة $s_n^{-a_n} s_{n-1}^{-a_{n-1}} \dots s_1^{-a_1}$. ولذا يبقى علينا إثبات الخاصية التجميعية . ولهذا الغرض ، نفرض أن $s \in S \cup S^{-1} \cup \{e\}$ ونفرض أن $\sigma_s : F(S) \to F(S)$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة

$$\sigma_s(s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n}) = \begin{cases} s s_1^{a_1} \dots s_n^{a_n} & , \ s_1^{a_1} \ne s^{-1} \\ s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n} & , \ s_1^{a_1} = s^{-1} \end{cases}$$

من الواضح أن $\sigma_{s^{-1}} \circ \sigma_s (s_1^{a_1} \dots s_n^{a_n}) = s_1^{a_1} \dots s_n^{a_n}$. ولذا فإن σ_s تبديل على $F(S)$. لنفرض الآن أن $A(F)$ هي الزمرة الجزئية من زمرة التبديلات على المجموعة $F(S)$ المولّدة بالمجموعة $\{\sigma_s : s \in S\}$. إذن ، من الواضح أن التطبيق $\varphi : F(S) \to A(S)$ المعرف بالقاعدة

$$\varphi(s_1^{a_1} \dots s_n^{a_n}) = \sigma_{s_1}^{a_1} \circ \sigma_{s_2}^{a_2} \circ \dots \circ \sigma_{s_n}^{a_n}$$

أحادياً وشاملاً ويحافظ على العملية الثنائية. وبما أن $A(S)$ زمرة فإن العملية الثنائية عليها تجميعية. وبالتالي فإن العملية الثنائية على $F(S)$ يجب أن تكون تجميعية ◆

ملحوظة

من الممكن إثبات الخاصية التجميعية باستخدام الاستقراء الرياضي على طول الكلمة المختزلة ودراسة

جميع الحالات الممكنة ، إلا أن البرهان الذي قدمناه في المبرهنة (٥,١) قصير جداً .

إن إحدى أهم خصائص الزمرة $F(s)$ هي الخاصية الشمولية (**universal property**) حيث تعكس هذه الخاصية عدم وجود علاقة تربط بين عناصر S .

مبرهنة (٥,٢) [الخاصية الشمولية للزمرة الحرة]

إذا كانت G زمرة ، S مجموعة وكان $\varphi : S \to G$ تطبيقاً فإنه يوجد تشاكل وحيد $\psi : F(S) \to G$ حيث $\psi(s) = \varphi(s)$ لكل $s \in S$ (أي أن الشكل أدناه إبدالياً)

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\text{تطبيق الاحتواء}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & F(S) \arrow[d, dashed, "\psi"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

البرهان

لنفرض أن $s_1^{a_1} s_2^{a_2} \ldots s_n^{a_n} \in F(S)$ و أن $\psi : F(S) \to G$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة

$$\psi(s_1^{a_1} s_2^{a_2} \ldots s_n^{a_n}) = \varphi(s_1)^{a_1} \varphi(s_2)^{a_2} \ldots \varphi(s_n)^{a_n}$$

من الواضح أن ψ تشاكل وأن $\psi(s) = \varphi(s)$ لكل $s \in S$. ولبرهان الوحدانية ، نفرض أن $\psi_1 : F(S) \to G$ تشاكلاً آخر يحقق $\psi_1(s) = \varphi(s)$ لكل $s \in S$. عندئذ ،

$$\psi_1(s_1^{a_1} \ldots s_n^{a_n}) = \psi_1(s_1)^{a_1} \ldots \psi_1(s_n)^{a_n} = \varphi(s_1)^{a_1} \ldots \varphi(s_n)^{a_n} = \psi(s_1^{a_1} \ldots s_n^{a_n})$$

إذن ، $\psi_1 = \psi$ ◆

نتيجة (٥,٣)

$F(S)$ زمرة وحيدة (بإستثناء التماثل).

البرهان

لنفرض أن $F_1(S)$ زمرة أخرى مولّدة بالمجموعة S. ولنفرض أن $i:S\to F(S)$ و $i_1:S\to F_1(S)$ هما تطبيقا الاحتواء. بإستخدام المبرهنة (٥,٢) ، نستطيع إيجاد تشاكلين وحيدين $\psi:F_1(S)\to F(S)$ و $\psi_1:F(S)\to F_1(S)$ حيث $\psi|_S=i$ و $\psi_1|_S=i_1$. ولهذا فإن $\psi\circ\psi_1:F(S)\to F(S)$ تشاكل يحقق $\psi\circ\psi_1(s)=s$ لكل $s\in S$. إذن بإستخدام الوحدانية نجد أن $\psi\circ\psi_1(a)=a$ لكل $a\in F(S)$. وبالمثل، $\psi_1\circ\psi:F_1(S)\to F_1(S)$ تشاكل يحقق $\psi_1\circ\psi(a)=a$ لكل $a\in F_1(S)$. إذن ، ψ تماثل (معكوسه هو التطبيق ψ_1) . وبالتالي فإن $F_1(S)\cong F(S)$ ◆

تعريف (٥,٥)

تسمى الزمرة $F(S)$ الزمرة الحرة (**free group**) على S. ونقول إن زمرة F حرة إذا وجدت مجموعة S حيث $F=F(S)$. وفي هذه الحالة نقول إن S أساس حُر (أو أساس) للزمرة F. ونقول إن $|S|$ هو بعد (**rank**) الزمرة الحرة F. وإذا كانت $|S|=n$ فإننا نقول إن F زمرة حرة بعدها n ونرمز لها بالرمز F_n.

المبرهنة التالية تبين أن أي زمرة جزئية من زمرة حرة يجب أن تكون حرة . ولكننا لن نقدم برهاناً لها ، وبإمكان القارئ الرجوع إلى **[19]** .

مبرهنة (٥,٤)

إذا كانت $H\le F$ حيث F زمرة حرة فإن H زمرة حرة أيضاً ◆

مثال (٥,١)

من الواضح أن الزمرة الحرة F_1 هي $\mathbb{Z}$ □

مثال (٥,٢)

إذا كانت F_n زمرة حرة بعدها n فإن F_n تحتوي على زمرة حرة جزئية F_k لكل $1\le k\le n$.
في الحقيقة ، إذا كانت $S_n=\{s_1,\dots,s_n\}$ فإنه بأخذ $S_k=\{s_1,\dots,s_k\}$ نجد أن :

$$F_k=F(S_k)\le F(S_n)=F_n \quad \square$$

نختم هذا البند بإثبات أنه بإمكاننا إعتبار أي زمرة صورة تشاكلية لزمرة حرة . سيكون لهذه الحقيقة أهمية خاصة في البند القادم .

مبرهنة (٥,٥)

إذا كانت G زمرة فإنه توجد زمرة حرة F وزمرة جزئية ناظمية H من F بحيث يكون $G \cong F/H$.

البرهان

لنفرض أن $G = \langle A \rangle$ (يمكن أن نأخذ $A = G$ كمجموعة مولّدة). ولنفرض أن S مجموعة حيث $|S| = |A|$. عندئذ ، يوجد تقابل $\varphi : S \to A$. إذن ، التطبيق $\psi : F(S) \to G$ المعرف بالقاعدة

$$\psi(s_1^{a_1} \dots s_n^{a_n}) = \varphi(s_1)^{a_1} \dots \varphi(s_n)^{a_n}$$

تشاكل شامل . وبإستخدام المبرهنة الأولى للتماثل ، نجد أن $G \cong F(S)/\mathrm{Ker}\psi$. أي أن $H = \mathrm{Ker}\psi$ ◆

ملحوظة

نلفت إنتباه القارئ إلى أن الزمرة الحرة في المبرهنة (٥,٥) ليست وحيدة ، وهذا ما يوضحه المثال التالي:

مثال (٥,٣)

لتكن $G = \mathbb{Z}_6 = \langle [1] \rangle$. من الممكن اعتبار G زمرة خارج قسمة الزمرة الحرة $\mathbb{Z}$ بتعريف التشاكل الشامل ، $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$ بالقاعدة $\psi(n) = [n]$. ولذا فإن $\mathbb{Z}/\mathrm{Ker}\psi \cong \mathbb{Z}_6$. ومن ناحية أخرى، يمكن إعتبار الزمرة G زمرة خارج قسمة الزمرة الحرة $F_2 = \langle s_1, s_2 \rangle$ ، لأنه إذا كان $\mathbb{Z}_2 = \langle b \rangle$ و $\mathbb{Z}_3 = \langle a \rangle$ فإن : $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$. ولذا فإن التطبيق $\varphi : F_2 \to \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ المعرف بالقاعدة $\varphi(s_1^{a_1} s_2^{a_2}) = (a^{a_1}, b^{a_2})$ تشاكل شامل . وبالتالي فإن $F_2/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathbb{Z}_6 \cong G$ □

تمارين (٥,١,١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

ليكن $n \in \mathbb{Z}^+$ ولتكن F_{n+1} زمرة حرة بعدها $n+1$. أثبت أنه يوجد صورة تشاكلية G للزمرة F_{n+1} بحيث تكون $G \cong F_n$ و $G \le F_{n+1}$.

الحل

لنفرض أن $F_{n+1} = F(S)$ حيث $|S| = n+1$. ولنفرض أن $S = S_1 \cup \{a\}$ حيث $|S_1| = n$. من الواضح أن $G = F(S_1) \le F(S)$ وأن التطبيق $\varphi : S \to G$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x) = \begin{cases} x \ , \ x \ne a \\ e \ , \ x = a \end{cases}$ يمكن توسيعه إلى تشاكل شامل $\psi : F(S) \to G$ حسب المبرهنة (٥,٢).

وبالتالي فإن G صورة تشاكلية للزمرة F_{n+1} Δ

تمرين (٢)

إذا كانت F_n زمرة حرة بعدها n فأثبت أن F_n تحتوي على زمرة جزئية دليلها m لكل $m \in \mathbb{Z}^+$.

الحل

لنفرض أن $G = \langle a \rangle$ زمرة دورية منتهية رتبتها m ولتكن $F_n = F(S)$ حيث $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. عندئذ ، يوجد تشاكل شامل $\psi : F_n \to G$ يحقق $\psi(s_i) = a$ لكل $1 \le i \le n$. وعليه نجد باستخدام مبرهنة التماثل الأولى أن $F_n / \mathrm{Ker}\varphi \cong G$. وبالتالي فإن $\mathrm{Ker}\psi$ زمرة جزئية من F_n دليلها m Δ

تمارين (٥,١)

(١) إذا كانت $F \ne \{e\}$ زمرة حرة فأثبت أن $\mathbb{Z} \le F$.

(٢) إذا كانت $F \ne \{e\}$ زمرة منتهية فأثبت أن F ليست حرة .

(٣) أثبت أن الزمرة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ليست حرة .

(٤) إذا كانت $F = F(S)$ زمرة حرة حيث $|S| \ge 2$ فأثبت أن $Z(F) = \{e\}$.

(٥) ليكن كل من $\varphi : G \to H$ و $\psi : G \to H$ تشاكلاً . إذا كانت $G = \langle S \rangle$ وكان $\varphi|_S = \psi|_S$ فأثبت أن $\varphi = \psi$.

(٦) أعط مثالاً لزمرة $G=\langle S\rangle$ وتطبيق $\varphi:S\to H$ بحيث لا يمكن إيجاد تشاكل $\psi:G\to H$ يحقق $\psi|_S=\varphi$.

(٧) أثبت أن $\langle a,b\rangle=\langle a,ab\rangle$.

(٨) جد زمرة حرة F بحيث تكون S_n صورة تشاكلية للزمرة F لكل $n\in\mathbb{Z}^+$.

(٩) جد عدد التشاكلات من F_2 إلى $\mathbb{Z}_4$.

(١٠) جد عدد التشاكلات من F_2 إلى S_3.

(٥,٢) توصيف الزمر
Group Presentation

تعرضنا في الفصول السابقة إلى زمر مولدة بمجموعة من العناصر ترتبط فيما بينها بعلاقات. في هذا البند ، نستخدم مفهوم الزمرة الحرة على مجموعة S لصياغة هذه الفكرة بشكل رياضي دقيق.

لنفرض أن G زمرة مولدة بالمجموعة S وأن $F(S)$ الزمرة الحرة المولدة بالمجموعة S. ولنفرض أن $R\subseteq F(S)$ وأن $N=\langle R\rangle$ الزمرة الجزئية الناظمية من الزمرة الحرة $F(S)$ المولّدة بالمجموعة R. أي أن :

$$N=\langle\{a^{-1}ra : a\in F(S), r\in R\}\rangle.$$

وليكن $\psi:F(S)\to G$ هو التشاكل الشامل حيث $\psi|_S$ هو التطبيق المحايد على S (أنظر مبرهنة (٥,٥)). نقول إن الزوج المرتب $\langle S,R\rangle$ توصيف (**presentation**) للزمرة G إذا كان $\mathrm{Ker}\psi=N$. أي أن $F(S)/N\cong G$. وإذا كانت كل من S و R مجموعة منتهية فإننا نقول إن $\langle S,R\rangle$ تقديم منته للزمرة G. يسمى كل عنصر من عناصر R رابطاً (**relator**) . وإذا كانت $S=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ و $R=\{r_1,r_2,\ldots,r_m\}$ فإننا نكتب:

$$G=\langle a_1,a_2,\ldots,a_n \mid r_1=r_2=\ldots=r_m=e\rangle.$$

وإذا كانت r هي الكلمة $r_1r_2^{-1}$ فإننا نكتب $r_1=r_2$ بدلاً من $r=e$.

نلفت نظر القارئ إلى أنه على الرغم من أهمية مفهوم توصيف الزمر ، إلا أن له مشاكله ، أحد هذه المشاكل ، هي إفتقاره للوحدانية . أي من الممكن أن يكون لزمرة واحدة أكثر من توصيفاً، وهذا ما يوضحه المثال التالي :

مثال (٥,٤)

من الواضح أن $\mathbb{Z}_5=\langle a\mid 5a=e\rangle$. سنبرهن الآن أن للزمرة $\mathbb{Z}_5$ توصيفاً آخر هو

$\langle a,b,c,d \mid ab=c, bc=d, cd=a, da=b \rangle$. لاحظ أن :

$$\begin{aligned}
&\langle a,b,c,d \mid ab=c, bc=d, cd=a, da=b \rangle \\
&= \langle a,b,c \mid ab=c, cbc=a, bca=b \rangle \quad (\text{لأن } d=bc) \\
&= \langle a,b,c \mid ab=c, cbc=a, ca=e \rangle \\
&= \langle a,b,c \mid ab=c, cbc=a, c=a^{-1} \rangle \\
&= \langle a,b \mid ab=a^{-1}, a^{-1}ba^{-1}=a \rangle \\
&= \langle a,b \mid b=a^{-2}, a^{-1}ba^{-1}=a \rangle \\
&= \langle a \mid a^{-1}a^{-2}a^{-1}=a \rangle \\
&= \langle a \mid a^{5}=e \rangle
\end{aligned}$$

ولذا فإن للزمرة $\mathbb{Z}_5$ توصيفان على الأقل □

إذا كان $\langle S \mid R \rangle$ توصيفاً لزمرة G فإنه يكون من الصعب ، عموماً ، وصف زمر G الجزئية بمعرفة توصيفها. إلا أن المبرهنة التالية تزودنا بطريقة سهلة لإيجاد زمر خارج القسمة للزمرة G .

مبرهنة (٥,٦)

إذا كانت $G=\langle S \mid R \rangle$ وكانت $H=\langle S \mid R_1 \rangle$ حيث $R \subseteq R_1$ فإن H تماثل زمرة خارج قسمة للزمرة G .

البرهان

لنفرض أن $F=F(S)$ وأن N و N_1 زمرتان جزئيتان ناظميتان من F مولدتان بالمجموعتين R و R_1 على التوالي. بما أن $R \subseteq R_1$ فإن $N \le N_1$. وبما أن $N \lhd F$ فإن $N \lhd N_1$. وبما أن $G \cong F/N$ و $H \cong F/N_1$ فإنه بإستخدام المبرهنة الثالثة للتماثل نجد أن :

$$H \cong F/N_1 \cong (F/N)/(N_1/N) \cong G/N_1 \;\blacklozenge$$

في الحالة الخاصة التي تكون فيها G زمرة منتهية فإننا نحصل على النتيجة الهامة التالية التي تستخدم عادة في التعرف على زمرة معلومة تماثل توصيف زمرة معطاة .

نتيجة (٥,٧)

لتكن $G=\langle S \mid R \rangle$ زمرة منتهية ولتكن H زمرة تحقق $|H| \le |G|$. لنفرض أن $T \subseteq H$ مجموعة من المولّدات بحيث يكون $\varphi : S \to T$ تقابل يحقق :

$$.\ s_1^{a_1}s_2^{a_2}\ldots s_n^{a_n} \in R \Rightarrow \varphi(s_1)^{a_1}\varphi(s_2)^{a_2}\ldots\varphi(s_n)^{a_n} = e$$

عندئذٍ ، $G \cong H$.

البرهان

لاحظ أن $G \cong \langle T \mid \varphi(R)\rangle$ وأن $H = \langle T \mid \varphi(R) \cup R_1\rangle$. إذن ، بإستخدام المبرهنة (٥,٦) نجد أن $H \cong G/N$ حيث $N \lhd G$. إذن ، $|G| = |H||N|$. وبما أن $|G| \le |H|$ فإن $|N| = 1$. ولـذا فإن $N = \{e\}$. وبالتالي فإن $H \cong G$ ◆

مثال (٥,٥)

إذا كانت $G = \langle a, b \mid a^2 = e, b^3 = e, (ab)^2 = e\rangle$ فأثبت أن $G \cong S_3$.

الحل

لنفرض أن $N = \langle b\rangle$. وبما أن $(ab)^2 = e$ فإن $a^{-1}b^{-1}a = b \in N$. كذلك $b^{-1}bb = b \in N$.

إذن ، $N \lhd G$. الآن :

$$G/N = G/\langle b\rangle \cong \langle a, b \mid a^2 = e, b^3 = e, (ab)^2 = e, b = e\rangle = \langle a \mid a^2 = e\rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

وبما أن $|N| \le 3$ فإن $|G| \le 6$. ولكن $S_3 = \langle (1\ 2), (1\ 2\ 3)\rangle$ حيث $(1\ 2)^2 = (1)$ و $(1\ 2\ 3)^3 = (1)$ و $((1\ 2)\circ(1\ 2\ 3))^2 = (1)$. وأن $|S_3| = 6$. إذن ، $G \cong S_3$ □

مثال (٥,٦)

إذا كانت $G = \langle a, b \mid a^n = e, b^m = e, ab = ba\rangle$ فأثبت أن $G \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

الحل

بما أن $ab = ba$ فإن G إبدالية . لنفرض الآن أن $N = \langle a\rangle$. إذن ، $N \lhd G$ وأن

$$G/N = \langle a, b \mid a^n = e, b^m = e, ab = ba, a = e\rangle = \langle b \mid b^m = e\rangle \cong \mathbb{Z}_m$$

وبما أن $|N| \le n$ فإن $|G| \le nm$. الآن ، $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m = \langle ([1],[0]), ([0],[1])\rangle$ حيث $n([1],[0]) = ([0],[0])$ ، $m([0],[1]) = ([0],[0])$ و $([1],[0]) + ([0],[1]) = ([0],[1]) + ([1],[0])$. إذن ، $G \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ □

مثال (٥,٧)

إذا كانت $G=\langle A,B\rangle \le GL(2,\mathbb{R})$ حيث $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ فأثبت أن $G\cong D_4$.

الحل

لاحظ أن $A^4=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ و أن $B^2=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$ وأن $BA=A^3B=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$.

إذن ، $G=\langle A,B\mid A^4=I,B^2=I,BA=A^3B\rangle$. لنفرض أن $N=\langle A\rangle$. وبما أن $A^3=A^{-1}$ وأن $BA=A^3B=A^{-1}B$ فإن $BAB^{-1}=A^{-1}\in N$. كذلك ، $AAA^{-1}=A\in N$. إذن $N\lhd G$. ولذا فإن :

$$G/N=\langle A,B\mid A^4=I,B^2=I,BA=A^3B,A=I\rangle=\langle B\mid B^2=I\rangle\cong\mathbb{Z}_2$$

وبما أن $|N|\le 4$ فإن $|G|\le 8$. ولكن $D_4=\langle a,b\mid a^4=e,b^2=e,ba=a^3b\rangle$ وأن $|D_4|=8$. إذن $G\cong D_4$ □

تحذير

على الرغم من أن $N=\langle A\rangle$ وأن $A^4=I$ في المثال (٥,٧) ، إلا أننا لا نستطيع أن نضمن أن $|N|=4$ لأنه من الجائز أن نستخدم علاقات أخرى مع العلاقة $A^4=I$ لنحصل على أن $A^2=I$ وحتى على $A=I$. والمثال التالي يوضح ذلك :

مثال (٥,٨)

إذا كانت $G=\left\langle a,b\mid a^8=e,a^2=b^2,ab=b^{-1}a\right\rangle$ فإن :

$ab=b^{-1}a\Rightarrow bab=a\Rightarrow b^2ab^2=a$. وبما أن $b^2=a^2$ فإن $a^2aa^2=a$. منه فإن $a^4=e$ □

تعريف (٥,٦)

تسمى الزمرة $D_\infty=\langle a,b\mid a^2=b^2=e\rangle$ الزمرة الزوجية غير المنتهية .

مبرهنة (٥,٨)

إذا كانت $G = \langle a, b \rangle$ حيث $o(a) = o(b) = 2$ فإن $G \cong D_\infty$ أو إن $G \cong D_n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$.

البرهان

لنفرض أن $G = \langle a, b \rangle$. لدينا الحالتان التاليتان :

(١) $o(ab) = \infty$. في هذه الحالة G زمرة غير منتهية وتحقق العلاقات على D_∞. بإستخدام المبرهنة (٥,٦) ، نجد أن $G \cong D_\infty / H$ حيث $H \lhd D_\infty$. سنبرهن الآن أن $H = \{e\}$. لنفرض لغرض التناقض أن $H \neq \{e\}$ وأن $h \in H$. بما أن عناصر D_∞ على الشكل $(ab)^m$ ، $(ba)^m$ ، $(ab)^m a$ أو $(ba)^m b$ فإنه يكفي أن نفرض أن $h = (ab)^m$ أو أن $h = (ab)^m a$.

إذا كان $h = (ab)^m$ فإن $H = (ab)^m H = (abH)^m$. ولذا فإن $(abH)^{-1} = (abH)^{m-1}$. وبما أن $o(a) = o(b) = 2$ فإن $(ab)^{-1} H = b^{-1}a^{-1}H = baH$. وعليه فإن ،

$aHabHaH = a^2baH = baH = (abH)^{-1}$. إذن ، $(aH)(abH) = (abH)^{-1}(aH)$.

وبوضع $y = aH$ و $x = abH$ فإننا نجد أن

$$G = D_\infty / H = \langle aH, bH \rangle = \langle aH, abH \rangle = \langle x, y \rangle \text{ حيث } x^m = e \text{ ، } y^2 = e$$

و $yx = x^{-1}y$. أي أن G تحقق علاقات D_m. ولذا فإن G منتهية وهذا مستحيل . وبالمثل ، إذا كان $h = (ab)^m a$ فإننا نجد أن $H = (ab)^m aH = (ab)^m HaH$. ولذا فإن:

$$(abH)^m = (ab)^m H = (aH)^{-1} = a^{-1}H = aH$$

إذن ، $G = \langle aH, bH \rangle = \langle aH, abH \rangle \subseteq \langle abH \rangle$. ولكن $(abH)^{2m} = (aH)^2 = a^2H = H$.

إذن G منتهية ، وهذا مستحيل أيضاً . وبالتالي فإننا نخلص في هذه الحالة إلى أن $h = e$. أي أن $H = \{e\}$. ومنه فإن $G \cong D_\infty$.

(٢) $o(ab) = n < \infty$.

بما أن $G = \langle a, b \rangle = \langle a, ab \rangle$ ، وأن $(ab)^{-1} a = b^{-1}a^{-1}a = b^{-1} = b = a^2b = a(ab)$ فإن :

$G = \langle a, ab \mid a^2 = e, (ab)^n = e, (ab)^{-1}a = a(ab) \rangle$. وبالتالي فإن $G \cong D_n$ ◆

(٥,٢,١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

إذا كانت $G=\langle a,b \mid a^2=b^3=e,(ab)^n=(ab^{-1}ab)^k\rangle$ فأثبت أن :

(أ) $G=\langle ab,ab^{-1}ab\rangle$ (ب) $\langle (ab)^n\rangle \le G'$

الحل

(أ) لنفرض أن $H=\langle ab,ab^{-1}ab\rangle \le G$. عندئذ ، $ab^{-1}=ab^{-1}ab(ab)^{-1}\in H$ وأن $b=b^{-2}=(ab)^{-1}ab^{-1}\in H$ وأن $a=abb^{-1}\in H$. وبالتالي فإن $H=G$.

(ب) لنفرض أن $M=\langle (ab)^n\rangle \le G$. لإثبات أن $M\le G'$ فإنه يكفي استناداً إلى الفقرة (أ) أن نثبت أن $[(ab)^n,ab]=e$ وأن $[(ab)^n,ab^{-1}ab]=e$. الآن

$[(ab)^n,ab]=(ab)^{-n}(ab)^{-1}(ab)^n(ab)=(ab)^{-(n+1)}(ab)^{n+1}=e$.

$[(ab)^n,ab^{-1}ab]=[(ab^{-1}ab)^k,ab^{-1}ab]=e$.

وأخيراً $(ab)^n=(ab^{-1}ab)^k=(a^{-1}b^{-1}ab)^k\in G'$. وبالتالي فإن $M\le G'$ Δ

تمرين (٢)

لتكن $G=\langle a,b\rangle$ حيث $x^3=e$ لكل $x\in G$.

(أ) أثبت أن $[a,b]\in Z(G)$ (ب) أثبت أن G زمرة منتهية.

الحل

(أ) لإثبات أن $[a,b]\in Z(G)$ يكفي أن نثبت أن $[a,b]$ يتبدل مع كل من a و b . الآن :

$a^{-1}[a,b]a=a^{-1}(a^{-1}b^{-1}ab)a$

$=a(b^{-1}a)ba$ (لأن $a^{-2}=a$)

$=a(a^{-1}ba^{-1}b)ba$ (لأن $b^{-1}a=(a^{-1}b)^2$)

$=ba^{-1}b^{-1}a$ (لأن $b^2=b^{-1}$)

$=b(baba)a$ (لأن $a^{-1}b^{-1}=(ba)^2$)

$=b^{-1}aba^{-1}$ (لأن $a^2=a^{-1}$ و $b^2=b^{-1}$)

$=a^{-1}ba^{-1}bba^{-1}$ (لأن $b^{-1}a=(a^{-1}b)^2$)

$=a^{-1}ba^{-1}b^{-1}a^{-1}$ (لأن $b^2=b^{-1}$)

$=a^{-1}bbabaa^{-1}$ (لأن $a^{-1}b^{-1}=(ba)^2$)

$= a^{-1}b^{-1}ab$ (لأن $b^2 = b^{-1}$)

$= [a,b]$

وعليه فإن $[a,b]a = a[a,b]$. وبالمثل نستطيع إثبات أن $[a,b]b = b[a,b]$. وبالتالي نخلص إلى أن $[a,b] \in Z(G)$.

(ب) بما أن $[a,b] \in Z(G)$ فإن $G/Z(G)$ زمرة إبدالية. ولكن أي زمرة إبدالية مولدة بمجموعة منتهية وتحقق $x^n = e$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$ يجب أن تكون منتهية. وعليه فإن كل من $G/Z(G)$ و $Z(G)$ زمرة منتهية وبالتالي نخلص إلى أن G زمرة منتهية Δ

تمارين (٥،٢)

(١) أثبت أن الزمرة $G = \langle a,b \mid a^5 = e, b^2 = e, ba = a^2b \rangle$ تماثل الزمرة $\mathbb{Z}_2$.

(٢) أثبت أن $G = \langle a,b \mid a^2b^2 = e, b^2 = e \rangle$ تماثل الزمرة D_∞ أو الزمرة D_n حيث $n \in \mathbb{Z}^+$.

(٣) أثبت أن $G = \langle a,b \mid abab^2 = e \rangle$ تماثل الزمرة $\mathbb{Z}$.

(٤) أثبت أن $G = \langle a,b,c,d,f \mid ab = c, bc = d, cd = f, df = a, fa = b \rangle$ تماثل الزمرة $\mathbb{Z}_{11}$.

(٥) أثبت أن $G = \langle a,b \mid ab = b^2a, ba = a^2b \rangle$ هي الزمرة التافهة.

(٦) أثبت أن $G = \langle a,b \mid a^2 = e, b^2 = e, a^{-1}b^{-1}ab = e \rangle$ تماثل $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(٧) أثبت أن $G = \langle a,b \mid a^3 = b^3 = (ab)^2 = e \rangle$ تماثل الزمرة A_4.

(٨) أثبت أن الزمرة G في التمرين (٧) تماثل الزمرة $PSL(2,3)$.

(٩) لتكن $G = \langle A,B \rangle \le GL(2,\mathbb{C})$ حيث $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$. أثبت أن $G \cong Q_8$.

(١٠) أثبت أن الزمرة التالية جميعها متماثلة وكل منها يمثل الزمرة Q_8.

(أ) $G = \langle a,b \mid a^4 = e, a^2 = b^2, ab = ba^3 \rangle$

(ب) $H = \langle a,b \mid a = bab, b = aba \rangle$

(ج) $K = \langle a,b \mid ab = c, bc = a, ca = b \rangle$

(١١) إذا كانت $G = \langle A,B \rangle \le SL(2,3)$ حيث $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ فأثبت أن $G \cong Q_8$.

(١٢) إذا كانت $G = \langle a, b \mid a^2 b = b^2 a, a^8 = e \rangle$ فأثبت أن $(ab)^4 = e$ وأن $b^8 = e$.

(١٣) إذا كان $\pi : SL(2,7) \to PSL(2,7)$ هو التشاكل الطبيعي وكان $a = \pi \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $b = \pi \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ فأثبت أن $G = \langle a, b \rangle$ تماثل D_4.

(١٤) إذا كانت $G = \langle a, b \mid a^3 = e, b^4 = e, (ab)^2 = e \rangle$ فأثبت أن $G \cong S_4$.

(٥,٣) الضرب والجمع المباشر التام
Complete Direct Products and Sums

لقد قدمنا في البند (٣,٤) مفهوم الضرب المباشر لعدد منته من الزمر. في هذا البند نعمم هذا المفهوم حيث نقدم الضرب المباشر والجمع المباشر لأي عائلة من الزمر.

لتكن $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر وليكن $\prod_{i \in I} G_i$ هو الضرب الديكارتي للمجموعات G_i. أي أن $\prod_{i \in I} G_i = \{f : f : I \to \bigcup_{i \in I} G_i, f(i) \in G_i \ \ \forall i \in I\}$. نعرف عملية ثنائية على $\prod_{i \in I} G_i$ على النحو التالي:

إذا كانت $f, g \in \prod_{i \in I} G_i$ فإن $fg : I \to \bigcup_{i \in I} G_i$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $fg(i) = f(i) g(i)$. بما أن $f(i), g(i) \in G_i$ و G_i زمرة فإنه من الواضح أن $f(i) g(i) \in G_i$. ولذا فإن $fg \in \prod_{i \in I} G_i$.

لاحظ أنه لو كان $f(i) = a_i$ و $g(i) = b_i$ فإن $f = \{a_i : i \in I\}$ و $g = \{b_i : i \in I\}$. وهذا يكون $fg = \{a_i b_i : i \in I\}$. وهذا هو بالضبط التعريف الذي قدمناه في الحالة التي تكون فيها مجموعة الدليل I منتهية.

من الواضح أن $\prod_{i \in I} G_i$ زمرة. لاحظ أن العنصر المحايد هو التطبيق $f : I \to \bigcup_{i \in I} G_i$ المعرف بالقاعدة $f(i) = e_i$ لكل $i \in I$. ومن الواضح أيضاً أن $\prod_{i \in I} G_i$ زمرة إبدالية إذا كانت كل من G_i إبدالية.

تعريف (٥,٧)

إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر فإن الزمرة $\prod_{i\in I} G_i$ تدعى زمرة الضرب المباشر (**direct product**) أو زمرة الجمع المباشر التام (**complete direct sum**) . وفي الحالة التي تكون فيها $I = \{1, 2, ..., n\}$ مجموعة منتهية فإننا نكتب $\prod_{i=1}^{n} G_i = G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$ ، أو $G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_n$ إذا كانت الزمر إبدالية .

مبرهنة (٥,٩)

التطبيق $\pi_k : \prod_{i\in I} G_i \to G_k$ المعرف بالقاعدة : $\pi_k(f) = f(k)$ لكل $f \in \prod_{i\in I} G_i$ ولكل $k \in I$ تشاكل شامل .

البرهان

لكل $f, g \in \prod_{i\in I} G_i$ لدينا : $\pi_k(fg) = (fg)(k) = f(k)g(k) = \pi_k(f)\pi_k(g)$.

إذن ، π_k تشاكل . ومن الواضح أن π_k شامل ◆

تعريف (٥,٨)

يدعى التشاكل الشامل المقدم في المبرهنة (٥,٩) ، الإسقاط الطبيعي (**canonical projection**) .

مبرهنة (٥,١٠)

إذا كانت G زمرة وكانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر وكان $\alpha_i : G \to G_i$ تشاكلاً لكل $i \in I$ فإنه يوجد تشاكل وحيد $\alpha : G \to \prod_{i\in I} G_i$ يحقق $\pi_i \circ \alpha = \alpha_i$ لكل $i \in I$.

البرهان

لنفرض أن $\alpha : G \to \prod_{i\in I} G_i$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\alpha(a)(i) = \alpha_i(a)$ لكل $a \in G$ ولكل $i \in I$. لنفرض أن $a, b \in G$. عندئذ:

$\alpha(ab)(i) = \alpha_i(ab) = \alpha_i(a)\alpha_i(b) = \alpha(a)(i)\alpha(b)(i)$. ولهذا فإن α تشاكل .

كذلك، $(\pi_i \circ \alpha)(a)(i) = \pi_i(\alpha_i(a)) = \alpha_i(a)$. إذن ، $\pi_i \circ \alpha = \alpha_i$ لكل $i \in I$.

ولبرهان الوحدانية ، نفرض أن $\beta : G \to \prod_{i\in I} G_i$ تشاكل آخر يحقق $\pi_i \circ \beta = \alpha_i$ لكــل $i \in I$.

عندئذ، بإستخدام الفرض وتعريف π_i نجد أن :

$\alpha(a)(i) = \pi_i \circ \alpha(a) = \alpha_i(a) = (\pi_i \circ \beta)(a) = \beta(a)(i)$. إذن، $\alpha = \beta$ ◆

مبرهنة (٥,١١)

إذا كانت كل من $\{G_i : i \in I\}$ و $\{H_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر وكان $\varphi_i : G_i \to H_i$ تــشاكلاً لكل $i \in I$ وكان $\varphi : \prod_{i\in I} G_i \to \prod_{i\in I} H_i$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(f)(i) = \varphi_i(f(i))$ لكل $f \in \prod_{i\in I} G_i$ فإن :

(أ) φ تشاكل

(ب) φ أحادي إذا وفقط إذا كان φ_i أحادياً لكل $i \in I$

(ج) φ شامل إذا وفقط إذا كان φ_i شاملاً لكل $i \in I$

(د) $\operatorname{Ker}\varphi = \prod_{i\in I} \operatorname{Ker}\varphi_i$

(هـ) $\varphi\left(\prod_{i\in I} G_i\right) = \prod_{i\in I} \varphi_i(G_i)$

البرهان

(أ) لنفرض أن $g, h \in \prod_{i\in I} G_i$. عندئذ ،

$$\begin{aligned}\varphi(fg)(i) = \varphi_i((fg)(i)) = \varphi_i(f(i)g(i)) = \varphi_i(f(i))\varphi_i(g(i)) &= \varphi(f)(i)\varphi(g)(i)\\ &= (\varphi(f)\varphi(g))(i)\end{aligned}$$

لكل $i \in I$. إذن ، $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$. وبالتالي فإن φ تشاكل.

(ب) من الواضح أنه إذا كان φ أحادي فإن φ_i أحادي لكل $i \in I$. ولبرهان العكس ، نفرض أن φ_i أحادي لكل $i \in I$. ولنفرض أن $g \in \operatorname{Ker}\varphi$. إذن ، $\varphi(g) = e$. أي أن ، $\varphi(g)(i) = \varphi_i(g(i)) = e(i) = e_i$ لكل $i \in I$. وبما أن φ_i أحادي فإن $g(i) = e_i$ لكل $i \in I$.

إذن $g = e$. وبالتالي فإن φ أحادي .

(ج) من الواضح أنه إذا كان φ شامل فإن φ_i شامل لكل $i \in I$. ولبرهان العكس ، نفــرض أن φ_i شامل لكل $i \in I$. ولنفرض أن $h \in \prod_{i\in I} H_i$. إذن $h(i) \in H_i$ لكــل $i \in I$. وبمــا أن φ_i شامل فإنه يوجد $g(i) \in G_i$ حيث $\varphi_i(g(i)) = f(i)$. إذن ، $\varphi(g)(i) = \varphi_i(g(i)) = f(i)$ لكل $i \in I$. أي أن $\varphi(g) = f$. ومن ثم فإن φ شامل.

(د) $f \in \mathrm{Ker}\varphi \Leftrightarrow \varphi(f)=e \Leftrightarrow \varphi(f)(i)=e(i)\forall i \in I \Leftrightarrow \varphi_i(f(i))=e_i \forall i \in I$

$$\Leftrightarrow f(i) \in \mathrm{Ker}\varphi_i \forall i \in I \Leftrightarrow f \in \prod_{i\in I} \mathrm{Ker}\varphi_i$$

إذن ، $\mathrm{Ker}\varphi = \prod_{i\in I} \mathrm{Ker}\varphi_i$.

(هـ) بما أن $\varphi_i : G_i \to \varphi_i(G_i)$ تشاكل شامل فإنه بإستخدام الفقرة (ج) ، نجد أن $\varphi : \prod_{i\in I} G_i \to \prod_{i\in I} \varphi_i(G_i)$ تشاكل شامل . إذن ، $\varphi\left(\prod_{i\in I} G_i\right) = \prod_{i\in I} \varphi_i(G_i)$ ◆

نتيجة (٥,١٢)

إذا كانت $\{H_i \lhd G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر والزمر الجزئية الناظمية فإن $\prod_{i\in I} H_i \lhd \prod_{i\in I} G_i$ وإن $\prod_{i\in I} G_i / \prod_{i\in I} H_i \cong \prod_{i\in I} (G_i / H_i)$.

البرهان

لنفرض أن $\varphi_i : G_i \to G_i / H_i$ هو التشاكل الشامل الطبيعي لكل $i \in I$. عندئذ ، بإستخدام المبرهنة (٥,١١) ، نجد أن التطبيق $\varphi : \prod_{i\in I} G_i \to \prod_{i\in I} (G_i / H_i)$ المعرف بالقاعدة: $\varphi(f)(i) = \varphi_i(f(i))$ تشاكل شامل وأن $\mathrm{Ker}\varphi = \prod_{i\in I} \mathrm{Ker}\varphi_i = \prod_{i\in I} H_i$.

إذن ، بإستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن $\prod_{i\in I} G_i / \prod_{i\in I} H_i \cong \prod_{i\in I} (G_i / H_i)$ ◆

تعريف (٥,٩)

(أ) إذا كانت كل من G و H زمرة وكان $a, b \in G$ فإننا نقول إن التطبيق $\alpha : G \to H$ يفصل العنصرين **(separate)** a و b إذا كان $\alpha(a) \neq \alpha(b)$.

(ب) إذا كانت G زمرة وكانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر وكانت $\alpha_i : G \to G_i$ عائلة من التطبيقات فإننا نقول إن عائلة التطبيقات تفصل العناصر إذا كان لكل $a, b \in G$ و $a \neq b$ فإنه يوجد α_i حيث $\alpha_i(a) \neq \alpha_i(b)$.

مبرهنة (٥,١٣)

إذا كانت $\alpha_i : G \to G_i$ عائلة من التشاكلات فإن العبارات التالية متكافئة :

(أ) $\{\alpha_i : i \in I\}$ تفصل العناصر

(ب) التشاكل الطبيعي $\alpha : G \to \prod_{i\in I} G_i$ أحادي.

(ج) $\bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\alpha_i = \{e\}$.

البرهان

(أ) $\Leftarrow$ (ب): لنفرض أن $a, b \in G$ حيث $a \neq b$. إذن يوجد $i \in I$ حيث $\alpha_i(a) \neq \alpha_i(b)$. ولذا فإن $\alpha(a)(i) \neq \alpha(b)(i)$. أي أن $\alpha(a) \neq \alpha(b)$. وبالتالي فإن α أحادي.

(ب) $\Leftarrow$ (ج) : لنفرض أن $a \in \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\alpha_i$. إذن ، $\alpha_i(a) = e_i = \alpha_i(e)$ لكل $i \in I$. وعليه فإن ، $\alpha(a) = \alpha(e)$. وبما أن α أحادي فإن $a = e$. إذن $\bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\alpha_i = \{e\}$.

(ج) $\Leftarrow$ (أ) : لنفرض أن $a, b \in G$ حيث $a \neq b$. عندئذ، $ab^{-1} \neq e$. ولذا فإن $ab^{-1} \notin \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}\alpha_i$. وعليه فإن، يوجد $i \in I$ حيث $ab^{-1} \notin \mathrm{Ker}\alpha_i$. إذن $\alpha_i(ab^{-1}) \neq e_i$. ومنه فإن $\alpha_i(a) \neq \alpha_i(b)$. وبالتالي فإن $\{\alpha_i : i \in I\}$ تفصل العناصر ◆

نقدم الآن زمرة أخرى هي زمرة الجمع المباشر والتي يمكن النظر إليها كزمرة جزئية من زمرة الضرب المباشر .

تعريف (٥,١٠)

لتكن $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر وليكن $f \in \prod_{i\in I} G_i$. يعرف سَنَدْ f **(support of f)** بأنه المجموعة $S(f) = \{i \in I : f(i) \neq e_i\}$.

تعريف (٥,١١)

إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر . تعرف زمرة الجمع المباشر **(direct sum)** للزمر G_i على النحو التالي: $\sum_{i\in I} G_i = \left\{ f \in \prod_{i\in I} G_i : \text{مجموعة منتهية } S(f) \right\}$.

مبرهنة (٥,١٤)

إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر فإن $\prod_{i\in I} G_i \lhd \sum_{i\in I} G_i$.

البرهان

لنفرض أن $f,g \in \sum_{i\in I} G_i$. إذن كل من $S(f)$ و $S(g)$ مجموعة منتهية . ولذا فإن $S(f)\cup S(g)$ مجموعة منتهية أيضاً. ولذا فإنه لإثبات أن $fg^{-1} \in \sum_{i\in I} G_i$ يكفي أن نثبت أن $S(fg^{-1}) \subseteq S(f)\cup S(g)$. لنفرض إذن أن $i \notin S(f)\cup S(g)$. عندئذ ، $f(i)=g(i)=e_i$. ومنه فإن : $(fg^{-1})(i)=f(i)g^{-1}(i)=e_ie_i^{-1}=e_i$. إذن $i \notin S(fg^{-1})$. ولذا فإن $S(fg^{-1}) \subseteq S(f)\cup S(g)$. ومن ثم فإنه $\sum_{i\in I} G_i \le \prod_{i\in I} G_i$.

ولإثبات الناظمية ، نفرض أن $f \in \sum_{i\in I} G_i$ وأن $g \in \prod_{i\in I} G_i$. ولنفرض أن $i \notin S(f)$. عندئذ، $f(i)=e_i$. ولذا فإن $(g^{-1}fg)(i)=g^{-1}(i)f(i)g(i)=g^{-1}(i)g(i)=e_i$. وعليه فإن $i \notin S(g^{-1}fg)$. ولذا فإن $S(g^{-1}fg) \subseteq S(f)$. وبالتالي فإن $\sum_{i\in I} G_i \lhd \prod_{i\in I} G_i$ ◆

ملحوظات

(١) يطلق على زمرة الجمع المباشر $\sum_{i\in I} G_i$ أسماء كثيرة منها ، زمرة الضرب المباشر المقتصر **(restricted direct product)** ، زمرة الضرب المباشر الضعيف **(weak direct product)** ، زمرة الجمع المباشر غير التام **(incomplete direct sum)** .

(٢) لاحظ أيضاً أنه إذا كانت I مجموعة منتهية فإن الزمرتين $\prod_{i\in I} G_i$ و $\sum_{i\in I} G_i$ متساويتان. ويظهر الاختلاف فقط إذا كانت I غير منتهية .

(٣) إذا كانت الزمر G_i إبدالية فإننا نعتبر من الآن فصاعداً أن العملية الثنائية على G_i هي عملية الجمع.

تعريف (٥,١٢)

لتكن $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر وليكن $k \in I$. نقول إن التطبيق $\lambda_k : G_k \to \sum_{i\in I} G_i$ هو

تطبيق الإحتواء الطبيعي **(canonical injection)** إذا كان معرفاً بالقاعدة :

$$\lambda_k(a)(i)=\begin{cases} a & , \ k=i \\ e_i & , \ k\neq i \end{cases}$$ لكل $a\in G_k$.

مبرهنة (٥,١٥)

إذا كانت $\{G_i : i\in I\}$ عائلة من الزمر وكان $k\in I$ فإن :

(أ) λ_k تشاكل أحادي (ب) $\lambda_k(G_k)\lhd \prod_{i\in I} G_i$

البرهان

(أ) لنفرض أن $a,b\in G_k$. ولنفرض أن $\lambda_k(a)=f$ و $\lambda_k(b)=g$ و $\lambda_k(ab)=h$.
عندئذ لكل $i\in I$ لدينا :

$$(fg)(i)=f(i)g(i)=\begin{cases} ab & , \ k=i \\ e_i & , \ k\neq i \end{cases}$$
$$=h(i)$$

إذن ، $fg=h$. ولذا فإن $\lambda_k(ab)=\lambda_k(a)\lambda_k(b)$. أي أن λ_k تشاكل .

لنفرض الآن أن $\lambda_k(a)=\lambda_k(b)$. بما أن $\lambda_k(a)(i)=\begin{cases} a & , \ k=i \\ e_i & , \ k\neq i \end{cases}$ وأن

$\lambda_k(b)(i)=\begin{cases} b & , \ k=i \\ e_i & , \ k\neq i \end{cases}$ فإن $a=b$. وبالتالي فإن λ_k أحادي.

(ب) البرهان مباشر ونتركه كتمرين للقارئ ◆

مبرهنة (٥,١٦)

إذا كانت $\{G_i : i\in I\}$ عائلة من الزمر وكان $f\in \sum_{i\in I} G_i$ حيث $S(f)=\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}$ وكان $f(i_j)=a_j$ لكل $1\le j\le n$ فإن $f=\lambda_{i_1}(a_1)\lambda_{i_2}(a_2)\ldots\lambda_{i_n}(a_n)$.

البرهان

لنفرض أن $g=\lambda_{i_1}(a_1)\lambda_{i_2}(a_2)\ldots\lambda_{i_n}(a_n)$. إذا كان $i\notin S(f)$ فإن $i\neq i_j$ لكل $1\le j\le n$ ومنه فإن $\lambda_{i_j}(a_j)(i)=e_i$. أي أن $g(i)=e_i$. وبما أن $i\notin S(f)$ فإن $f(i)=e_i$ أيضاً . إذن ،

$f(i)=g(i)$ لكل $i\notin S(f)$. أما إذا كان $i\in S(f)$ فإن $i=i_j$ حيث $1\le j\le n$. وفي هذه الحالة يكون $\lambda_{i_j}(a_j)(i)=f(i_j)$ ولكن $\lambda_{i_t}(a_t)(i)=e_i$ لكل $t\neq j$. إذن، $g(i)=e_ie_i\ldots f(i_j)\ldots e_i=f(i_j)=f(i)$. وبالتالي فإن $f=g$ ◆

ملحوظة

إذا كان $f\in\sum_{i\in I}G_i$ و G_i إبدالية فإننا سنكتب من الآن فصاعداً $f=\sum_{i\in I}f(i)$ حيث $f(i)\in G_i$. لاحظ أن هذا المجموع منته لأن $S(f)$ مجموعة منتهية .

المبرهنة التالية رديفة المبرهنة (٥,١٠) للزمر الإبدالية.

مبرهنة (٥,١٧)

إذا كانت G زمرة إبدالية وكانت $\{G_i : i\in I\}$ عائلة من الزمر الإبدالية وكان $\varphi_i : G_i\to G$ تشاكلاً لكل $i\in I$ فإنه يوجد تشاكل وحيد $\varphi:\sum_{i\in I}G_i\to G$ حيث $\varphi\circ\lambda_k=\varphi_k$ لكل $k\in I$.

البرهان

لنفرض أن $f=\sum_{i\in I}f(i)\in\sum_{i\in I}G_i$. ولنفرض أن φ معرفاً بالقاعدة $\varphi(f)=\sum_{i\in I}\varphi_i(f(i))$.

لإثبات أن φ تشاكل نفرض أن $f,g\in\sum_{i\in I}G_i$. عندئذ،

$$\begin{aligned}\varphi(f+g)&=\sum_{i\in I}\varphi_i((f+g)(i))=\sum_{i\in I}\varphi_i(f(i)+g(i))\\&=\sum_{i\in I}(\varphi_i(f(i))+\varphi_i(g(i)))=\sum_{i\in I}\varphi_i(f(i))+\sum_{i\in I}\varphi_i(g(i))=\varphi(f)+\varphi(g)\end{aligned}$$

إذن ، φ تشاكل.

ولإثبات أن $\varphi\circ\lambda_k=\varphi_k$ لكل $k\in I$. نفرض أن $a\in G_k$. عندئذ ،

$(\varphi\circ\lambda_k)(a)=\varphi(\lambda_k(a))=\sum_{i\in I}\varphi_i(\lambda_k(a)(i))$. ولكن $\lambda_k(a)(i)\neq 0$ فقط في الحالة التي يكون فيها $k=i$.

إذن ، $(\varphi\circ\lambda_k)(a)=\varphi_k(\lambda_k(a))(k)=\varphi_k(a)$. وبالتالي فإن $\varphi\circ\lambda_k=\varphi_k$ لكل $k\in I$.

ولإثبات الوحدانية ، نفرض أن $\psi:\sum_{i\in I} G_i \to G$ تشاكلاً آخر يحقق $\psi\circ\lambda_k=\varphi_k$ لكل $k\in I$.
إذن ، $\psi(\lambda_k(a))=\varphi_k(a)=\varphi(\lambda_k(a))$. ولذا فإنه بإستخدام المبرهنة (٥,١٦) نجد أن $\psi=\varphi$ ◆

مبرهنة (٥,١٨)

لتكن كل من $\{G_i : i\in I\}$ و $\{H_i : i\in I\}$ عائلة من الزمر وليكن $\varphi_i : G_i \to H_i$ تشاكلاً لكل $i\in I$. إذا كان $\varphi:\sum_{i\in I} G_i \to \sum_{i\in I} H_i$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(f)(i)=\varphi_i(f(i))$ لكل $i\in I$ فإن :

(أ) φ تشاكل (ب) φ أحادي إذا وفقط إذا كان φ_i أحادياً لكل $i\in I$

(ج) φ شامل إذا وفقط إذا كان φ_i شاملاً لكل $i\in I$.

(د) $\operatorname{Ker}\varphi=\sum_{i\in I}\operatorname{Ker}\varphi_i$ (هـ) $\varphi\left(\sum_{i\in I} G_i\right)=\sum_{i\in I}\varphi(G_i)$

البرهان

لاحظ أولاً أنه إذا كان $i\notin S(f)$ فإن $f(i)=e_i$. ولذا فإن $\varphi_i(f(i))=e_i$. ومن ثم فإن $\varphi(f)(i)=e_i$. أي أن $i\notin S(\varphi(f))$. إذن ، $S(\varphi(f))\subseteq S(f)$. ومنه إذا كان $f\in\sum_{i\in I} G_i$ فإن $\varphi(f)\in\sum_{i\in I} H_i$.

(أ) لنفرض أن $g,h\in\sum_{i\in I} G_i$. عندئذ ،

$$\begin{aligned}\varphi(fg)(i)&=\varphi_i((fg)(i))=\varphi_i(f(i)g(i))=\varphi_i(f(i))\varphi_i(g(i))=\varphi(f)(i)\varphi(g)(i)\\&=(\varphi(f)\varphi(g))(i)\end{aligned}$$

لكل $i\in I$. إذن ، $\varphi(fg)=\varphi(f)\varphi(g)$. وبالتالي فإن φ تشاكل.

(ب) إذا كان φ أحادياً فإنه من الواضح أن φ_i أحادي لكل $i\in I$.

ولبرهان العكس ، نفرض أن φ_i أحادي لكل $i\in I$. ولنفرض أن $g\in\operatorname{Ker}\varphi$. إذن، $\varphi(g)=e$. أي أن $\varphi(g)(i)=e_i$ لكل $i\in I$. ومنه فإن $\varphi_i\big(g(i)\big)=e_i$ لكل $i\in I$. وبما أن φ_i أحادي فإن $g(i)=e_i$ لكل $i\in I$. إذن ، $g=e$. وبالتالي فإن φ أحادي .

(ج) من الواضح أنه إذا كان φ شاملاً فإن φ_i شامل لكل $i\in I$.

ولبرهان العكس ، نفرض أن φ_i شامل لكل $i \in I$. ولنفرض أن $h \in \sum_{i\in I} H_i$ حيث $S(h) = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$. بما أن φ_i شامل لكل $i \in I$ فإنه لكل $1 \le k \le n$ يوجد $x_k \in G_{i_k}$ حيث $\varphi_{i_k}(x_k) = h(i_k)$. لنفرض الآن أن :

$$f(i) = \begin{cases} x_k & ، \ i = i_k \\ e_i & ، \ i \neq i_k \ \forall 1 \le k \le n \end{cases}.$$

من الواضح أن $S(f)$ مجموعة منتهية . ولذا فإن $f \in \sum_{i\in I} G_i$. وأن

$$\varphi(f)(i) = \varphi_i(f(i)) = \begin{cases} \varphi_{i_k}(x_k) = h(i_k) & ، \ i = i_k \\ e_i & ، \ i \neq i_k \forall 1 \le k \le n \end{cases}.$$

وبالتالي فإن $\varphi(f) = h$.

(د) و (هـ) متروكان للقارئ ◆

نتيجة (٥,١٩)

إذا كانت $\{H_i \lhd G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر والزمر الجزئية الناظمية فإن $\sum_{i\in I} G_i \rhd \sum_{i\in I} H_i$ وأن $\sum_{i\in I} G_i / \sum_{i\in I} H_i \cong \sum_{i\in I} (G_i / H_i)$.

البرهان

لنفرض أن $\pi_i : G_i \to G_i / H_i$ التشاكل الشامل الطبيعي لكل $i \in I$. إذن التطبيق $\varphi : \sum_{i\in I} G_i \to \sum_{i\in I} (G_i / H_i)$ المعرف بالقاعدة $\varphi(f)(i) = \varphi_i(f(i))$ تشاكل شامل . كذلك $\operatorname{Ker}\varphi = \sum_{i\in I} \operatorname{Ker}\varphi_i = \sum_{i\in I} H_i$. إذن ، بإستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن

$$\sum_{i\in I} G_i / \sum_{i\in I} H_i \cong \sum_{i\in I} (G_i / H_i)$$ ◆

لقد قدمنا في البند (٣,٤) مفهوم الضرب المباشر الداخلي لعدد منته من الزمر الجزئية الناظمية من زمرة G . نقدم الآن تعميماً لهذا المفهوم .

تعريف (٥,١٣)

لتكن $\{H_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الجزئية الناظمية من الزمرة G. نقول إن G زمرة جمع مباشر داخلي **(internal direct sum)** للزمر الجزئية $\{H_i : i \in I\}$ إذا كان لكل $e \neq a \in G$ توجد عناصر وحيدة $e_{i_k} \neq a_{i_k} \in H_{i_k}$ ، $1 \leq k \leq n$ بحيث $a = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}$ وبحيث تكون $i_1, i_2, \dots, i_n$ عناصر مختلفة من I.

المبرهنة التالية تعميم للمبرهنة (٣,٣٢) وتزودنا بتعريف مكافئ للجمع المباشر الداخلي.

مبرهنة (٥,٢٠)

تكون الزمرة G جمعاً مباشراً داخلياً لعائلة الزمر الجزئية الناظمية $\{H_i : i \in I\}$ من G إذا وفقط إذا كان :

(أ) $G = \langle \bigcup_{i \in I} H_i \rangle$ (ب) $H_k \cap \langle \bigcup_{i \neq k} H_i \rangle$ لكل $k \in I$

البرهان

مشابه لبرهان المبرهنة (٣,٣٢) ، ولذا فإننا نتركه كتمرين للقارئ ◆

ملحوظة

لاحظ أنه إذا كانت G زمرة جمع مباشر للزمر الجزئية الناظمية $\{H_i : i \in I\}$ فـإن $H_i \lhd G$ وأن G تماثل زمرة الجمع المباشر $\sum_{i \in I} H_i$. ولكن $\sum_{i \in I} H_i$ في الحقيقة لا يحتوي H_i كزمرة جزئية ولكنه يحتوي الزمر الجزئية $\lambda_i(H_i)$ المماثلة للزمرة H_i. إن هذا الاختلاف ليس له تأثير حقيقي عند التطبيقات ، ولذا فإننا لن نعيره أي إهتمام ونكتب $G = \sum_{i \in I} H_i$.

تمارين (٥,٣)

(١) لتكن G زمرة إبدالية وكل من H و K زمرة جزئية من G. أثبت أن $G = H \oplus K$ إذا وفقط إذا وجدت تشاكلات $H \xrightarrow{\lambda_1} G \xrightarrow{\pi_2} K$ و $K \xrightarrow{\lambda_2} G \xrightarrow{\pi_1} H$ تحقق :

$\pi_1 \circ \lambda_1 = e_H$ ، $\pi_2 \circ \lambda_2 = e_K$ ، $\pi_1 \circ \lambda_2 = 0$ ، $\pi_2 \circ \lambda_1 = 0$

و $(\lambda_1 \circ \pi_1)(x) + \lambda_2 \circ \pi_2(x) = x$ لكل $x \in G$.

(٢) إذا كانت G زمرة إبدالية وكانت $G = H \oplus K$ حيث $H, K \leq G$ وكان $\pi : G \to H$ و $\theta : G \to K$ الإسقاطين الطبيعيين فأثبت أن $\pi \circ \pi = \pi$ ، $\theta \circ \theta = \theta$ ، $\theta \circ \pi = \pi \circ \theta = 0$ و $\pi(x) + \theta(x) = x$ لكل $x \in G$.

(٣) إذا كانت G زمرة إبدالية وكان التشاكلان $\theta : G \to G$ و $\pi : G \to G$ يحققان شروط التمرين (٢) فأثبت أن $G = \pi(G) \oplus \theta(G)$.

(٤) إذا كانت H زمرة جزئية من الزمرة الإبدالية G فإننا نقول إن H عامل جمع مباشر **(direct summand)** إذا وجدت زمرة جزئية K من G حيث $G = H \oplus K$. أثبت أنه إذا كان $\pi : G \to H$ إسقاطاً شاملاً فإن H عامل جمع مباشر.

(٥) إذا كانت A زمرة إبدالية وكانت $A = B \oplus C$ حيث $B, C \leq A$ وإذا كانت $H \leq A$ لا متغيرة تماماً فأثبت أن $H = (H \cap B) \oplus (H \cap C)$.

(٦) إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الإبدالية فأثبت أن $\prod_{i \in I} G_i$ زمرة إبدالية.

(٧) إذا كانت G زمرة و $\{H_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الجزئية الناظمية من G فأثبت أنه يوجد تشاكل أحادي من $G / \bigcap_{i \in I} H_i$ إلى $\prod_{i \in I} (G / H_i)$.

(٨) لتكن I و J مجموعتين حيث $|I| = |J|$. إذا كانت G زمرة فأثبت أن $\sum_{j \in J} G \cong \sum_{i \in I} G$.

(٩) إذا كانت $G = \sum_{i \in \mathbf{N}} A$ فأثبت أن:

(أ) $A \times G \cong G$ (ب) $G \times G \cong G$ [إرشاد: استخدم التمرين (٨)].

(١٠) إذا كانت كل من A و B زمرة إبدالية وكانت $H(A, B) = \{ f : B \text{ إلى } A \text{ تشاكل من } f \}$ فأثبت أن $H(A, B) \leq \prod_{a \in A} B_a$.

(٤,٥) شبه الضرب المباشر
Semidirect Product

نقدم في هذا البند تعميماً لمفهوم الضرب المباشر لزمرتين H و K يدعى شبه الضرب المباشر للزمرتين H و K. ستساعدنا طريقة الإنشاء هذه في الحصول على زمرة جديدة G من زمرتين معلومتين H و K بحيث تحتوي G على زمرة جزئية مماثلة لكل من H و K كما في الضرب المباشر ، إلا أننا سنفترض هنا أن H ناظمية و K ليست بالضرورة ناظمية ، ولذا فإنه

يكون بمقدورنا إنشاء زمرة غير إبدالية حتى لو كانت كل من H و K إبدالية. وبهذا يكون باستطاعتنا الحصول على زمر جديدة لم يكن بمقدورنا الحصول عليها باستخدام مفهوم الضرب المباشر.

لقد بينا في الفصل الرابع أنه إذا كانت K و H زمرتين وكان $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ تشاكل فإننا نستطيع أن نجعل K تؤثر على H بتعريف $* : K \times H \to H$ بالقاعدة $k * h = \varphi(k)(h) = \varphi_k(h)$ لكل $k \in K$ وكل $h \in H$. حيث اعتبرنا أن $\varphi(k) = \varphi_k$ لكل $k \in K$.

مبرهنة (٥,٢١)

لتكن H و K زمرتين وليكن $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ تشاكل وليكن $*$ هو تأثير K على H المقرن مع φ. إذا كانت $G = \{(h,k) : h \in H, k \in K\}$ والعملية الثنائية معرفة على G على النحو التالي: $(h_1,k_1)(h_2,k_2) = (h_1 k_1 * h_2, k_1 k_2) = \left(h_1 \varphi_{k_1}(h_2), k_1 k_2\right)$ فإن G زمرة.

البرهان

(١) لكل $(a,x),(b,y),(c,z) \in G$ لدينا:

$$[(a,x)(b,y)](c,z) = (a\varphi_x(b), xy)(c,d) = (a\varphi_x(b)\varphi_{xy}(c), xyz)$$

ومن ناحية أخرى،

$$(a,x)[(b,y)(c,z)] = (a,x)(b\varphi_y(c), yz) = (a\varphi_x(b\varphi_y(c)), xyz)$$

وبما أن $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(K)$ تشاكل فإن $\varphi_{xy} = \varphi_x \circ \varphi_y$ ولذا فإن:

$$a\varphi_x(b\varphi_y(c)) = a\varphi_x(b)\varphi_x(\varphi_y(c)) = a\varphi_x(b)(\varphi_x \circ \varphi_y)(c) = a\varphi_x(b)\varphi_{xy}(c)$$

وبهذا نخلص إلى أن العملية تجميعية.

(٢) لكل $(h,k) \in G$ لدينا: $(h,k)(e_1,e_2) = \left(h\varphi_k(e_1), ke_2\right) = (h,k)$

إذن، (e_1,e_2) عنصر محايد أيمن.

(٣) إذا كان $(h,k) \in G$ فإن:

$$(h,k)(\varphi_{k^{-1}}(h^{-1}), k^{-1}) = (h\varphi_k(\varphi_{k^{-1}}(h^{-1})), kk^{-1}) = (h\varphi_{kk^{-1}}(h^{-1}), e_2)$$
$$= (h\varphi_{e_2}(h^{-1}), e_2) = (hh^{-1}, e_2) = (e_1, e_2)$$

ولذا فإن $(\varphi_{k^{-1}}(h^{-1}),k^{-1})$ نظير أيمن للعنصر (h,k). إذن ، بإستخدام المبرهنة (٢,٧) نخلص إلى أن G زمرة ◆

تعريف (٥,١٤)

تسمى الزمرة G التي حصلنا عليها من المبرهنة (٥,٢١) شبه الضرب المباشر الخارجي للزمرة H على K بتأثير φ (**external semidirect product of** H **by** K **with action** φ) ونرمز لها بالرمز $G = H\times_{\varphi} K$.

ملحوظة

إذا كان $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(K)$ هو التشاكل التافه فإن $\mathrm{Ker}\varphi = H$ وإن $\varphi_k(h) = h$ لكل $k \in K$ وكل $h \in H$. لذا فإن $(h_1\varphi_{k_1}(h_2),k_1k_2) = (h_1h_2,k_1k_2)$. أي أن $G = H\times_{\varphi} K = H\times K$. ومن ثم فإن شبه الضرب المباشر الخارجي هو بالفعل تعميم للضرب المباشر الخارجي للزمرتين H و K.

ننتقل الآن إلى مفهوم شبه الضرب المباشر الداخلي :

تعريف (٥,١٥)

إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية من الزمرة G فإننا نقول إن G شبه ضرب مباشر داخلي للزمرة H على K (**internal semidirect product of** H **by** K) إذا تحققت الشروط التالية :

(أ) $H \lhd G$　　(ب) $G = HK$　　(ج) $H\cap K = \{e\}$

مثال (٥,٩)

إذا كانت $G = H\times K$ فإنه من الواضح أن G شبه ضرب مباشر داخلي للزمرة $H\times\{e\}$ على

الزمرة $\{e\}\times K$ حيث $\varphi:\{e\}\times K \to \mathrm{Aut}(H\times\{e\})$ هو التشاكل التافه الذي يرسل جميع العناصر إلى العنصر المحايد في $\mathrm{Aut}(H\times\{e\})$ □

مثال (٥,١٠)

إذا كانت كل من $H=\langle(1\ 2\ 3)\rangle$ و $K=\langle(1\ \ 2)\rangle$ زمرة جزئية من S_3 فإن S_3 شبه ضرب مباشر داخلي للزمرة H على K. حيث أنه من الواضح أن $H\triangleleft S_3$ ، $S_3=HK$ وأن $H\cap K=\{e\}$ □

مبرهنة (٥,٢٢)

إذا كانت G شبه ضرب مباشر داخلي للزمرة H على K فإن :

(أ) لكل $g\in G$ يوجد عنصر وحيد $h\in H$ وعنصر وحيد $k\in K$ حيث $g=hk$.

(ب) $G/H\cong K$.

البرهان

(أ) بما أن $G=HK$ فإنه $g=hk$ لكل $g\in G$ حيث $h\in H$ و $k\in K$. ولبرهان الوحدانية نفرض أن $g=hk=h_1k_1$. عندئذ ، $h_1^{-1}h=k_1k^{-1}\in H\cap K=\{e\}$. ولذا فإن $h=h_1$ وأن $k=k_1$.

(ب) ليكن $\varphi:G\to K$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(g)=\varphi(hk)=k$ لكل $g\in G$.

لاحظ اولاً أن $hk=kh$ لكل $k\in K$ وكل $h\in H$. الآن إذا كان $g=hk$ و $g_1=h_1k_1$ عنصرين من G فإن : $\varphi(gg_1)=\varphi(hkh_1k_1)=\varphi(hh_1kk_1)=kk_1=\varphi(g)\varphi(g_1)$.

ولذا فإن φ تشاكل. من الواضح أن φ شامل . وأخيراً :

$$g=hk\in \mathrm{Ker}\varphi \Leftrightarrow \varphi(g)=k=e \Leftrightarrow g=h \Leftrightarrow g\in H$$

إذن بإستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن $G/H\cong K$ ◆

ملحوظة

نلفت إنتباه القارئ إلى أن عكس المبرهنة (٥,٢٢) ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً . أي أنه من الممكن أن يكون $G/H\cong K$ ولكن G ليست شبه ضرب مباشر داخلي للزمرة H على K.

وهذا ما يوضحه المثال التالي :

مثال (٥,١١)

إذا كانت $G = Q_8 = \langle a,b \mid a^4 = e, a^2 = b^2, ba = a^3b\rangle$ وكانت $H = \langle a\rangle \lhd G$ وكانت $K = \{e, a^2\}$ فإن $H \cap K \neq \{e\}$. إذن، G ليست شبه ضرب مباشر داخلي للزمرة H على K بينما $G/H \cong \mathbb{Z}_2 \cong K$ □

المبرهنة التالية تبين لنا أنه إذا كانت G شبه ضرب مباشر داخلي للزمرة H على K فإن $G \cong H \times_\varphi K$.

مبرهنة (٥,٢٣)

إذا كانت G شبه ضرب مباشر داخلي للزمرة H على K فإن K حيث $G \cong H \times_\varphi K$ $\varphi : K \to Aut(H)$ هو التشاكل المعرف بالقاعدة :

$$\varphi(k)(h) = \varphi_k(h) = khk^{-1}, \forall k \in K, \forall h \in H .$$

البرهان

بإستخدام المبرهنة (٥,٢٢) ، نجد أنه لكل $g \in G$ يوجد عنصر وحيد $h \in H$ وعنصر وحيد $k \in K$ حيث $g = hk$. ليكن $\psi : G = HK \to H \times_\varphi K$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\psi(hk) = (h,k)$ لكل $h \in H$ وكل $k \in K$. من الواضح أن ψ تقابل . سنبرهن الآن أن ψ تشاكل . لاحظ أولاً أن $hk = kh$ لكل $h \in H$ وكل $k \in K$. لنفرض الآن أن $hk, h_1k_1 \in G$. عندئذ:

$$(h,k)(h_1,k_1) = (h\varphi_k(h_1), kk_1) = (hkh_1k^{-1}, kk_1) = (hh_1kk^{-1}, kk_1) = (hh_1, kk_1)$$

إذن ،

$$\psi(hkh_1k_1) = \psi(hh_1kk_1) = (hh_1, kk_1) = (h,k)(h_1,k_1) = \psi(hk)\psi(h_1k_1)$$

وبالتالي فإن ψ تشاكل ◆

المبرهنة التالية تبين لنا الإتجاه الآخر . أي أنه إذا كانت $G = H \times_\varphi K$ فإنه يمكن إعتبار أن G شبه ضرب مباشر داخلي للزمرة H على K.

مبرهنة (٥,٢٤)

إذا كانت $G = H \times_\varphi K$ فإن :

(أ) كل من $\bar{H}=\{(h,e_2):h\in H\}$ و $\bar{K}=\{(e_1,k):k\in K\}$ زمرة جزئيــة مــن G وأن $\bar{H}\cong H$ و أن $\bar{K}\cong K$.

(ب) $G=\bar{H}\bar{K}$ (ج) $\bar{H}\lhd G$ (د) $\bar{H}\cap\bar{K}=\{(e,e)\}$

البرهان

(أ) إذا كان $(h_1,e_2),(h_2,e_2)\in\bar{H}$ فإن :

$$(h_1,e_2)(h_2,e_2)=(h_1\varphi_{e_2}(h_2),e_2)=(h_1h_2,e_2)\in\bar{H}$$
$$(h_1,e_2)^{-1}=(\varphi_{e_2^{-1}}(h_1^{-1}),e_2^{-1})=(h_1^{-1},e_2)\in\bar{H}$$

إذن $\bar{H}\le G$. وبالمثل ، $\bar{K}\le G$.

وأخيراً من الواضح أن كل من التطبيقين تماثلاً :

$$f:H\to\bar{H} \quad \text{حيث} \quad f(h)=(h,e_2)$$
$$g:K\to\bar{K} \quad \text{حيث} \quad g(k)=(e_1,k)$$

(ب) $g\in G\Leftrightarrow g=(h,k)=(h,e_2)(e_1,k)$. إذن $G=\bar{H}\bar{K}$.

(ج) لنفرض أن $(h,e_2)\in\bar{H}$ وأن $(x,y)\in G$. إذن ،

$$\begin{aligned}(x,y)(h,e_2)(x,y)^{-1}&=(x,y)(h,e_2)(\varphi_{y^{-1}}(x^{-1}),y^{-1})\\&=(x\varphi_y(h)\varphi_{ye_2}(\varphi_{y^{-1}}(x^{-1})),ye_2y^{-1})\\&=(x\varphi_y(h)x^{-1},e_2)\in\bar{H}\end{aligned}$$

لأن $x\in H$ و $\varphi_y(h)\in H$. ولذا فإن $x\varphi_y(h)x^{-1}\in H$. إذن $\bar{H}\lhd G$.

(د) واضح من تعريف $\bar{H}$ و $\bar{K}$ ◆

ملحوظة

إذا إعتبرنا أن $\bar{H}=H$ و $\bar{K}=K$ في المبرهنة (٥,٢٤) وملاحظة أن

$$(e_1,k)(h,e_2)(e_1,k)^{-1}=(\varphi_k(h),k)(e_1,k^{-1})=(\varphi_k(h)\varphi_k(e_1),kk^{-1})=(\varphi_k(h),e_2)$$

فإننا نجد بوضع $k=(e_1,k)$ و $h=(h,e_2)$ أن $khk^{-1}=\varphi_k(h)=k*h$.

نقدم الآن بعض الأمثلة على شبه الضرب المباشر .

مثال (٥,١٢)

إذا كانت H إبدالية وكانت $K=\langle a\rangle \cong \mathbb{Z}_2$ وكان $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ هو التشاكل المعرف على النحو التالي : $\varphi(k)(h)=\varphi_k(h)=h^{-1}$ لكل $h\in H$ وكل $k\in K$.

إذن ، بإستخدام الملحوظة التي تلي المبرهنة (٥,٢٤) نجد أن $khk^{-1}=h^{-1}$ لكل $h\in H$ وكل $k\in K$. ولذا فإن $G=H\times_\varphi K$ تحتوي على الزمرة H حيث $[G:H]=2$ وتحقق $aha^{-1}=h^{-1}$ لكل $h\in H$ □

مثال (٥,١٣)

إذا كانت $H=\mathbb{Z}=\langle b\rangle$ ، $K=\langle a\rangle=\mathbb{Z}_2$ والتشاكل φ كما هو مبين في المثال (٥,١٢) فإننا نجد أن $G=\mathbb{Z}\times_\varphi \mathbb{Z}_2$. وأن $aba^{-1}=b^{-1}$. سنبرهن الآن أن $G\cong D_\infty$.

من الواضح أن $G=\langle \beta,\alpha\rangle$ حيث $\beta=(b,e)$ و $\alpha=(e,a)$. كذلك ،

$$\beta^2=(b,e)(b,e)=(b\varphi_e(b),e)=(bb^{-1},e)=(e,e)$$

$$\alpha^2=(e,a)(e,a)=(e\varphi_a(e),a^2)=(e,e)$$

إذن ، $G=\mathbb{Z}\times_\varphi \mathbb{Z}_2=\langle \beta,\alpha \mid \beta^2=\alpha^2=e\rangle \cong D_\infty$ □

مثال (٥,١٤)

إذا كانت $H=\mathbb{Z}_n=\langle b\rangle$ وكانت $K=\mathbb{Z}_2=\langle a\rangle$ وكان $\varphi : K\to \mathrm{Aut}(H)$ التشاكل المبين في المثال (٥,١٢) فإنه ليس من الصعب أن نرى في هذه الحالة أن $G=\mathbb{Z}_n\times_\varphi \mathbb{Z}_2\cong D_n$ □

مثال (٥,١٥)

لنفرض أن $H=\mathbb{Z}_3=\langle b\rangle$ وأن $K=\mathbb{Z}_4=\langle a\rangle$ وأن $\varphi : K\to \mathrm{Aut}(H)$ هو التشاكل المبين في المثال (٥,١٢) . إذن $G=\mathbb{Z}_3\times_\varphi \mathbb{Z}_4$ زمرة غير إبدالية من الرتبة 12 وتحقق $aba^{-1}=b^{-1}$.

سنبين الآن أن $G\cong T$. تذكر أن $T=\langle x,y \mid x^6=e, x^3=y^2, yx=x^{-1}y\rangle$. الآن ، إذا فرضنا أن $x=(b,a^2)$ وأن $y=(e,a)$ فإنه ليس من الصعب أن نبين أن $G=\langle x,y\rangle$. وبحساب مباشر نستطيع أن نتحقق من العلاقات الأخرى ، فمثلاً :

$$\begin{aligned} xyx &= (b,a^2)(e,a)(b,a^2)=(b\varphi_{a^2}(e),a^3)(b,a^2)\\ &=(b,a^3)(b,a^2)=(b\varphi_{a^3}(b),a^5)=(ba^3ba^{-3},a)=(baba^{-1},a) \end{aligned}$$

$$= (bb^{-1}, a) = (e, a) = y$$

وبالمثل ، $x^6 = e$ و $x^3 = y^2$. إذن ، $G = \mathbb{Z}_3 \times_\varphi \mathbb{Z}_4 \cong T$ $\square$

مثال (٥,١٦)

إذا كانت $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ وكانت $K = \mathbb{Z}_3 = \langle a \rangle$ فإن $\mathrm{Aut}(H) \cong S_3$. ولذا فإن $\mathrm{Aut}(H)$ تحتوي على زمرة جزئية وحيدة من الرتبة 3 ولتكن $\langle \gamma \rangle$. لنفرض أن $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ هو التشاكل المعرف بالقاعدة $\varphi(a) = \gamma$. ولذا فإن $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times_\varphi \mathbb{Z}_3$ زمرة غير إبدالية من الرتبة 12 . لاحظ أن $G \not\cong D_6$ وأن $G \not\cong T$. إذن $G \cong A_4$ $\square$

مثال (٥,١٧)

إذا كانت $H = \mathbb{Z}_8 = \langle b \rangle$ وكانت $K = \mathbb{Z}_2 = \langle a \rangle$ وكان $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_8)$ هو التماثل المعرف بالقاعدة $f(b) = b^5$. من الواضح أن $o(f) = 2$. ليكن $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ هو التشاكل المعرف بالقاعدة $\varphi_e(b) = e$ و $\varphi_a(b) = f(b) = b^5$.

سنبرهن الآن أن : $G = \mathbb{Z}_8 \times_\varphi \mathbb{Z}_2 \cong \langle x, y \mid x^8 = e, y^2 = e, yxyx^3 = e \rangle$.

من الواضح أن G زمرة غير إبدالية رتبتها 16. وإذا كان $x = (b,e)$ و $y = (e,a)$ فإن $G = \langle x, y \rangle$. ومن الواضح أن $x^8 = e$ وأن $y^2 = e$. وأخيراً :

$$yxyx^3 = (e,a)(b,e)(e,a)(b^3,e) = (e\varphi_a(b),a)(e\varphi_a(b^3),a) = (b^5,a)(b^{15},a)$$
$$= (b^5,a)(b^7,a) = (b^5\varphi_a(b^7),a^2) = (b^5b^{35},a^2) = (b^{40},a^2) = (e,e)$$

إذن ، $yxyx^3 = e$. وبالتالي فإن :

$$G = \mathbb{Z}_8 \times_\varphi \mathbb{Z}_2 \cong \langle x, y \mid x^8 = e, y^8 = e, yxyx^3 = e \rangle \quad \square$$

إن من أهم تطبيقات شبه الضرب المباشر هو إستخدامه في تصنيف الزمر من الرتبة n ، لبعض قيم n . ولإنجاز ذلك نتبع الإستراتيجية التالية :

(١) لتكن G زمرة من الرتبة n . أثبت أن G تحتوي على زمرتين جزئيتين فلعيتين تحققان : $H \lhd G$ و $H \cap K = \{e\}$ و $G = HK$. أي أن $G = H \times_\varphi K$ حيث $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ هو التشاكل المعرف بالقاعدة $\varphi_k(h) = khk^{-1}$.

(٢) جد جميع الزمر من الرتبة $|H|$ التي لا تماثل الزمرة H . وبالمثل ، بالنسبة للزمرة K .

(٣) لكـــل زوج H و K وجـــد في الخطـــوة (٢) ، جـــد جميـــع التـــشاكلات الممكنـــة $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$.

(٤) لكل ثلاثي H و K و φ وجد في الخطوة (٣) ، جد $H \times_{\varphi} K$.

(٥) جد أزواج الزمر المتماثلة في الخطوة (٤) ، ولذا فإنه يتبقى الزمر غير المتماثلة من الرتبة n.

ملحوظة

نلفت إنتباه القارئ إلى أن الإستراتيجية أعلاه تكون فعالة فقط لبعض قيم n، وعلى الأخص إذا كان p^k لا يقسم n حيث k عدد صحيح كبير نسبياً . فمثلاً ، الزمرة Q_8 من الرتبـــة 2^3 لا يمكن تفريقها كشبه ضرب مباشر لأن $H \cap K \neq \{e\}$ لكل الزمر الجزئية الفعلية للزمرة Q_8.

قبل تقديم أمثلة على تصنيف بعض الزمر نحتاج إلى بعض المعلومات الإضافية التي نقدمها في المبرهنتين التاليتين .

مبرهنة (٥,٢٥)

إذا كانت $G = H \times_{\varphi} K$ حيث $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ تشاكل فإن العبارات التالية متكافئة :

(أ) التطبيق المحايد $i : H \times_{\varphi} K \to H \times K$ تماثل.

(ب) φ هو التشاكل التافه .

(ج) $K \lhd H \times_{\varphi} K$.

البرهان

(أ) $\Leftarrow$ (ب) : إذا كان $(h,k),(h_1,k_1) \in G$ فإن :

$$\left(h\varphi_k\left(h\right), kk_1\right) = \left(h,k\right)\left(h_1,k_1\right) = \left(hh_1, kk_1\right)$$

ولذا فإن $h\varphi_k\left(h_1\right) = hh_1$. أي أن $\varphi_k\left(h_1\right) = h_1$ لكل $h_1 \in H$. إذن φ هو التشاكل التافه .

(ب) $\Leftarrow$ (ج) : بما أن φ هو التشاكل التافه فإن $\varphi_k\left(h\right) = khk^{-1} = h$ لكل $h \in H$ وكل $k \in K$. لنفرض الآن أن $(h,k) \in H \times_{\varphi} K$ وأن $(e,k_1) \in k$. عندئذ :

$$\begin{aligned}(h,k)(e,k_1)(h,k)^{-1} &= (h\varphi_k(e), kk_1)(\varphi_{k^{-1}}(h^{-1}), k^{-1}) = (h, kk_1)(h^{-1}, k^{-1}) \\ &= (h\varphi_{kk_1}(h^{-1}), kk_1k^{-1}) = (hh^{-1}, kk_1k^{-1}) = (e, kk_1k^{-1}) \in K\end{aligned}$$

إذن ، $K \lhd H \times_{\varphi} K$.

(ج) $\Leftarrow$ (أ) : لنفرض أن $K \lhd H\times_{\varphi} K$. بما أن $H \lhd H\times_{\varphi} K$ فإن $H\cap K=\{e\}$. ولذا فإن $hk=kh$ لكل $h\in H$ وكل $k\in K$. وعليه فإن φ هو التشاكل التافه . إذن ، $(h,k)(h_1,k_1)=(h\varphi_k(h_1),kk_1)=(hh_1,kk_1)$. وبالتالي فإن $H\times K=H\times_{\varphi} K$ ◆

مبرهنة (٥,٢٦)

لتكن K زمرة دورية ولتكن H زمرة . وليكن كل من $\varphi:K\to \mathrm{Aut}(H)$ و $\varphi_2:K\to \mathrm{Aut}(H)$ تشاكلاً . إذا كانت الزمرتان $\varphi_1(K),\varphi_2(K)$ مترافقتين في $\mathrm{Aut}(H)$ فإن $H\times_{\varphi_1} K\cong H\times_{\varphi_2} K$.

البرهان

لنفرض أن $\varphi_1(K)$ و $\varphi_2(K)$ مترافقتان في $\mathrm{Aut}(H)$. إذن يوجد $\sigma\in \mathrm{Aut}(H)$ حيث $\sigma\varphi_1(K)\sigma^{-1}=\varphi_2(K)$. ولذا فإنه لكل $k\in K$ يوجد $n\in\mathbb{Z}$ حيث $\sigma\varphi_1(k)\sigma^{-1}=(\varphi_1(k))^n$. من السهل أن نرى الآن أن التطبيق $\psi:H\times_{\varphi_1} K\to H\times_{\varphi_2} K$ المعرف بالقاعدة $\psi((h,k))=(\sigma(h),k^n)$ تماثل ◆

مثال (٥,١٨)

لنفرض أن G زمرة من الرتبة 15. ولنفرض أن $K\in \mathrm{Syl}_3(G)$ وأن $H\in \mathrm{Syl}_5(G)$. بما أن $H\cap K=\{e\}$ وأن $H\lhd G$ فإن $G=H\times_{\varphi} K$ حيث $\varphi:K\to \mathrm{Aut}(H)$ تشاكلاً. الآن ، نعلم أن $\mathrm{Aut}(H)\cong\mathbb{Z}_4$. بما أن $|K|=3$ لا يقسم 4 فإن التشاكل الوحيد $\varphi:K\to \mathrm{Aut}(H)$ هو التشاكل التافه. إذن ، $G=H\times_{\varphi} K=H\times K\cong\mathbb{Z}_{15}$.

أي أن الزمرة الوحيدة من الرتبة 15 هي الزمرة الدورية □

مثال (٥,١٩) .

لنفرض أن G زمرة من الرتبة 21. ولنفرض أن $\langle x\rangle=K\in \mathrm{Syl}_3(G)$ وأن $H\in \mathrm{Syl}_7(G)$. كما في المثال السابق نجد أن $G=H\times_{\varphi} K$ حيث φ تشاكل من K إلى $\mathrm{Aut}(H)$. وبما أن $\mathrm{Aut}(H)$ زمرة دورية من الرتبة 6 فإنه يوجد زمرة جزئية وحيدة من الزمرة $\mathrm{Aut}(H)$ رتبتها 3. لنفرض أن هذه الزمرة هي $\langle\gamma\rangle$. ولذا فإنه يوجد ثلاث تشاكلات $\varphi_i:K\to \mathrm{Aut}(H)$ معرفة

بالقاعدة $\varphi_i(x)=\gamma^i$ حيث $i=0,1,2$.

إذا كان $i=0$ فإن φ_0 هو التشاكل التافه . ولذا فإن $G=H\times_\varphi K=H\times K\cong\mathbb{Z}_{21}$. أما إذا كان $i\neq 0$ فإن كل من $H\times_{\varphi_1}K$ و $H\times_{\varphi_2}K$ زمرة غير إبدالية من الرتبة 21.

ومن الواضح أن $H\times_{\varphi_1}K\cong H\times_{\varphi_2}K$ لأن $\varphi_1(K)$ و $\varphi_2(K)$ زمرتين متماثلتين (ومن ثم مترافقان) من $\mathrm{Aut}(H)$. ولذا فإننا نخلص إلى وجود زمرتين فقط غير متماثلتين من الرتبة 21 $\square$

(٥,٤,١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

عين جميع الزمر غير المتماثلة من الرتبة 30.

الحل

لنفرض أن G زمرة من الرتبة 30 . لقد بينا في المبرهنة (٤,٢٧) أن G تحتوي على زمرة جزئية H من الرتبة 15. ولذا فإن H زمرة دورية وأن $H\lhd G$ وبإستخدام مبرهنة كوشي ، تحتوي G أيضاً على زمرة K من الرتبة 2. إذن $G=HK$ و $H\cap K=\{e\}$. ولذا فإن $G=H\times_\varphi K$ حيث $\varphi:K\to\mathrm{Aut}(H)$ تشاكل. ولكننا نعلم أن :

$\mathrm{Aut}(H)=\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{15})\cong U_{15}\cong U_5\times U_3\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2\cong\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5)\times\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3)$.

لنفرض أن $H=\langle a\rangle\times\langle b\rangle\cong\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_3$. الآن $\mathrm{Aut}(H)$ تحتوي على ثلاثة عناصر (تماثلات) من الرتبة 2 وهي:

$f_1(a)=a\ ,\ f_1(b)=b^{-1}$ ، $f_2(a)=a^{-1}\ ,\ f_2(b)=b$ ، $f_3(a)=a^{-1}\ ,\ f_3(b)=b^{-1}$.

ولذا فإنه يوجد ثلاثة تشاكلات غير تافهة $\varphi_i:K\to\mathrm{Aut}(H)$ وهي

$\varphi_1(x)=f_1$ ، $\varphi_2(x)=f_2$ ، $\varphi_3(x)=f_3$ حيث x هو مولّد الزمرة K.

الآن لدينا الزمرة غير الإبدالية التالية :

(١) $G=H\times_{\varphi_1}K=\langle a,b,x\mid a^5=e,b^3=e,x^2=e,xax^{-1}=a,xbx^{-1}=b^{-1}\rangle$

ومن السهل أن نرى أن هذه الزمرة هي :

$G=\langle a,b,x\mid a^5=e,b^3=e,x^2=e,xb=b^{-1}x\rangle\cong\mathbb{Z}_5\times D_3$.

(٢) $G=H\times_{\varphi_2}K=\langle a,b,x\mid a^5=b^3=x^2=e,xax^{-1}=a^{-1},xbx^{-1}=b\rangle$

ومن السهل أن نرى أن هذه الزمرة هي :

$G=\langle a,b,x\mid a^5=b^3=x^2=e,xa=a^{-1}x\rangle\cong\mathbb{Z}_3\times D_5$

(٣) $G = H \times_{\varphi_3} K = \mathbb{Z}_{15} \times_{\varphi_3} \mathbb{Z}_2$. وكما رأينا في المثال (٥,١٤) فإن هذه الزمرة هي D_{15}.

وأخيراً إذا كان $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ هو التشاكل التافه فإننا نحصل على الزمرة الإبدالية $G = H \times K \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_{30}$.

ولقد بينا في المبرهنة (٤,٢٧) أن الزمر الأربعة $\mathbb{Z}_5 \times D_3$ ، $\mathbb{Z}_3 \times D_5$ ، D_{15} و $\mathbb{Z}_{30}$ جميعها غير متماثلة وبالتالي فإنه يوجد أربع زمر غير متماثلة من الرتبة 30 Δ

تمرين (٢)

استخدم شبه الضرب المباشر لتصنيف الزمر من الرتبة 12.

الحل

لنفرض أن G زمرة من الرتبة 12. ولنفرض أن $H \in \mathrm{Syl}_2(G)$ وأن $K \in \mathrm{Syl}_3(G)$. بإستخدام المبرهنة الثالثة لسيلو نجد أن $K \lhd G$ أو أن $H \lhd G$. وبما أن $H \cap K = \{e\}$ فإن G شبه ضرب مباشر. لاحظ أيضاً أن $H \cong \mathbb{Z}_4$ أو $H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ وأن $K \cong \mathbb{Z}_3$.

ندرس الآن الحالتان التاليتان :

(أ) $H \lhd G$.

إذا كانت $H \cong \mathbb{Z}_4$ فإن $\mathrm{Aut}(H) \cong \mathbb{Z}_2$. ولذا فإن التشاكل الوحيد $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ هو التشاكل التافه. ولذا فإن $G = H \times K \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_{12}$.

أما إذا كانت $H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ فإن $\mathrm{Aut}(H) \cong S_3$. وفي هذه الحالة توجد زمرة جزئية وحيدة من S_3 من الرتبة 3 ، ولتكن $\langle \gamma \rangle$. إذا كانت $K = \langle x \rangle$ فإننا نحصل على التشاكلات الثلاث التالية $\varphi_i : K \to (H)$ حيث $\varphi_i(x) = \gamma^i$ ، $i = 0,1,2$.

إذا كان $i = 0$ فإن φ_0 هو التشاكل التافه . ولذا فإن $G = H \times K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

وأما التشاكلات φ_1 و φ_2 فإنهما يؤديان إلى زمرتين غير إبداليتين $H \times_{\varphi_1} K$ و $H \times_{\varphi_2} K$. وبإستخدام المبرهنة (٥,٢٦) نجد أن $H \times_{\varphi_1} K \cong H \times_{\varphi_2} K$. وبإستخدام المثال (٥,١٦) نجد أن G في هذه الحالة ما هي إلا الزمرة A_4.

(ب) $K \lhd G$. لاحظ أن $\mathrm{Aut}(K) = \langle \lambda \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ حيث $\lambda(k) = k^{-1}$.

إذا كانت $H = \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_4$ فإنه يوجد في هذه الحالة تشاكلان $\varphi_i : H \to \mathrm{Aut}(K)$ ، $i = 0,1$. حيث φ_0 هو التشاكل التافه . ومنه فإن $G = K \times H \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$. والتشاكل φ_1 هو التشاكل المبين في المثال (٥,١٥) ، وفي هذه الحالة نجد أن $G \cong K \times_{\varphi_1} H \cong \mathbb{Z}_3 \times_{\varphi_1} \mathbb{Z}_4 \cong T$.

وأخيراً إذا كانت $H=\langle a\rangle\times\langle b\rangle\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ فإننا نحصل على ثلاثة تشاكلات غير تافهة $\varphi_i:H\to \mathrm{Aut}(K)$ هي :

$\varphi_1(a)=\varphi_1(b)=\lambda$ ، $\varphi_2(a)=e,\varphi_2(b)=\lambda$ ، $\varphi_3(a)=\lambda,\varphi_3(b)=e$

ومن السهل أن نرى أن $G=K\times_{\varphi_i}H$ في كل من الحالات الثلاثة هي D_6 Δ

تمارين (٤، ٥)

(١) إذا كانت $Q_8=H=\langle a,b,c\mid ab=c,bc=a,ca=b\rangle$ وإذا كان $f\in \mathrm{Aut}(H)$ هو التماثل $f(a)=b$ ، $f(b)=c$ و $f(c)=a$ وإذا كان $\varphi:\mathbb{Z}_3\to \mathrm{Aut}(H)$ هو التشاكل المعرف بواسطة f فأثبت أن $H\times_\varphi \mathbb{Z}_3\cong SL(2,3)$.

(٢) إذا كان $m,n\in\mathbb{Z}^+$ حيث $\gcd(m,n)=1$ فأثبت أن
$SL(2,\mathbb{Z}_{mn})\cong SL(2,\mathbb{Z}_m)\times SL(2,\mathbb{Z}_n)$.

(٣) أثبت أن $SL(2,\mathbb{Z}_6)=S_3\times Q_8\times_\varphi \mathbb{Z}_3$ حيث φ هو التشاكل المعرف بالتمرين (١) .

(٤) لتكن H زمرة و $K=\mathrm{Aut}(H)$. إذا كان $\varphi:K\to \mathrm{Aut}(H)$ هو التشاكل المحايد فإننا نرمز لشبه الضرب المباشر $H\times_\varphi \mathrm{Aut}(H)$ بالرمز $\mathrm{Hol}(H)$. أثبت أن $\mathrm{Hol}(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)\cong S_4$.

(٥) جد جميع الزمر غير المتماثلة من الرتبة pq حيث p و q عددان أوليان و $p<q$.

(٦) أثبت أنه يوجد أربعة تشاكلات مختلفة $\varphi:\mathbb{Z}_2\to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_8)$. ثم استنتج أن زمر شبه الضرب المباشر التي تحصل عليها من التشاكلات هي : $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_2$ ، D_8 ، $G=\langle a,b\mid a^8=b^2=e,ab=ba^3\rangle$ و $M=\langle a,b\mid a^2=b^8=e,ba=ab^5\rangle$.

(٧) جد جميع الزمر غير المتماثلة من الرتبة 28 .

(٨) جد جميع الزمر غير المتماثلة من الرتبة 20 .

(٩) جد جميع الزمر غير المتماثلة من الرتبة $4p$ حيث p عدداً أولياً فردياً .

(١٠) لتكن G زمرة من الرتبة 56 ولتكن $H\in \mathrm{Syl}_7(G)$ و $K\in \mathrm{Syl}_2(G)$.

(أ) أثبت أن $H\lhd G$ أو أن $K\lhd G$.

(ب) إذا كانت G إبدالية فاثبت أن $G\cong\mathbb{Z}_{56}$ أو أن $G\cong\mathbb{Z}_7\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$ أو أن $G\cong\mathbb{Z}_7\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

(ت) إذا كانت $K\lhd G$ وكانت $H=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ فاثبت أنه يوجد زمرة وحيدة غير إبدالية

من الرتبة 56.

(ث) إذا كانت $K \lhd G$ وكانت $H = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ فأثبت أنه يوجد زمرتان غير إبداليتن (بإستثناء التماثل) من الرتبة 56.

(ج) إذا كانت $K \lhd G$ وكانت $H = \mathbb{Z}_8$ فأثبت أنه يوجد زمرة وحيدة غير إبدالية من الرتبة 56.

(ح) إذا كانت $K \lhd G$ وكانت $H = Q_8$ فأثبت أنه يوجد زمرتان غير إبداليتين (بإستثناء التماثل) من الرتبة 56.

(خ) إذا كانت $K \lhd G$ وكانت $H = D_4$ فأثبت أنه يوحد ثلاث زمر غير إبدالية (بإستثناء التماثل) من الرتبة 56.

(د) إذا كانت $H \lhd G$ فأثبت أن $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ وأثبت أنه يوجد زمرة وحيدة غير إبدالية في هذه الحالة من الرتبة 56.

(ذ) أثبت أن جميع الزمر التي وجدت من الرتبة 56 غير متماثلة .

الفصل السادس

الزمر الإبدالية
ABELIAN GROUPS

نخصص هذا الفصل لدراسة الزمر الإبدالية. حيث نقوم في البند الأول بتصنيف الزمر الإبدالية المنتهية ونخصص البند الثاني لدراسة الزمر الإبدالية المنتهية التوليد وأما البند الثالث فندرس فيه الزمر الإبدالية القابلة للقسمة. في هذا الفصل جميع الزمر ستكون إبدالية ، ولذا فإنه من المناسب أن نستخدم رمز الجمع + للعملية الثنائية، ونرمز للعنصر المحايد بالرمز 0 ، ولنظير العنصر a بالرمز $-a$. وسنرمز للضرب المباشر (الداخلي أو الخارجي) بالرمز $G\oplus H$ بدلاً من $G\times H$ ونسميه الجمع المباشر (**direct sum**).

(٦,١) الزمر الإبدالية المنتهية
Finite Abelian Groups

لقد قدمنا في البند (٣,٤) المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية ووعدنا بتقديم برهان لها ، سنفي بهذا الوعد ونقدم البرهان في هذا البند. ونظراً لطول البرهان فإننا نقدمه على مراحل.

مبرهنة (٦,١)

إذا كانت G زمرة إبدالية وكان $m\in\mathbb{Z}$ و p عدداً أولياً فإن :

(١) $G[m]=\{g\in G: mg=0\}\leq G$.

(٢) $mG=\{mg: g\in G\}\leq G$.

(٣) $G(p)=\{g\in G: o(g)=p^n, n\geq 0\}\leq G$.

(٤) $G/G[m]\cong mG$.

البرهان

جميع الفقرات سهلة البرهان ولذا فإننا نتركها للقارئ ◆

مبرهنة (٦,٢)

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية من الرتبة $p^n m$ حيث p عدداً أولياً و $\gcd(p,m)=1$ فإن

$G = H \oplus K$ حيث $K = G[m]$ و $H = G(p) = \{x \in G : p^n x = 0\}$. كذلك، $|H| = p^n$.

البرهان

لإثبات أن $G = H \oplus K$ فإنه يكفي أن نثبت أن $G = H + K$ وأن $H \cap K = \{0\}$. لنفرض أن $x \in G$.. بما أن $\gcd(m, p^n) = 1$ فإننا نستطيع إيجاد $s, t \in \mathbb{Z}$ بحيث $1 = sm + tp^n$. وعليه

$$x = (sm + tp^n)x = smx + tp^n x.$$

ولكن $p^n(smx) = p^n m(sx) = 0$ و $m(tp^n x) = p^n m(tx) = 0$. إذن، $smx \in H$ و $tp^n x \in K$. ومنه فإن $G = H + K$.

لنفرض الآن أن $x \in H \cap K$. عندئذ، $p^n x = 0 = mx$. ولذا فإن $o(x)$ يقسم كل من p^n و m. وبما أن $\gcd(p^n, m) = 1$ فإن $o(x) = 1$. إذن، $x = 0$ وبالتالي فإن $G = H \oplus K$.

ولبرهان الفقرة الأخيرة لاحظ أن:

$$p^n m = |G| = |H \oplus K| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = |H||K|$$

إذا كان p يقسم $|K|$ فإنه بإستخدام مبرهنة كوشي نجد أن K تحتوي على عنصر رتبة p وهذا مستحيل لأن $\gcd(m, p) = 1$. إذن، p لا يقسم $|K|$. ومن ثم فإن $|H| = p^n$ ◆

نتيجة (٦,٣)

إذا كانت G زمرة إبدالية رتبتها $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_t^{k_t}$ حيث p_i أعداد أولية مختلفة وكانت $G(p_i) = \{x \in G : p_i^{k_i} x = 0\}$ فإن $G = G(p_1) \oplus G(p_2) \oplus \dots \oplus G(p_n)$ وإن $|G(p_i)| = p_i^{k_i}$.

البرهان

نحصل على النتيجة باستخدام الإستقراء الرياضي على t وتطبيق المبرهنة (٦,٢) ◆

مبرهنة (٦,٤)

إذا كانت G زمرة إبدالية رتبتها p^n حيث p عدداً أولياً وإذا كان $a \in G$ عنصراً رتبته أعظمية فإنه توجد زمرة جزئية K من G حيث $G = \langle a \rangle \oplus K$.

البرهان

باستخدام الإستقراء الرياضي على n. إذا كان $n = 1$ فإن $G = \langle a \rangle \oplus \langle 0 \rangle$.

لنفرض الآن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر الإبدالية من الرتبة p^k حيث $k < n$. لنفرض أن $a \in G$ عنصراً رتبته أعظمية ولتكن $o(a) = p^m$. إذن ، $p^m x = 0$ لكل $x \in G$. إذا كانت $G = \langle a \rangle$ فنكون قد إنتهينا. إذن ، نفرض أن $G \neq \langle a \rangle$. لنفرض أن b عنصراً رتبته أصغر ما يمكن حيث $b \notin \langle a \rangle$. سنبرهن الآن أن $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{0\}$. من الواضح أنه يكفي أن نبرهن أن $o(b) = p$. بما أن $o(pb) = o(p) < o(b)$ فإن $pb \in \langle a \rangle$. إذن ، $pb = sa$ حيث $s \in \mathbb{Z}^+$. الآن : $e = p^m b = p^{m-1}(pb) = p^{m-1}(sa)$. إذن ، $o(sa) \le p^{m-1}$. ولذا فإن sa لا يولّد $\langle a \rangle$. ومنه فإن $\gcd(p^m, s) \neq 1$. إذن p يقسم s. ومنه فإن $s = pt$ حيث $t \in \mathbb{Z}^+$. إذن ، $pb = sa = (pt)a$. لنفرض أن $c = (-ta) + b$. بما أن $b \notin \langle a \rangle$ فإن $c \notin \langle a \rangle$. كذلك $pc = (-tpa) + pb = (-sa) + pb = (-pb) + pb = 0$. إذن ، $o(c) = p$ و $c \notin \langle a \rangle$. من ثم فإننا نستنتج من طريقة إختيار b أن $o(b) = p$. أي أن $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{0\}$. لدينا الآن $|G/\langle b \rangle| < |G|$. لاحظ أن $o(a + \langle b \rangle) = o(a) = p^m$. لأنه لو كان $o(a + \langle b \rangle) < p^m$ فإن : $\langle b \rangle = p^{m-1}(a + \langle b \rangle) = p^{m-1}a + \langle b \rangle$. ومنه فإن $p^{m-1}a \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{0\}$. أي أن $p^{m-1}a = 0$. وهذا مستحيل لأن $o(a) = p^m$. إذن، $a + \langle b \rangle$ ذو رتبة أعظمية في الزمرة $G/\langle b \rangle$. وبإستخدام فرضية الاستقراء توجد زمرة جزئية $K/\langle b \rangle$ من $G/\langle b \rangle$ بحيث $\langle b \rangle \le K \le G$ تحقق : $G/\langle b \rangle = \langle a + \langle b \rangle \rangle \oplus K/\langle b \rangle$.

سنبرهن الآن أن $\langle a \rangle \cap K = \{0\}$. لنفرض إذن أن $x \in \langle a \rangle \cap K$. الآن :

$$
\begin{aligned}
x \in \langle a \rangle \cap K &\Rightarrow x + \langle b \rangle \in \langle a + \langle b \rangle \rangle \cap K/\langle b \rangle = \{\langle b \rangle\} \\
&\Rightarrow x + \langle b \rangle = \langle b \rangle \Rightarrow x \in \langle b \rangle \Rightarrow x \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{0\}
\end{aligned}
$$

ومنه فإن ، $\langle a \rangle \cap K = \{0\}$ كذلك ، $|\langle a \rangle + K| = |\langle a \rangle||K| = |G|$. إذن ، $G = \langle a \rangle + K$. ونستنتج أن $G = \langle a \rangle \oplus K$ ◆

نتيجة (٦,٥)

إذا كانت G زمرة إبدالية رتبتها p^n حيث p عدداً أولياً فإن G حاصل جمع مباشر لزمر دورية .

البرهان

بإستخدام الإستقراء الرياضي على n. إذا كان $n = 1$ فالعبارة واضحة .

لنفرض أن العبارة صحيحة لجميع الزمر الإبدالية من النوع p التي رتبها أصغر من p^n. لنفرض أن $a \in G$ ذو رتبة أعظمية . إذن ، بإستخدام المبرهنة (٦,٤) ، توجد $K \le G$ حيث

$G = \langle a\rangle \oplus K$. بما أن $|K|<|G|$ فإننا نستطيع بإستخدام فرضية الإستقراء كتابة K كمجموع مباشر لزمر دورية . إذن ، G حاصل جمع مباشر لزمر دورية ◆

مبرهنة (٦,٦)

لتكن G زمرة إبدالية رتبتها p^n حيث p عدد أولي . إذا كانت $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_m = K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_n$ حيث H_i و K_j زمر جزئية دورية غير تافهة وحيث $|H_1| \ge |H_2| \ge \ldots \ge |H_m|$ و $|K_1| \ge |K_2| \ge \ldots \ge |K_n|$ فإن $m = n$ و $|H_i| = |K_i|$ لكل $1 \le i \le n$.

البرهان

بإستخدام الإستقراء الرياضي على $|G|$. من الواضح أن العبارة صحيحة عندما يكون $|G| = p$. لنفرض الآن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر الإبدالية من النوع p التي رتبها أصغر من $|G|$. الآن

$$pG = pH_1 \oplus pH_2 \oplus \ldots \oplus pH_{m_1} = pK_1 \oplus pK_2 \oplus \ldots \oplus pK_{n_1}$$

حيث m_1 هو أكبر عدد صحيح i يحقق $|H_i| > p$ و n_1 هو أكبر عدد صحيح j يحقق $|K_j| > p$. بما أن $|pG| < |G|$ فإننا نجد بإستخدام فرضية الإستقراء أن $m_1 = n_1$ وأن $|pH_i| = |pK_i|$ لكل $1 \le i \le n_1$. إذن ، لإنهاء البرهان يجب أن نبرهن أن عدد الزمر H_i و K_j من الرتبة p متساوٍ . أي يجب أن نثبت أن $m - m_1 = n - n_1$. الآن ، بما أن

$$|G| = |H_1||H_2|\ldots|H_{m_1}|p^{m-m_1} = |K_1||K_2|\ldots|K_{n_1}|p^{n-n_1}$$

وأن $|H_i| = |K_i|$ وأن $n_1 = m_1$ فإن $m - m_1 = n - n_1$ ◆

لدينا الآن جميع مانحتاجه لبرهان المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية

(the fundamental theorem of finite abelian groups)

مبرهنة (٦,٧) [المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية]

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية فإن G مجموع مباشر لزمر دورية من النوع p. كما أن طريقة كتابة G كمجموع مباشر وحيدة بإستثناء الترتيب.

البرهان

لنفرض أن $|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$ حيث p_i أعداد أولية مختلفة. لنفرض أن $G_i \in Syl_{p_i}(G)$. بما أن G إبدالية فإن $G_i \lhd G$. ولذا فإنه باستخدام تمرين (١٤) من تمارين (٤,٣) نجد

أن $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_k$. وبما أن $|G_i| = p_i^{n_i}$ فإنه باستخدام النتيجة (٦،٥) نجد أن G_i حاصل جمع مباشر لزمر دورية من النوع p .

ولبرهان الوحدانية، نستخدم الإستقراء الرياضي على k . إذا كان $k = 1$ فإن $|G| = p_i^{n_i}$. ولذا فإننا نحصل على الوحدانية باستخدام المبرهنة (٦،٦) .

لنفرض الآن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر الإبدالية المنتهية التي رتبتها أصغر من $|G|$. ولنفرض أن:

$$G = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_m = K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_n$$

حيث كل من H_i و K_j زمرة دورية من النوع p . وبإعادة الترتيب إذا استدعى الأمر نستطيع أن نفرض أن $H_1, H_2, \ldots, H_r$ و $K_1, K_2, \ldots, K_t$ حيث $r \le m$ و $t \le n$ هي الزمر الدورية من النوع p_1 وأن $|H_1| \ge |H_2| \ge \ldots \ge |H_r|$ و $|K_1| \ge |K_2| \ge \ldots \ge |K_t|$.

لنفرض الآن أن:

$$A = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_r$$
$$B = K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_t$$
$$C = H_{r+1} \oplus H_{r+2} \oplus \ldots \oplus H_m$$
$$D = K_{t+1} \oplus K_{t+2} \oplus \ldots \oplus K_n$$

إذن، $G = A \oplus C = B \oplus D$.

سنبرهن الآن أن $A = B$ و $C = D$. لنفرض أن $a \in A$. إذن، $a \in G = B \oplus D$. ولذا $a = b + d$ حيث $b \in B$ و $d \in D$. إذا كان $a - b \ne 0$ فإن $o(a-b) = p_1^{t_1}$ ولكن $o(d) \ne p_1^{t_1}$ لكل t_1 وهذا مستحيل. إذن، $a - b = 0$. ولذا فإن $a = b \in B$. أي أن $A \subseteq B$. وبالمثل $B \subseteq A$. إذن $A = B$. وبطريقة مماثلة نستطيع ان نثبت أن $C = D$. الآن:

بما أن $A = B$ فإنه باستخدام المبرهنة (٦،٦) نجد أن $r = t$ وأن $H_i \cong K_i$ لكل $1 \le i \le r$. وبما أن $C = D$ زمرة إبدالية من الرتبة $p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$ فإننا نجد باستخدام الاستقراء الرياضي أن التفريقين $H_{r+1} \oplus H_{r+2} \oplus \ldots \oplus H_m$ و $K_{t+1} \oplus K_{t+2} \oplus \ldots \oplus K_n$ متساويان بإستثناء الترتيب.

ولذا فإننا نخلص إلى أن تفريقي G متساويان بإستثناء الترتيب ◆

نحصل على النتيجة التالية من المبرهنة (٦،٧) والمبرهنة الأساسية في الحساب:

نتيجة (٦،٨)

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية فإنه يوجد أعداد صحيحة $p_1^{n_1}, p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$ وحيدة (بإستثناء الترتيب)

حيث $p_1,\ldots,p_k$ أعداد أولية (ليست بالضرورة مختلفة) وحيث $n_1,\ldots,n_k$ أعداد صحيحة موجبة (ليست بالضرورة مختلفة) بحيث يكون: $G=\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}}\oplus\mathbb{Z}_{p_2^{n_2}}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$ ◆

تسمى الأعداد $p_1^{n_1},p_2^{n_2},\ldots,p_k^{n_k}$ القواسم البدائية **(elementary divisors)** للزمرة G.

مثال (٦,١)

عين القواسم البدائية للزمرة $G=\mathbb{Z}_8\oplus\mathbb{Z}_{10}\oplus\mathbb{Z}_{27}$.

الحل

$$G\cong\mathbb{Z}_{2^3}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}_{3^3}\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{2^3}\oplus\mathbb{Z}_{3^3}\oplus\mathbb{Z}_5$$

ولذا فإن القواسم البدائية هي: $2,2^3,3^3,5$ □

لقد سبق وأن أثبتنا في المبرهنة (٣,٤٦) عكس مبرهنة لاجرانج للزمر الإبدالية المنتهية باستخدام مبرهنة كوشي. نقدم الآن برهاناً آخر كنتيجة للمبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية.

نتيجة (٦,٩)

إذا كانت G زمرة إبدالية رتبتها n وكان m يقسم n فإن G تحتوي على زمرة جزئية رتبتها m.

البرهان

باستخدام النتيجة (٦,٨)، توجد أعداد صحيحة $p_1^{n_1},\ldots,p_k^{n_k}$ وحيدة حيث $p_1,\ldots,p_n$ أعداد أولية وحيث $n_1,\ldots,n_k$ أعداد صحيحة موجبة بحيث يكون: $G\cong\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}}\oplus\mathbb{Z}_{p_2^{n_2}}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$.

إذن، $n=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k}$. بما أن m يقسم n فإن $m=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_k^{n_k}$ حيث $0\le m_i\le n_i$. وبما أن $p_i^{m_i}$ يقسم $p_i^{n_i}$ لكل $1\le i\le k$ وأن $\mathbb{Z}_{p_i^{n_i}}$ دورية فإن $\mathbb{Z}_{p_i^{n_i}}$ تحتوي على زمرة جزئية دورية وحيدة رتبتها $p_i^{m_i}$ تماثل $\mathbb{Z}_{p_i^{m_i}}$. إذن، $H=\mathbb{Z}_{p_1^{m_1}}\oplus\mathbb{Z}_{p_2^{m_2}}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}_{p_k^{m_k}}$ زمرة جزئية من G رتبتها m ◆

مثال (٦,٢)

إذا كانت $G\cong\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_9$ فعين زمرة جزئية H من G رتبتها 12.

الحل

لاحظ أن $H_1=\langle[3]\rangle\le\mathbb{Z}_9$ رتبتها 3 . إذن، $H=\{([a],[0],[b]):[a]\in\mathbb{Z}_4,[b]\in H_1\}$ زمرة جزئية من G رتبتها 12 □

تعريف (٦,١)

لتكن G زمرة إبدالية منتهية رتبتها p^n. إذا كانت $G = \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$ حيث $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k > 0$ فإن الأعداد الصحيحة $n_1, n_2, \ldots, n_k$ تسمى لامتغيرات (**invariants**) الزمرة G كما يسمى العديد $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ نمط (**type**) الزمرة G.

مثال (٦,٣)

لامتغيرات الزمرة $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ هي 1,1,1 بينما لامتغيرات الزمرة $\mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_2$ هي 2,1 □

مبرهنة (٦,١٠)

إذا كانت كل من G و H زمرة إبدالية من الرتبة p^n فإن $G \cong H$ إذا وفقط إذا كان لهما اللامتغيرات نفسها.

البرهان

لنفرض أولاً أن $\psi : G \to H$ تماثل. ولنفرض أن $G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$ وأن $H \cong \mathbb{Z}_{p_1^{m_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{m_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_t^{m_t}}$ حيث $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k > 0$ و $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_t > 0$. الآن $\psi^{-1}(\mathbb{Z}_{p_i^{m_i}})$ زمرة جزئية دورية من G رتبتها $p_i^{m_i}$. ولذا فإن $G \cong \psi^{-1}(\mathbb{Z}_{p_1^{m_1}}) \oplus \ldots \oplus \psi^{-1}(\mathbb{Z}_{p_t^{m_t}})$. ولذا فإنه بإستخدام المبرهنة (٦,٦) نجد أن $t = k$ وأن $p_i^{m_i} = \left|\psi^{-1}(\mathbb{Z}_{p_i^{m_i}})\right| = p_i^{n_i}$ لكل $1 \leq i \leq k$. أي أن لامتغيرات G هي نفسها لامتغيرات H. ولبرهان العكس، لنفرض أن $n_1, n_2, \ldots, n_k$ هي لامتغيرات كل من G و H. إذن

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}} \cong H \quad \blacklozenge$$

مثال (٦,٤)

كل من الزمرتين $\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ زمرة من الرتبة $32 = 2^5$. لامتغيرات الزمرة $\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2$ هي 4,1. وأما لامتغيرات الزمرة $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ فهي 3,1,1. ولذا فإن الزمرتين غير متماثلتين □

تعريف (٦,٢)

إذا كان $n \in \mathbb{Z}^+$ فإننا نعني بتجزئة (**partition**) n عديد $(n_1, n_2, ..., n_k)$ من النوع k من الأعداد الصحيحة الموجبة $n_1 \ge n_2 \ge ... \ge n_k$ حيث $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

نتيجة (٦,١١)

عدد الزمر الإبدالية المنتهية غير المتماثلة من الرتبة p^n يساوي عدد تجزئات n.

البرهان

إذا كانت G زمرة إبدالية من الرتبة p^n فإن $G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$ حيث $n_1 \ge n_2 \ge ... \ge n_k$. ومن الواضح أيضاً أن $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$. إذن ، $(n_1, n_2, ..., n_k)$ تجزئة للعدد n. وبالعكس ، إذا كان $(n_1, n_2, ..., n_k)$ تجزئة للعدد n فإن $n_1 \ge n_2 \ge ... \ge n_k$ وأن $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$. ولذا فإن $\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$ زمرة إبدالية رتبتها p^n لامتغيراتها $n_1, n_2, ..., n_k$ ◆

مثال (٦,٥)

جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة $2^6 = 64$.

الحل

تجزئات العدد 6 هي :

$1+1+1+1+1+1$ ، $2+1+1+1+1$ ، $2+2+1+1$ ، $2+2+2$ ، $3+1+1+1$
$3+2+1$ ، $3+3$ ، $4+1+1$ ، $4+2$ ، $5+1$ ، 6 .

إذن ، الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 2^6 هي :

$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ ، $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ ، $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ ،
$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ ، $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ ، $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ ، $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_8$ ،
$\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ ، $\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_4$ ، $\mathbb{Z}_{32} \oplus \mathbb{Z}_2$ ، $\mathbb{Z}_{64}$ □

مثال (٦,٦)

جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة $3^2 \times 11^2 = 1089$.

الحل

تجزئات العدد 2 هي : $2 = 1+1$. إذن ، مجموعات القواسم البدائية هي :

$(3^2,11^2)$ ، $(3^2,11,11)$ ، $(3,3,11^2)$ ، $(3,3,11,11)$.

ولذا فإن الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 1089 هي :

$\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{121}$ ، $\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{11} \oplus \mathbb{Z}_{11}$ ، $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{121}$ ، $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{11} \oplus \mathbb{Z}_{11}$ $\square$

(٦,١,١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

عين جميع الزمر الابدالية من الرتبة 63 التي تحتوي على عنصر من الرتبة 21

الحل

لنفرض أن G زمرة ابدالية رتبتها $63 = 3^2 \times 7$. عندئذ ، $G \cong \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$ أو $G \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_7$. لاحظ أن $([0],[1],[1]) \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_7$ رتبته 21 وأن $([3],[1]) \in \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$ رتبته 21 Δ

تمرين (٢)

لتكن كل من G أو H زمرة ابدالية منتهية.

(أ) إذا كان $\varphi : G \to H$ تشاكلاً فأثبت أن $\varphi(G(p)) \subseteq H(p)$ لكل عدد أولي p .

(ب) أثبت أن $G \cong H$ إذا وفقط إذا كان $G(p) \cong H(p)$ لكل عدد أولي p .

الحل

(أ) لنفرض أن $x \in G(p)$. عندئذ ، $p^k x = 0$ حيث $k \geq 0$ وعليه فإن $0 = \varphi(p^k x) = p^k \varphi(x)$. ومنه فإن $\varphi(x) \in H(p)$ وبالتالي فإن $\varphi(G(p)) \subseteq H(p)$.

(ب) لنفرض أولاً أن $\varphi : G \to H$ تماثل. وليكن $\psi = \varphi|_{G(p)}$ لكل عدد أولي p . أي أن $\psi : G(p) \to H(p)$. من الواضح أن ψ تشاكل أحادي. لنفرض الآن أن $y \in H(p)$. عندئذ، يوجد $x \in G$ بحيث يكون $\varphi(x) = y$. كذلك $p^k y = 0$ حيث $k \geq 0$. وعليه فإن $\varphi(p^k x) = p^k \varphi(x) = p^k y = 0$. ولذا فإن $p^k x = 0$ (لأن φ أحادي). إذن ، $x \in G(p)$ وبالتالي فإن ψ تماثل.

ولبرهان العكس ، نفرض أن $G(p) \cong H(p)$ لكل عدد أولي p . ولنفرض أن $G = G(p_1) \oplus G(p_2) \oplus \ldots \oplus G(p_k)$ وأن $H = H(p_1) \oplus H(p_2) \oplus \ldots \oplus H(p_k)$. عندئذ، $G(p_i) \cong H(p_k)$ لكل i . لنفرض أن $\varphi_i : G(p_i) \to H(p_i)$ تماثل لكل i وليكن $\varphi : G \to H$ التطبيق المعرف بالقاعدة :

$$\varphi(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \ldots + \varphi_k(x_k) \cdot$$

عندئذ ، φ تماثل وبالتالي فإن $G \cong H$ Δ

تمارين (٦,١)

(١) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتب p^2 ، p^3 ، p^4 ، p^5 ، p^6 ، و p^7 حيث p عدداً أولياً.

(٢) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة pq حيث p و q عددان أوليان مختلفان.

(٣) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة p^2q حيث p و q عددان أوليان مختلفان.

(٤) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة p^2q^2 حيث p و q عددان أوليان مختلفان .

(٥) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة p^3q^2 حيث p و q عددان أوليان مختلفان .

(٦) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 360.

(٧) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 3528.

(٨) جد جميع الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 1440.

(٩) إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية رتبتها n حيث p^2 لايقسم n لكل عدد أولي p فأثبت أن G زمرة دورية .

(١٠) بين أياً من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :

(أ) عدد الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 21 هو 2.

(ب) عدد الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 42 هو 2.

(ج) إذا كانت G زمرة إبدالية رتبتها 105 فإن G دورية .

(د) عدد الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 5^7 يساوي عدد الزمر الإبدالية غير المتماثلة من الرتبة 7^7.

(هـ) كل زمرة إبدالية رتبتها 28 تحتوي عنصر رتبته 14.

(٦,٢) الزمر الإبدالية الحرة
Free Abelian Groups

لقد قدمنا في الفصل الخامس مفهوم الزمرة الحرة . سنخصص هذا البند للزمر الإبدالية الحرة حيث ندرس خواصها الأساسية ونوظفها للحصول على تصنيف الزمر الإبدالية منتهية التوليد .

إذا كانت G زمرة إبدالية حرَّة مولَّدة بالمجموعة S فإننا سبق وأن بينا في المبرهنة (٥,٢) أن G تحقق خاصية الشمول. أي إذا كانت H زمرة إبدالية أخرى وكان $\varphi : S \to H$ تطبيقاً فإنه يوجد تشاكل وحيد $\varphi : G \to H$ حيث $\psi(s) = \varphi(s)$ لكل $s \in S$. إذا كانت $G = \langle S \rangle$ زمرة إبدالية تحقق خاصية الشمول فإننا نقول إن G زمرة حرة إبدالية أساسها S (**free abelian group with basis** S).

نلفت إنتباه القارئ إلى أن التعريف أعلاه للزمر الإبدالية الحرة يتفق مع التعريف المستخدم لمفهوم النظام الرياضي الحر بصورة عامة. ولحسن الحظ فإنه يوجد وصف آخر للزمر الإبدالية الحرة المنتهية التوليد (أي مولدة بمجموعة منتهية) يساعدنا على فهم ماهية هذه الزمر بصورة أفضل.

تعريف (٦,٣)

لتكن G زمرة إبدالية ولتكن $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ مجموعة جزئية من G. نقول إن S مستقلة خطياً (**linearly independent**) إذا تحقق ما يلي : لكل $n_1, n_2, \ldots, n_t \in \mathbb{Z}$ إذا كان $n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_tx_t = 0$ فإن $n_i = 0$ لكل $1 \le i \le t$.

ملحوظات

(١) سنعتبر المجموعة الخالية على أنها مستقلة خطياً .

(٢) تكون المجموعة الجزئية غير المنتهية S من الزمرة G مستقلة خطياً إذا كانت كل مجموعة منتهية من S مستقلة خطياً.

(٣) لاحظ أن أي مجموعة جزئية من مجموعة مستقلة خطياً يجب أن تكون مستقلة خطياً .

(٤) إذا كانت $G \neq \{0\}$ فإن أي مجموعة جزئية من G تحتوي 0 ليست مستقلة خطياً .

(٥) من الآن فصاعداً نستخدم الزمر $\mathbb{Z}^{(t)}$ ليدل على حاصل الضرب المباشر $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$ الذي عدد عوامله t .

مبرهنة (٦,١٢)

إذا كانت $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_t\}$ مجموعة جزئية منتهية من الزمرة الإبدالية G فإن العبـــارات التالية متكافئة:

(١) G زمرة إبدالية حرة أساسها S.

(٢) $G=\langle S\rangle$ و S مستقلة خطياً .

(٣) لكل $a\in G$ يوجد أعداد صحيحة وحيدة $n_1,n_2,\ldots,n_t$ بحيث يكون : $a=n_1,x_1+n_2x_2+\ldots+n_tx_t$.

(٤) $G\cong\langle x_1\rangle\oplus\langle x_2\rangle\oplus\ldots\oplus\langle x_t\rangle$.

البرهان

(١) $\Leftarrow$ (٢) : من الواضح أن $G=\langle S\rangle$. لنفرض الآن أن $n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_tx_t=0$. ولنفرض أن $e_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)\in\mathbb{Z}^{(t)}$ لكل $1\le i\le t$. وليكن $\varphi:S\to\mathbb{Z}^{(t)}$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(x_i)=e_i$. إذن ، بإستخدام (١) يوجد تشاكل وحيد $\psi:G\to\mathbb{Z}^{(t)}$ بحيث يكون $\psi(x_i)=\varphi(x_i)$ لكل $1\le i\le t$. الآن :

$$\begin{aligned}(0,0,\ldots,0)=\psi(0)&=\psi(n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_tx_t)\\&=n_1\psi(x_1)+n_2\psi(x_2)+\ldots+n_t\psi(x_t)\\&=n_1\varphi(x_1)+n_2\varphi(x_2)+\ldots+n_t\varphi(x_t)\\&=n_1e_1+n_2e_2+\ldots+n_te_t\\&=(n_1,n_2,\ldots,n_t)\end{aligned}$$

إذن ، $n_1=n_2=\ldots=n_t=0$. وبالتالي ، فإن S مستقلة خطياً .

(٢) $\Leftarrow$ (٣) : بما أن $G=\langle S\rangle$ فإنه من الواضح أن $a=n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_tx_t$ لكـــل $a\in G$. ولبرهان الوحدانية نفرض أيضاً أن $a=m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_tx_t$. عندئذ :

$(m_1-n_1)x_1+(m_2-n_2)x_2+\ldots+(m_t-n_t)x_t=0$.

وبما أن S مستقلة خطياً فإن $m_i-n_i=0$ (أي $m_i=n_i$) لكل $1\le i\le t$.

(٣) $\Leftarrow$ (٤) : بمـــــا أن $a=n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_tx_t$ لكـــــــل $a\in G$ فــــــإن $G=\langle x_1\rangle+\langle x_2\rangle+\ldots+\langle x_t\rangle$. لنفرض الآن أن :

$a\in\langle x_i\rangle\cap(\langle x_1\rangle+\ldots+\langle x_{i-1}\rangle+\langle x_{i+1}\rangle+\ldots+\langle x_t\rangle)$. إذن ،

$a = n_i x_i = n_1 x_1 + \ldots + n_{i-1} x_{i-1} + n_{i+1} x_{i+1} + \ldots + n_t x_t$. وبما أن طريقة كتابة a وحيدة فإن $n_1 = n_2 = \ldots = n_t = 0$. إذن $a = 0$. وبالتالي فإن : $G = \langle x_1 \rangle \oplus \langle x_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle x_t \rangle$.

(٤) $\Leftarrow$ (٣) : واضح من تعريف الجمع الداخلي المباشر.

(٣) $\Leftarrow$ (١) : لنفرض أن H زمرة إبدالية وأن $\varphi : S \to H$ تطبيقاً حيث $\varphi(x_i) = y_i$. لنفرض أن $a \in G$. بإستخدام الفقرة (٣) توجد أعداد صحيحة وحيدة $n_1, n_2, \ldots, n_t$ حيث $a = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_t x_t$. ليكن $\psi : G \to H$ التطبيق المعرف بالقاعدة $\psi(a) = n_1 y_1 + n_2 y_2 + \ldots + n_t y_t$. من الواضح أن $\psi(x_i) = y_i = \varphi(x_i)$ لكل $1 \le i \le t$.

كذلك ، إذا كان $b = m_1 x_1 + \ldots + m_t x_t \in G$ و $a = n_1 x_1 + \ldots + n_t x_t$ فإن:

$$\begin{aligned}
\psi(a+b) &= \psi[(n_1 + m_1)x_1 + \ldots + (n_t + m_t)x_t] \\
&= (n_1 + m_1)y_1 + \ldots + (n_t + m_t)y_t \\
&= (n_1 y_1 + \ldots + n_t y_t) + (m_1 y_1 + \ldots + m_t y_t) \\
&= \psi(a) + \psi(b)
\end{aligned}$$

إذن ، φ تشاكل ، ومن السهل أن نرى أن φ وحيد . إذن ، G زمرة إبدالية حرة أساسها S ◆

تعريف (٦,٤)

تسمى الزمرة الإبدالية G التي تحقق شروط المبرهنة (٦,١٢) ، الزمرة الإبدالية الحرة المنتهية التوليد **(finitely generated free abelian group)**.

نتيجة (٦,١٣)

إذا كانت $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ مجموعة جزئية مولّدة للزمرة الإبدالية G فإن :

G حرة إذا وفقط إذا كانت $G \cong \mathbb{Z}^{(t)}$.

البرهان

إذا كانت G حرة فبإستخدام المبرهنة (٦,١٢) نجد أن $G \cong \langle x_1 \rangle \oplus \langle x_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle x_t \rangle$.

وبما أن $\langle x_i \rangle$ زمرة دورية غير منتهية فإن $\langle x_i \rangle \cong \mathbb{Z}$. إذن ، $G \cong \mathbb{Z}^{(t)}$.

ولبرهان العكس ، نفرض أن $\varphi : G \to \mathbb{Z}^{(t)}$ تماثل . ولنفرض أن $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^{(t)}$. بما أن φ شامل فإنه يوجد $x_i \in G$ حيث $\varphi(x_i) = e_i$. من السهل الآن التحقق من أن $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ أساساً للزمرة G. وبالتالي فإن G حرة ◆

ملحوظة

لاحظ الشبه بين تعريف أساس الزمرة الإبدالية الحرة وأساس فضاء المتجهات علـــى حقــل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. الفرق الوحيد بين هذين التعريفين هو استبدال المجموعة $\mathbb{R}$ بمجموعة الأعـــداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ التي لا تشكل حقلاً ، ولذا فإن تعريف الزمرة الابدالية الحرة أعم.

كما في فضاء المتجهات ، من الممكن أن يكون للزمرة الإبدالية الحرة أكثر من أساس ، على سبيل المثال ، كل من المجموعتين $\{(1,0),(0,1)\}$ و $\{(-1,0),(0,-1)\}$ أساساً للزمرة الإبداليـــة الحرة $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. ولكن كما في فضاء المتجهات عدد عناصر جميع الأساسات المختلفة واحداً وهذا هو فحوى المبرهنة التالية .

مبرهنة (٦,١٤)

إذا كان كل من $S_1=\{x_1,x_2,\ldots,x_t\}$ و $S_2=\{y_1,y_2,\ldots,y_r\}$ أساساً للزمرة الإبدالية الحــرة G فإن $t=r$.

البرهان

بإستخدام النتيجة (٦,١٣) لدينا $G\cong\mathbb{Z}^{(t)}$ و $G\cong\mathbb{Z}^{(r)}$. وبما أن $2\mathbb{Z}\le\mathbb{Z}$ فإن $2G\le G$. إذن، $G/2G\cong(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(t)}$ وأن $G/2G\cong(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(r)}$. ولكن $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_2$. إذن ، $|G/2G|=2^r=2^t$. وبالتالي فإن $r=t$ ◆

تعريف (٦,٥)

إذا كانت G زمرة إبدالية حرة منتهية التوليد فإن بُعد G (rank G) هو عدد عناصر أي أساس للزمرة G.

لقد بينا في المبرهنة (٥,٥) أنه يمكن الحصول على أي زمرة H كصورة تشاكلية لزمرة حرة G. وعلى وجه الخصوص إذا كانت H زمرة إبدالية مولـــدة بالمجموعـــة $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_t\}$ وكانت G زمرة إبدالية حرة أساسها $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_t\}$ فإننا نستطيع إيجاد تـــشاكل شــامل $\varphi:G\to H$ بحيث تكون $\varphi(x_i)=a_i$.

إذا كانت G زمرة إبدالية حرة أساسها S فإنه يكون من المناسب أحياناً أن نغير هذا الأساس لنحصل على أساس آخر من الأساس S ، وهذا هو ما تزودنا به المبرهنة التالية :

مبرهنة (٦,١٥)

إذا كان $S=\{x_1,x_2,\dots,x_r\}$ أساساً للزمرة الإبدالية الحرة G وكان $n\in\mathbb{Z}$ فإن $T=\{x_1,x_2,\dots,x_{j-1},x_j+nx_i,x_{j+1},\dots,x_r\}$ أساس آخر للزمرة G لكل $i\neq j$.

البرهان

من الواضح ان T تولد G لأن $x_j=-nx_i+(x_j+nx_i)$. لنفرض الآن أن :

$n_1x_1+n_2x_2+\dots+n_{j-1}x_{j-1}+n_j(x_j+nx_i)+n_{j+1}x_{j+1}+\dots+n_rx_r=0$. عندئذ ، $n_1x_1+n_2x_2+\dots+(n_i+n_jn)x_i+\dots+n_jx_j+\dots+n_rx_r=0$. وبما أن S أساس للزمرة G فإن : $n_1=n_2=\dots=n_i+n_jn=\dots=n_j=\dots=n_r=0$

ولذا فإن $n_i=0$. وبالتالي فإن T أساس للزمرة G ◆

مثال (٦,٧)

بما أن $S=\{(1,0),(0,1)\}$ أساس للزمرة $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ فإنه بإستخدام المبرهنة (٦,١٥) نجد أن $T=\{(1,0),(4,1)\}$ أساس آخر للزمرة $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ لأن $(4,1)=4(1,0)+(0,1)$ □

لقد ذكرنا في المبرهنة (٥,٤) أن أي زمرة جزئية من زمرة حرة يجب أن تكون حرة ، ولكننا لم نقدم برهاناً لذلك. سنبرهن هذه الحقيقة الهامة في الحالة الخاصة للزمر الإبدالية الحرة المنتهية التوليد وسنوظفها لمساعدتنا على تصنيف الزمر الإبدالية المنتهية التوليد.

مبرهنة (٦,١٦)

إذا كانت G زمرة إبدالية حرة بعدها k وإذا كانت H زمرة جزئية غير تافهة من G فإنه يوجد أساس $\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$ للزمرة G وعدد صحيح r حيث $1\leq r\leq k$ وأعداد صحيحة موجبة $m_1,m_2,\dots,m_r$ بحيث m_{i-1} يقسم m_i لكل $2\leq i\leq r$ وبحيث أن $\{m_1x_1,m_2x_2,\dots,m_rx_r\}$ أساس للزمرة الجزئية H.

البرهان

نستخدم الاستقراء الرياضي على k. إذا كان $k=1$ فإن $G=\langle x_1\rangle$ زمرة دورية. لذا فإن $H=\langle m_1x_1\rangle$ زمرة دورية أيضاً حيث $m_1\in\mathbb{Z}^+$.

لنفرض الآن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر الإبدالية الحرة التي بعدها أصغر من k. ولنفرض أن $S\subseteq\mathbb{Z}^+$ تحقق: $m\in S$ إذا وفقط إذا وجد أساس $\{y_1,y_2,\dots,y_k\}$ للزمرة G بحيث يكون $my_1+n_2y_2+\dots+n_ky_k\in H$ حيث $n_2,\dots,n_k\in\mathbb{Z}$. بما أن H زمرة جزئية غير تافهة فإن $S\neq\phi$. لذا، بإستخدام مبدأ الترتيب الحسن تحتوي S على عنصر أصغري وليكن m_1. إذن، يوجد أساس $\{y_1,y_2,\dots,y_k\}$ للزمرة G حيث $h=m_1y_1+n_2y_2+\dots+n_ky_k\in H$ و $n_2,\dots,n_k\in\mathbb{Z}$. وإذا كان $\{z_1,z_2,\dots,z_k\}$ أساساً آخر للزمرة G يحقق $d_1z_1+d_2z_2+\dots+d_kz_k\in H$ و $d_1,d_2,\dots,d_k\in\mathbb{Z}$ فإن $m_1\le d_1$. الآن، بإستخدام خوارزمية القسمة يوجد $q_i,r_i\in\mathbb{Z}$ حيث: $n_i=q_im_1+r_i$ ، $0\le r_i<m_1$ لكل $2\le i\le k$.

إذن، $h=m_1(y_1+q_2y_2+\dots+q_ky_k)+r_2y_1+\dots+r_ky_k\in H$.

ولكن بإستخدام المبرهنة (٦,١٥)، نجد أن: $\{y_1+q_2y_2+\dots+q_ky_k, y_2,\dots,y_k\}$ أساس للزمرة G. وبإستخدام أصغرية m_1 نجد أن $r_i=0$ لكل $2\le i\le k$. إذن، $h=m_1x_1\in H$ حيث $x_1=y_1+q_2y_2+\dots+q_ky_k$. لنفرض الآن أن $K=\langle y_2,y_3,\dots,y_k\rangle$. من الواضح أن K زمرة إبدالية حرة بعدها $k-1$ وأن $G=\langle x_1\rangle\oplus K$.

سنبرهن الآن أن $H=\langle m_1x_1\rangle\oplus(H\cap K)$. ولهذا الغرض، نفرض أن $a\in H$. إذن، يوجد $d_i\in\mathbb{Z}$، $1\le i\le k$ بحيث يكون $a=d_1x_1+d_2y_2+\dots+d_ky_k$.

وبإستخدام خوارزمية القسمة مرة أخرى نستطيع إيجاد $q_1,r_1\in\mathbb{Z}$ حيث:

$d_1=q_1m_1+r_1$ ، $0\le r_1<m_1$. إذن، $a-q_1m_1x_1=r_1x_1+d_2y_2+\dots+d_ky_k\in H$. وبما أن m_1 أصغري فإن $r_1=0$. إذن، $d_2y_2+\dots+d_ky_k\in H$. ولذا فإن $a=q_1(m_1x_1)+d_2y_2+\dots+d_ky_k\in\langle m_1x_1\rangle+(H\cap K)$. وبما أن $G=\langle x_1\rangle\oplus K$ فإننا نخلص إلى أن $H=\langle m_1x_1\rangle\oplus(H\cap K)$. الآن، إذا كان $H\cap K=\{0\}$ فإن $H=\langle m_1x_1\rangle$ ونكون قد أنتهينا. لنفرض إذن، أن $H\cap K\neq\{0\}$. بما أن $H\cap K\le K$ وأن K زمرة حرة بعدها $k-1$ فإننا نجد بإستخدام فرضية الاستقراء أساساً $\{x_2,x_3,\dots,x_k\}$ للزمرة K وأعداد صحيحة موجبة $r,m_2,\dots,m_k$ بحيث يكون $\{m_2x_2,\dots,m_rx_r\}$ أساساً للزمرة $H\cap K$ وحيث m_{i-1} يقسم m_i لكل $3\le i\le r$. من الواضح الآن أن $\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$ أساساً للزمرة G وأن

$\{m_1x_1, m_2x_2, ..., m_rx_r\}$ أساساً للزمرة الجزئية H . ولإكمال البرهان يجب أن نثبت أن m_1 يقسم m_2 . ولهذا الغرض ، نستعين بخوارزمية القسمة مرة ثالثة لإيجاد $q, r \in \mathbb{Z}$ حيث :

$$m_2 = qm_1 + r \quad ، \quad 0 \le r < m_1 .$$

بإستخدام المبرهنة (٦,١٥) نجد أن :

$\{x_2, x_1 + qx_2, x_3, ..., x_k\}$ أساس للزمرة G وأن :

$$rx_2 + m_1(x_1 + qx_2) = m_1x_1 + m_2x_2 + 0m_3x_3 + ... + 0m_kx_k \in H .$$

وبما أن m_1 أصغري فإن $r = 0$. إذن m_1 بقسم m_2 وبهذا نكون قد أتممنا البرهان ◆

بعد هذا الجهد الذي بذلناه لبرهان المبرهنة (٦,١٦) نكون قد تسلحنا بالمعلومات اللازمة لبرهان المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية التوليد

(the fundamental theorem of finitely generated ablelian groups)

مبرهنة (٦,١٧) [المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية منتهية التوليد]

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية التوليد ومولّدة بمجموعة عدد عناصرها k فإن:

$$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{m_r} \oplus \mathbb{Z}^{(k-r)}$$

حيث (إن وجدت) $m_1 > 1$ و m_i يقسم m_{i+1} لكل $1 \le i < r-1$.

البرهان

بإستخدام المبرهنة (٥,٥) ، توجد زمرة إبدالية حرة F بعدها k وتشاكل شامل $\varphi : F \to G$. إذن، بإستخدام المبرهنة الأولى للتماثل ، نجد أن $F / Ker\varphi \cong G$.

إذا كان $Ker\varphi = \{0\}$ فإن $G \cong F \cong \mathbb{Z}^{(k)}$ ونكون قد انتهينا . لنفرض إذن ، أن $Ker\varphi \neq \{0\}$.

بما أن $Ker\varphi \le F$ فإنه بإستخدام المبرهنة (٦,١٦) ، يوجد أساس $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ للزمرة F وعدد صحيح r ، $1 \le r \le k$ وأعداد صحيحة موجبة $m_1, m_2, ..., m_r$ بحيث m_{i-1} يقسم m_i لكل $2 \le i \le r$ وبحيث أن $\{m_1x_1, ..., m_rx_r\}$ أساساً للزمرة الجزئية $Ker\varphi$. إذن ،

$$F = \langle x_1 \rangle \oplus ... \oplus \langle x_k \rangle \cong \mathbb{Z}^{(k)} \quad و \quad Ker\varphi = \langle m_1x_1 \rangle \oplus ... \oplus \langle m_rx_r \rangle \cong m_1\mathbb{Z} \oplus ... \oplus m_r\mathbb{Z}$$

ولذا فإن :

$$G \cong F / Ker\varphi \cong \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{(k-r)}$$

$$\cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{m_r} \oplus \mathbb{Z}^{(k-r)}$$

وبهذا يتم البرهان ◆

في الحقيقة ، إن تحليل الزمرة الإبدالية المنتهية التوليد كحاصل جمع مباشر لزمر دورية هـــو تحليل وحيد. سنقوم ببرهان وحدانية التحليل على مراحل .

لتكن G زمرة إبدالية ولتكن $T(G)=\{x\in G: o(x)<\infty\}$. من الواضح أن $T(G)$ زمرة جزئية من G . تسمى $T(G)$ زمرة الفتل الجزئية من G **(torsion subgroup of** G**)** . كما أن الزمرة G تكون زمرة عديمة الفتل **(torsion free)** إذا كانت رتب جميع عناصرها (عدا العنصر المحايد) غير منتهية. أي إذا كانت $T(G)=\{0\}$.

مبرهنة (٦,١٨)

إذا كانت G زمرة إبدالية فإن :

(١) $G/T(G)$ زمرة إبدالية عديمة الفتل .

(٢) إذا كانت G منتهية التوليد فإن $G/T(G)$ منتهية التوليد.

البرهان

(١) لنفرض أن $a+T(G)\in G/T(G)$. ولنفرض أن $o(a+T(G))=n$. إذن ، $n(a+T(G))=T(G)$. ولذا فإن $na\in T(G)$. ومنه فإن $m(na)=0$ حيـــث $m\in\mathbb{Z}^+$. إذن ، $a=0$. وبالتالي فإن $a+T(G)=T(G)$. إذن ، $G/T(G)$ عديمة الفتل .

(٢) من الواضح أنه إذا كانت $G=\langle a_1,a_2,\ldots,a_k\rangle$ فإن :

$$G/T(G)=\langle a_1+T(G),\ldots,a_k+T(G)\rangle \quad \blacklozenge$$

مبرهنة (٦,١٩)

إذا كانت $G\neq\{0\}$ زمرة إبدالية منتهية التوليد فإن G زمرة عديمة الفتل إذا وفقط إذا كانـــت G زمرة حرة .

البرهان

لنفرض أولاً أن G زمرة عديمة الفتل . بإستخدام المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية منتهية التوليد نجد أن $G\cong\mathbb{Z}_{m_1}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}_{m_r}\oplus\mathbb{Z}^{(k-r)}$. وبما أن G عديمة الفتل فإن $r=0$. إذن ، $G\cong\mathbb{Z}^{(k-r)}$. وبالتالي فهي زمرة حرة .

ولبرهان العكس ، نفرض أن G زمرة حرة . إذن يوجد $k \in \mathbb{Z}$ حيث $G \cong \mathbb{Z}^{(k)}$. ولذا فإن رتب جميع عناصر G عدا العنصر المحايد غير منتهية . وبالتالي فإن G عديمة الفتل ◆

نتيجة (٦,٢٠)

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية التوليد وكانت $G/T(G)$ زمرة غير تافهة فإن $G/T(G)$ زمرة إبدالية حرة منتهية التوليد.

البرهان

بإستخدام المبرهنة (٦,١٨) ، نجد أن $G/T(G)$ زمرة إبدالية منتهية التوليد وعديمة الفتل . وبإستخدام المبرهنة (٦,١٩) ، نجد أن $G/T(G)$ زمرة حرة ◆

مبرهنة (٦,٢١)

إذا كانت كل من G و H زمرة إبدالية فإن $T(G \oplus H) = T(G) \oplus T(H)$.

البرهان

لنفرض أولاً أن $x \in T(G \oplus H)$. عندئذ ، $x = g + h$ حيث $g \in G$ و $h \in H$ وأن $o(x) = n < \infty$. إذن، $nx = ng + nh = 0$. ولذا فإن $ng = 0$ و $nh = 0$. وعليه فإن $g \in T(G)$ و $h \in T(H)$. ولذا فإن $x \in T(G) \oplus T(H)$. ومنه فإن $T(G \oplus H) \subseteq T(G) \oplus T(H)$.

وبالعكس ، إذا كان $g + h \in T(G) \oplus T(H)$ فإن $g \in T(G)$ و إن $h \in T(H)$. إذن، $o(g) = m < \infty$ و $o(h) = n < \infty$. أي أن $mg = 0$ و $nh = 0$. ولذا فإن $g + h \in T(G \oplus H)$. وبالتالي فإن $T(G) \oplus T(H) \subseteq T(G \oplus H)$ ◆

ملحوظة

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية التوليد بحيث $G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_k} \oplus \mathbb{Z}^{(s)}$. حيث $m_1 > 1$ ، m_i يقسم m_{i+1} لكل $1 \le i < k-1$ فإننا نستطيع كتابة G على الصورة : $G \cong \mathbb{Z}_{m_k} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}^{(s)}$. ولذا فإنه من الممكن اعتبار أن $m_k > 1$ وأن m_{i+1} يقسم m_i لكل $1 \le i \le k-1$.

مبرهنة (٦,٢٢)

لنفرض أن G زمرة إبدالية غير تافهة منتهية التوليد . ولنفرض أن :

$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_k} \oplus \mathbb{Z}^{(r)} \cong \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_q} \oplus \mathbb{Z}^{(s)}$ حيث $m_k > 1$ و m_{i+1} يقسم m_i لكل $1 \le i < k-1$ وحيث $n_q > 1$ و n_{j+1} يقسم n_j لكل $1 \le j < q-1$. عندئذ :

$k = q$ ، $r = s$ و $m_i = n_i$ لكل $1 \le i \le k$.

البرهان

لنفرض أن $G_1 = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_k} \oplus \mathbb{Z}^{(r)}$ وأن $G_2 = \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_q} \oplus \mathbb{Z}^{(s)}$. بإستخدام المبرهنة (٦,٢١) ، نجد أن $T(G_1) = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$ وأن $T(G_2) = \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_q}$.

لنفرض أن $x \in T(G_1)$. إذن يوجد $x_i \in \mathbb{Z}_{m_i}$ حيث $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$. وبما أن $|\mathbb{Z}_{m_i}| = m_i$ و m_i يقسم m_1 لكل $1 \le i \le k$ وأن $m_i x_i = 0$ لكل $1 \le i \le k$ فإن $m_1 a = 0$ لكل $a \in T(G_1)$. كذلك يوجد $x_1 \in \mathbb{Z}_{m_1}$ حيث $o(x_1) = m_1$. إذن ، $a = (x_1, 0, 0, \ldots, 0) \in T(G_1)$ رتبته m_1 . وبالمثل ، يوجد $b \in T(G_2)$ حيث $o(b) = n_1$ و $n_1 y = 0$ لكل $y \in T(G_2)$. وبما أن $T(G_1) \cong T(G_2)$ فإنه يوجد تماثل $\psi : T(G_1) \to T(G_2)$. الآن $o(\psi(a)) = m_1$ و $n_1 \psi(a) = 0$. إذن، $m_1 \le n_1$. وبالمثل ، يمكن إثبات أن $n_1 \le m_1$. إذن ، $m_1 = n_1$. لنفرض الآن أن $m_2 = n_2, \ldots, m_{i-1} = n_{i-1}$ ولكن $m_i \ne n_i$ حيث $1 \le i \le \min\{k, q\}$. لنفرض أن $m_i < n_i$. ولتكن $K = \{m_i x : x \in T(G_1)\}$. من الواضح أن $K \le T(G_1)$. وإذا فرضنا أن $\mathbb{Z}_{m_i} = \langle a_i \rangle$ فإن $K = \langle m_i a_1 \rangle \oplus \langle m_i a_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle m_i a_k \rangle$. كذلك ،

$\psi(K) = \{m_i \psi(x) : x \in T(G)\} \le T(G_2)$. وإذا فرضنا أن $\mathbb{Z}_{n_i} = \langle b_i \rangle$ فإن

$\psi(K) = \langle m_i b_1 \rangle \oplus \langle m_i b_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle m_i b_q \rangle$. إذن ،

$$|K| = \frac{o(a_1)}{\gcd(o(a_1), m_i)} \cdots \frac{o(a_k)}{\gcd(o(a_k), m_i)} = \frac{m_1}{\gcd(m_1, m_i)} \cdots \frac{m_k}{\gcd(m_k, m_i)}$$

$$= \frac{m_1}{m_i} \cdots \frac{m_{i-1}}{m_i} \frac{m_i}{m_i} \frac{m_{i+1}}{m_{i+1}} \cdots \frac{m_k}{m_k} = \frac{m_1 m_2 \ldots m_{i-1}}{m_i^{i-1}}$$

وذلك لأن m_{i+1} يقسم m_i لكل $1 \le i \le k-1$. وبالمثل ،

$$|\psi(K)| = \frac{m_1 m_2 \ldots m_{i-1}}{m_i^{i-1}} \cdot \frac{n_i}{\gcd(n_i, m_i)} \cdots \frac{n_q}{\gcd(n_q, m_i)}$$

وبما أن $|K|=|\psi(K)|$ فإن $\frac{n_i}{\gcd(n_i,m_i)}\cdots\frac{m_q}{\gcd(n_q,m_i)}=1$. (*)

وبما أن $m_i<n_i$ فإن $\gcd(n_i,m_i)<n_i$. ولذا فإن $\frac{n_i}{\gcd(n_i,m_i)}>1$. وينتج عن ذلك أن الطرف الأيسر (*) أكبر من 1 وهذا مستحيل. إذن، $n_i \not< m_i$. وبالمثل، $m_i \not< n_i$. إذن، $m_i=n_i$. ولذا فإننا نخلص إلى أن $m_1m_2\ldots m_k=n_1n_2\ldots n_q$. إذا كان $k<q$ فإن $m_i=n_i$ لكل $1\le i\le k$. ومنه فإن $1=n_{k+1}\ldots n_q$ وهذا مستحيل لأن $n_i>1$ لكل i . إذن، $k\not<q$. وبالمثل $q\not<k$. ومنه فإن $q=k$.

وأخيراً، لإثبات أن $r=s$ لاحظ أن $G_1/T(G_1)\cong\mathbb{Z}^{(r)}$ وأن $G_2/T(G_2)\cong\mathbb{Z}^{(s)}$. وبما أن $T(G_1)\cong T(G_2)$ فإن $\mathbb{Z}^{(r)}\cong\mathbb{Z}^{(s)}$. وبالتالي نخلص إلى أن $r=s$ ◆

نستطيع الآن الحصول على الصيغة التالية للمبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية كنتيجة للمبرهنتين (٦,١٧) و (٦,٢٢)

نتيجة (٦,٢٣)

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية غير تافهة فإنه يوجد أعداد صحيحة موجبة وحيدة $m_1,m_2,\ldots,m_k$ بحيث $m_1>1$ و m_i يقسم m_{i+1} لكل $1\le i\le k-1$ وبحيث يكون:

$$G\cong\mathbb{Z}_{m_1}\oplus\mathbb{Z}_{m_2}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}_{m_k}\quad ◆$$

ملحوظة

لاحظ أن الأعداد m_i ليست بالضرورة أن تكون جميعها مختلفة، وعلى الرغم من ذلك فإن الأعداد $m_1,m_2,\ldots,m_k,r$ تحدد لنا تماماً الزمرة الإبدالية المنتهية التوليد (بإستثناء التماثل). يسمى العدد r الرتبة الحرة للزمرة G ، كما تسمى الأعداد $m_1,m_2,\ldots,m_k$ العوامل اللامتغيرة **(invariant factors)** للزمرة G .

(٦,٢,١) تمارين محلولة **(Solved Exercises)**

تمرين (١)

إذا كانت $G=\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{12}\oplus\mathbb{Z}_7$ فأثبت أن $T(G)$ زمرة دورية .

الحل

لاحظ أن $G \cong \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{240} \oplus \mathbb{Z}$. ولذا فإن $T(G) \cong \mathbb{Z}_{240}$. وبالتالي فهي دورية Δ

تمرين (٢)

إذا كانت G زمرة إبدالية منتهية التوليد فأثبت أن أي زمرة جزئية من G يجب أن تكون منتهية التوليد.

الحل

بما أن G زمرة إبدالية منتهية التوليد فإنه توجد زمرة إبدالية حرة منتهية التوليد F بحيث إن $G \cong F/N$ حيث $N \leq F$. الآن، زمر F/N الجزئية يجب أن تكون على الصورة H/N حيث $H \leq F$. وبما أن F زمرة حرة منتهية التوليد فإن H زمرة حرة ومنتهية التوليد. وعليه فإن H/N منتهية التوليد Δ

تمرين (٣)

إذا كانت $G = \mathbb{Z}_{22} \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{48}$ فجد $m_1, m_2, \ldots, m_k$ حيث $m_1 > 1$ ، $m_i \mid m_{i+1}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, k-1$ بحيث يكون $G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$.

الحل

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{11} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{16} \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{11} \oplus \mathbb{Z}_{16} \\ &\cong \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{2640} \end{aligned}$$

ولذا فإن $m_1 = 6$ و $m_2 = 2640$ Δ

تمارين (٦,٢)

(١) عين أساس للزمرة الحرة $\mathbb{Z}^{(3)}$ بحيث تكون جميع إحداثيات عناصر الأساس ليست أصفاراً.

(٢) إذا كانت كل من G_1 و G_2 زمرة إبدالية حرة فأثبت أن $G_1 \oplus G_2$ زمرة إبدالية حرة أيضاً.

(٣) لتكن G زمرة إبدالية منتهية التوليد غير تافهة. إذا كان $o(a) = p$ لكل $0 \neq a \in G$ حيث p عدداً أولياً فأثبت أن $|G| = p^k$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$.

(٤) إذا كانت H زمرة جزئية من الزمرة الإبدالية G حيث $T(G) \subseteq H$ فأثبت أن $T(G) = T(H)$.

(٥) إذا كانت G زمرة إبدالية فأثبت أن $nG \bigcap T(G) \subseteq nT(G)$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

(٦) إذا كانت $H \leq G$ فإننا نقول إن H لا متغيرة تماماً **(fully invariant)** إذا كان $\varphi(H) \subseteq H$ لكل تشاكل $\varphi : G \to G$. إذا كانت G زمرة إبدالية فأثبت أن $T(G)$ لامتغيرة تماماً.

(٧) إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة إبدالية G حيث G/H عديمة الفتل فأثبت أن $T(G) \subseteq H$.

(٨) جد $T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ حيث $\mathbb{R}$ هي زمرة الأعداد الحقيقية تحت عملية الجمع و $\mathbb{Z}$ زمرة الأعداد الصحيحة تحت عملية الجمع.

(٩) إذا كانت كل من G و H زمرة إبدالية فأثبت أن :

$$(G \oplus H)/T(G \oplus H) \cong (G/T(G)) \oplus (H/T(H)).$$

(١٠) لتكن H زمرة جزئية من الزمرة الابدالية G. إذا كانت كل من H و G/H منتهية التوليد فأثبت أن G منتهية التوليد.

(١١) بين أياً من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة:

(أ) $\{(2,1),(3,1)\}$ أساس للزمرة $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

(ب) $\{(2,1),(4,1)\}$ أساس للزمرة $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

(ت) إذا كانت G زمرة إبدالية حرة بعدها r فإنه من الممكن إيجاد زمرة جزئية فعلية من G بعدها r أيضاً.

(ث) $(\mathbb{Q},+)$ عديمة القتل.

(ج) $(\mathbb{Q},+)$ منتهية التوليد.

(ح) $(\mathbb{Q},+)$ حرة.

(خ) إذا كانت $G = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{15}$ فإن $T(G)$ دورية.

(د) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ زمرة فتل.

(ذ) إذا كانت $G = \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{81} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_2$ فإنه يوجد $m_1 \mid m_2$ حيث $G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2}$.

(ر) الزمرة $G = \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{30} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ تماثل الزمرة $\mathbb{Z}_{108} \oplus \mathbb{Z}_{50} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

(٦,٣) الزمر الإبدالية القابلة للقسمة
Divisible Abelian Groups

نخصص هذا البند لدراسة أحد أهم أنواع الزمر الإبدالية وهو الزمر الإبدالية القابلة للقسمة. سنقوم بتقديم تصنيف كامل لهذه الزمر.

تعريف (٦,٦)

نقول إن الزمرة الإبدالية G قابلة للقسمة (**divisible**) إذا كان لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ ولكل $y \in G$ يوجد $x \in G$ حيث $nx = y$. أي أن G قابلة للقسمة إذا كان $nG = G$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

مثال (٦,٨)

$\mathbb{Q}$ زمرة قابلة للقسمة، لأنه إذا كان $n \in \mathbb{Z}^+$ وكان $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ فإن $\frac{a}{nb} \in \mathbb{Q}$ وإن $n\left(\frac{a}{nb}\right) = \frac{a}{b}$ □

مثال (٦,٩)

$\mathbb{Z}$ غير قابلة للقسمة لأن $n\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ إذا كان $n > 1$ □

مبرهنة (٦,٢٤)

إذا كانت G زمرة إبدالية حيث لكل عدد أولي p وكل $y \in G$ يوجد $x \in G$ بحيث يكون $px = y$ فإن G قابلة للقسمة.

البرهان

ليكن $n \in \mathbb{Z}^+$ و $y \in G$. ولنفرض أن $n = p_1p_2 \dots p_k$ هو تحليل n إلى عوامل أولية (ليست بالضرورة مختلفة). إذن، يوجد $x_1 \in G$ حيث $p_1x_1 = y$، $x_2 \in G$ حيث $p_2x_2 = x_1$، …، $x_k \in G$ حيث $p_kx_k = x_{k-1}$. ولذا فإن: $nx_k = p_1p_2 \dots p_kx_k = p_1p_2 \dots p_{k-1}x_{k-1} = \dots = p_1x_1 = y$. وبالتالي فإن G قابلة للقسمة ◆

ليكن p عدداً أولياً ولتكن $\mathbb{Q}^p = \left\{\frac{a}{p^n} : \frac{a}{p^n} \in \mathbb{Q}\right\}$. من الواضح أن $\mathbb{Q}^p$ زمرة جزئية من $\mathbb{Q}$ وتحتوي $\mathbb{Z}$ لأنه إذا كان $\frac{c}{p^m}, \frac{a}{p^n} \in \mathbb{Q}^p$ حيث $n \le m$ فإن:

$$\frac{a}{p^n} - \frac{c}{p^n} = \frac{ap^{m-n} - c}{p^m} \in \mathbb{Q}^p.$$

تعريف (٦,٧)

تسمى الزمرة $\mathbb{Q}^p / \mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} : x \in \mathbb{Q}^p\}$ زمرة برفر **(Prufer group)** من النوع p ويرمز لها عادة بالرمز $\mathbb{Z}(p^\infty)$.

تلعب الزمرة $\mathbb{Z}(p^\infty)$ دوراً أساسياً في بناء الزمر الإبدالية القابلة للقسمة حيث تشكل مع زمرة الأعداد الكسرية $\mathbb{Q}$ اللبنات الأساسية في هذا البناء. ولذا فإننا نلخص الخواص الأساسية للزمرة $\mathbb{Z}(p^\infty)$ في المبرهنة التالية :

مبرهنة (٦,٢٥)

(أ) $\mathbb{Z}(p^\infty)$ زمرة من النوع p وعلاوة على ذلك ، إذا كان $x = \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}(p^\infty)$ فإن $o(x) = p^n$.

(ب) $\mathbb{Z}(p^\infty)$ قابلة للقسمة.

(ج) إذا كانت $H \le \mathbb{Z}(p^\infty)$ وكان $\frac{t}{p^j} + \mathbb{Z} \in H$ فإن $\frac{1}{p^j} + \mathbb{Z} \in H$.

(د) لتكن $H_m = \langle \frac{1}{p^m} + \mathbb{Z} \rangle$ لكل $m \in \mathbb{Z}^+$. إذا كانت H زمرة جزئية فعلية من $\mathbb{Z}(p^\infty)$ فإنه يوجد $m \in \mathbb{Z}^+$ حيث $H = H_m$. ولذا فإن كل زمرة جزئية فعلية من $\mathbb{Z}(p^\infty)$ يجب أن تكون منتهية.

(هـ) $\mathbb{Z}(p^\infty) = \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m$.

(و) $\mathbb{Z}(p^\infty)[p^n] = \{x \in \mathbb{Z}(p^\infty) : p^n x = 0\} = \langle \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \rangle$.

(ز) جميع زمرة $\mathbb{Z}(p^\infty)$ الجزئية لامتغيرية تماماً.

(ح) إذا كانت H زمرة جزئية فعلية من $\mathbb{Z}(p^\infty)$ فإن $\mathbb{Z}(p^\infty) / H \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$.

(ط) إذا كانت $G=\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ حيث $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots$ وكل C_i زمرة دورية من الرتبة p^i فإن $G \cong \mathbb{Z}(P^{\infty})$.

البرهان

(أ) لنفرض أن $x=\frac{a}{p^n}+\mathbb{Z}$. عندئذ، $p^n x = p^n\left(\frac{a}{p^n}+\mathbb{Z}\right)=a+\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$. ولذا فإن $o(x)$ يقسم p^n. لنفرض أن $o(x)=p^m$. عندئذ، $\frac{p^m a}{p^n}+\mathbb{Z}=p^m\left(\frac{a}{p^n}+\mathbb{Z}\right)=\mathbb{Z}$.

ولذا فإن $\frac{p^m a}{p^n}\in\mathbb{Z}$. ومنه فإن p^n يقسم $p^m a$ ومن ثم فإن p^n يقسم p^m لأن $\gcd(p^n,a)=1$.

إذن، $p^n=p^m=o(x)$.

(ب) لنفرض أن q عدداً أولياً. ولنفرض أن $y=\frac{a}{p^n}+\mathbb{Z}\in\mathbb{Z}(p^{\infty})$. إذا كان $q=p$ فإن:

$$q\left(\frac{a}{p^{n+1}}+\mathbb{Z}\right)=\frac{pa}{p^{n+1}}+\mathbb{Z}=\frac{a}{p^n}+\mathbb{Z}=y$$

أما إذا كان $q\neq p$ وكان $y=\frac{a}{p^n}+\mathbb{Z}\in\mathbb{Z}(p^{\infty})$ فإن $\frac{a}{p^n}\in\mathbb{Q}^p$. وبما أن $\gcd(q,p^n)=1$ فإنه يوجد $i,j\in\mathbb{Z}$ حيث $iq+jp^n=1$. ولذا فإن

$$iq\left(\frac{a}{p^n}\right)+ja=\frac{iqa+jap^n}{p^n}=\frac{a}{p^n}(iq+jp^n)=\frac{a}{p^n}$$. ومنه فإن،

$$q\left(\frac{ia}{p^n}\right)+ja+\mathbb{Z}=\frac{a}{p^n}+\mathbb{Z}=y$$. ولكن،

$$q\left(\frac{ia}{p^n}\right)+ja+\mathbb{Z}=q\left(\frac{ia}{p^n}\right)+\mathbb{Z}=q\left(\frac{ia}{p^n}+\mathbb{Z}\right)$$. إذن، $q\left(\frac{ia}{p^n}+\mathbb{Z}\right)=y$.

وباستخدام المبرهنة (٦،٢٤)، نخلص إلى أن $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ قابلة للقسمة.

(ج) لنفرض أن $\frac{t}{p^j}+\mathbb{Z}\in H$. بما أن $\gcd(t,p^j)=1$ فإنه يوجد $c,d,\in\mathbb{Z}$ حيث $cp^j+dt=1$. وبما أن $H\le\mathbb{Z}(p^{\infty})$ فإن $d\left(\frac{t}{p^j}+\mathbb{Z}\right)\in H$. إذن،

$$\frac{dt}{p^j}+\mathbb{Z}=\frac{1-cp^j}{p^j}+\mathbb{Z}=\frac{1}{p^j}-c+\mathbb{Z}=\frac{1}{p^j}+\mathbb{Z}\in H.$$

(د) لنفرض أن H زمرة جزئية فعلية من $\mathbb{Z}(p^\infty)$. إذا كان $\frac{1}{p^i}+\mathbb{Z}\in H$ لكل عدد صحيح غير سالب i فإن $H=\mathbb{Z}(p^\infty)$ وهذا مستحيل. إذن، يوجد عدد أصغري $n\in\mathbb{Z}^+$ حيث $\frac{1}{p^n}+\mathbb{Z}\notin H$. لنفرض أن $m=n-1$. إذن، $\frac{1}{p^m}+\mathbb{Z}\in H$. ولذا فإن $H_m\subseteq H$.

ولبرهان العكس، نفرض أن $\frac{t}{p^j}+\mathbb{Z}\in H$. إذن، بإستخدام الفقرة (ج) نجد أن $\frac{1}{p^j}+\mathbb{Z}\in H$.

لاحظ أن $p^j<p^n$. لأنه لو كان $p^n\le p^j$ فإن $p^{j-n}\left(\frac{1}{p^j}+\mathbb{Z}\right)=\frac{1}{p^n}+\mathbb{Z}\in H$ وهذا مستحيل.

إذن، $p^j<p^n$ ومنه فإن $p^j\le m$. إذن، $tp^{m-j}\left(\frac{1}{p^m}+\mathbb{Z}\right)=\frac{t}{p^j}+\mathbb{Z}\in H_m$. وعليه فإن، $H\subseteq H_m$. وبالتالي فإن $H=H_m$. وأخيراً بما أن H_m زمرة منتهية فإن H زمرة منتهية.

(هـ) من الواضح أن $H_m\subseteq\mathbb{Z}(p^\infty)$ وأن $\mathbb{Z}(p^\infty)\subseteq\bigcup_{m=1}^{\infty}H_m$. ونستنتج أن $\mathbb{Z}(p^\infty)=\bigcup_{m=1}^{\infty}H_m$.

(و) لنفرض أن $y=\frac{t}{p^k}+\mathbb{Z}\in\mathbb{Z}(p^\infty)[p^n]$. عندئذ، $p^n y=\mathbb{Z}$. ولذا فإن $o(y)$ يقسم p^n.
وباستخدام الفقرة (أ)، نجد أن p^k يقسم p^n. أي أن $k\le n$ إذن،

$$y=\frac{t}{p^k}+\mathbb{Z}=\frac{tp^{n-k}}{p^n}+\mathbb{Z}\in\langle\frac{1}{p^n}+\mathbb{Z}\rangle.$$

وبالعكس، إذا كان $y\in\langle\frac{1}{p^n}+\mathbb{Z}\rangle$ فإن $y=\frac{t}{p^n}+\mathbb{Z}$. ولذا فإن $p^n y=\mathbb{Z}$.
إذن، $y\in\mathbb{Z}(p^\infty)[p^n]$.

(ز) لنفرض أن $H\le\mathbb{Z}(P^\infty)$. إذا كانت $H=\mathbb{Z}(P^\infty)$ فإنه من الواضح أن H لامتغيرة تماماً. لنفرض إذن أن H زمرة جزئية فعلية من $\mathbb{Z}(P^\infty)$. إذن باستخدام الفقرة (د) ، نجد أن $H=H_n=\langle\frac{1}{p^n}+\mathbb{Z}\rangle$ حيث $n\in\mathbb{Z}^+$. ولذا فإنه باستخدام الفقرة (و) ، نجد أن $H=\mathbb{Z}(p^\infty)[p^n]$. لنفرض أن $\varphi:\mathbb{Z}(p^\infty)\to\mathbb{Z}(p^\infty)$ تشاكل. ولنفرض أن $x\in H$. عندئذ، $p^n x=\mathbb{Z}$. ولذا فإن $p^n\varphi(x)=\varphi(p^n x)=\varphi(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$.إذن ، $\varphi(x)\in H$. وبالتالي فإن $\varphi(H)\subseteq H$.

(ح) باستخدام المبرهنة (٦,١) نجد أن $\mathbb{Z}(p^\infty)/\mathbb{Z}(p^\infty)[p^n] \cong p^n\mathbb{Z}(p^\infty)$. ولكن $H = \mathbb{Z}(p^\infty)[p^n]$ و $p^n\mathbb{Z}(p^\infty) = \mathbb{Z}(p^\infty)$ لأن $\mathbb{Z}(p^\infty)$ قابلة للقسمة. إذن، $\mathbb{Z}(P^\infty)/H \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$.

(ط) لنفرض أن $C_i = \langle a_i \rangle$. باستخدام الاستقراء الرياضي نستطيع أن نثبت وبسهولة أن $pa_{i+1} = a_i$ لكل $i \in \mathbb{Z}^+$. لنفرض الآن أن $\varphi : G \to \mathbb{Z}(P^\infty)$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\varphi(ma_i) = \frac{m}{p^i} + \mathbb{Z}$ لكل عدد صحيح m. إذا كان $ma_r, na_s \in G$ حيث $ma_r = na_s$ فإن $\varphi(ma_r) = \frac{m}{p^r} + \mathbb{Z}$ وأن $\varphi(na_s) = \frac{n}{p^s} + \mathbb{Z}$. إذا فرضنا أن $r \geq s$ فإننا نجد أن $p^{r-s}a_r = a_s$. إذن، $ma_r = na_s = np^{r-s}a_r$. أي أن $(m - np^{r-s})a_r = 0$. إذن، $o(a_r) = p^r$ يقسم $m - np^{r-s}$. أي أن $m - np^{r-s} = kp^r$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. وعليه فإن $m = np^{r-s} + kp^r$. ومنه فإن $\frac{m}{p^r} = \frac{n}{p^s} + k$. إذن، $\frac{m}{p^r} + \mathbb{Z} = \frac{n}{p^s} + \mathbb{Z}$. أي أن $\varphi(ma_r) = \varphi(na_s)$. وبالتالي فإن φ حسن التعريف.

نبرهن الآن أن φ تشاكل. ولهذا الغرض نفرض أن $g, h \in G$. إذن، يوجد $r \in \mathbb{Z}^+$ حيث $g, h \in C_r$. ولذا فإن $g = sa_r$ و $h = ta_r$ حيث $t, s \in \mathbb{Z}$. الآن :

$$\varphi(g+h) = \varphi((s+t)a_r) = \frac{s+t}{p^r} + \mathbb{Z} = \left(\frac{s}{p^r} + \mathbb{Z}\right) + \left(\frac{t}{p^r} + \mathbb{Z}\right) = \varphi(g) + \varphi(h)$$

ولذا فإن φ تشاكل. ومن الواضح أن φ شامل. وأخيراً :

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{g \in G : \varphi(g) = \mathbb{Z}\} = \{sa_r : s \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}^+, \frac{s}{p^r} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}\}$$

$$= \{sa_r : \frac{s}{p^r} \in \mathbb{Z}\} = \{sa_r : s \text{ يقسم } p^r\} = \{0\}$$

وبالتالي فإن φ أحادي وينتج عن ذلك أن $G \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ ◆

مبرهنة (٦,٢٦)

إذا كانت G زمرة إبدالية قابلة للقسمة وكانت $H \leq G$ فإن G/H قابلة للقسمة. أي أن الصورة التشاكلية لزمرة قابلة للقسمة هي زمر قابلة للقسمة أيضاً.

البرهان

لنفرض أن $g + H \in G/H$ وأن $n \in \mathbb{Z}^+$. بما أن G قابلة للقسمة فإنه يوجد $x \in G$ حيث

$nx = g$. إذن، $n(x+H) = nx + H = g + H$. وبالتالي فإن G/H قابلة للقسمة ◆

مبرهنة (٦,٢٧)

إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الإبدالية فإن $G = \sum_{i\in I} G_i$ قابلة للقسمة إذا وفقط إذا كانت G_i قابلة للقسمة لكل $i \in I$.

البرهان

لنفرض أولاً أن G قابلة للقسمة. لاحظ أن $G = G_j \oplus \sum_{i\neq j} G_i$ وأن $G/\sum_{i\neq t} G_i \cong G_j$. بما أن G قابلة للقسمة فإنه باستخدام المبرهنة (٦,٢٦) نجد أن $G/\sum_{i\neq j} G_i$ قابلة للقسمة . وبالتالي فإن G_j قابلة للقسمة. ولبرهان العكس، نفرض أن G_i قابلة للقسمة لكل $i \in I$. ولنفرض أن $f \in G$ حيث $S(f) = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ وأن $n \in \mathbb{Z}^+$. بما أن G_{i_t} قابلة للقسمة فإنه يوجد y_t حيث $ny_t = f(i_t)$ لكل $1 \le t \le k$. لنفرض الآن أن:

$$g(i) = \begin{cases} y_t & , \ i = i_t \\ 0 & \ i \neq i_t \end{cases} .$$

من الواضح أن $g \in G$ وأن $ng = f$. وبالتالي فإن G قابلة للقسمة ◆

المبرهنة التالية ليست فقط الأداة الأساسية لتصنيف الزمر القابلة للقسمة ولكنها أيضاً مهمة بحد ذاتها. وبرهانها هو تطبيق نمطي لتمهيدية زورن (**Zorn's lemma**) والتي تنص على :

إذا كانت $(A, \le)$ مجموعة مرتبة جزئياً بحيث يوجد لكل سلسلة من A (مجموعة جزئية من A مرتبة كلياً) حد أعلى فإن A تحتوي على عنصر أعظمي.

مبرهنة (٦,٢٨)

إذا كانت H زمرة جزئية قابلة للقسمة من الزمرة الإبدالية G فإنه يوجد زمرة جزئية K من G حيث $G = H \oplus K$. أي أن الزمر الجزئية القابلة للقسمة عبارة عن عامل جمع مباشر.

البرهان

لنفرض أن $S = \{L \le G : L \cap H = \{0\}\}$. من الواضح أن $(S, \subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً. لنفرض

أن $\{L_i : i \in I\}$ سلسلة مـــن S. ســـنبرهن الآن أن $\bigcup_{i\in I} L_i \in S$. بمـــا أن $L_i \subseteq L_j$ أو $L_j \subseteq L_i$ لكل $i, j \in I$ فإنه من الواضح أن $\bigcup_{i\in I} L_i \le G$. ومن الواضح أيضاً أن $H \cap \bigcup_{i\in I} L_i = \{0\}$، لأنه لـــو كان $x \in H \cap \bigcup_{i\in I} L_i$ فإنه يوجد $i \in I$ حيث $x \in H \cap L_i$. ولذا فـــإن $x = 0$. إذن، $\bigcup_{i\in I} L_i \in S$ حداً أعلى. وباستخدام تمهيدية زورن فإن S تحتوي علـــى عنـــصر أعظمـــي ولـــيكن K. وعليـــه فـــإن $H \cap K = \{0\}$. ومنـــه فـــإن $H + K = H \oplus K$. ولإنهـــاء البرهـــان يجـــب أن نثبـــت أن $G = H \oplus K$. ولغرض التناقض نفرض أن $G \ne H \oplus K$. إذن، $G/H \oplus K \ne \{0\}$. لاحـــظ أولاً أن $G/H \oplus K$ زمرة فتل، لأنه لو كان $x + H \oplus K \in G/H \oplus K$ ذي رتبة غـــير منتهيـــة فإن $x \notin K$. ولـــذا فإن $K < \langle K, x\rangle = K_1$. إذا كان $k_1 \in K$ فإن $k_1 = k + nx$ حيث $k \in K$ و $n \in \mathbb{Z}$. إذا كان $k_1 = k + nx \in H$ فإن $nx \in H + K$. إذن $n = 0$ هو الخيار الوحيد. ولذا فإن $k_1 = k \in H$. وبما أن $H \cap K = \{0\}$ فـــإن $k = 0$. إذن $H \cap K_1 = \{0\}$ وهـــذا ينـــاقض أعظمية K. وبالتالي فإن $G/H \oplus K$ زمرة فتل. لنفرض الآن أن $x \in G$ وأن $x \notin H \oplus K$. عندئذ، $\langle x + H \oplus K\rangle$ زمرة جزئية من $G/H \oplus K$ رتبتها منتهية ولتكن m. وعليه فإن $mx \in H \oplus K$، وأن $rx \notin H \oplus K$ لكل $0 < r < m$. لنفرض أن $mx = h + k$. بما أن H قابلة للقسمة فإنه يوجد $h_1 \in H$ حيـــــــث $mh_1 = h$. لنفـــــــرض أن $x_1 = x - h_1$. لاحـــــــظ أن $x_1 \notin K$ وأن $mx_1 = mx - mh_1 = h + k - h = k \in K$. وإذا وضعنا $K_1 = \langle x_1, K\rangle$ فإننا نجد أن:

$$K_1 = \{rx_1 + k : 0 \le r \le m - 1, \forall k \in K\}.$$

سنبرهن الآن أن $H \cap K_1 = \{0\}$. لأنه إذا كان $rx_1 + k \in H \cap K_1$ فإن $rx_1 + k \in H$ وإن $H \oplus K = rx_1 + (H \oplus K) = r(x_1 + H \oplus K)$. وبمـــا أن $x_1 + (H \oplus K) = x + (H \oplus K)$ فإن $r = 0$. إذن $k \in H$ ومنه فإن $k = 0$. إذن $H \cap K_1 = \{0\}$. وهذا يناقض أعظمية K. وبالتالي فإن $G = H \oplus K$ ◆

قبل أن نقدم المبرهنة التي تصنف لنا الزمر الإبدالية القابلة للقسمة يلزمنا بعض الحقائق التي نقدمها الآن.

مبرهنة (٦,٢٩)

إذا كانت G زمرة فتل وكانت P هي مجموعة الأعداد الأولية فإن $G = \sum_{p\in P} G(p)$.

البرهان

لنفرض أن $g \in G$ وأن $o(g) = n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_t^{k_t}$ حيث $p_1, p_2, \ldots, p_t$ أعداد أولية جميعها مختلفة.
سنبرهن باستخدام الاستقراء الرياضي على t أن $g = g_1 + g_2 + \ldots + g_t$ حيث $g_i \in G(p_i)$.
إذا كان $t = 1$ فإن العبارة واضحة. لنفرض أن العبارة صحيحة لجميع عناصر G التي رتبها أقل من n. ولنفرض أن $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_{t-1}^{k_{t-1}}$. بما أن $\gcd(m, p_t^{k_t}) = 1$ فإنه يوجد $a, b \in \mathbb{Z}$ حيث $1 = am + bp_t^{k_t}$. إذن، $g = amg + hp_t^{k_t} g$. الآن، $o(amg) = p_t^{k_t}$. ولذا فإن $amg \in G(p_t)$. وبما أن $o(bp_t^{k_t} g) = m$. فإننا نجد باستخدام الإستقراء الرياضي أن $bp_t^{k_t} g = g_1 + g_2 + \ldots + g_{t-1}$ حيث $g_i \in G(p_i)$. إذن،

$$g = g_1 + g_2 + \ldots + g_{t-1} + amg.$$

ولإتمام البرهان، نفرض أن $g_1 + g_2 + \ldots + g_n = 0$ حيث $g_i \in G(p_i)$. ونبرهن باستخدام الإستقراء الرياضي على n أن $g_i = 0$ لكل $1 \le i \le n$. من الواضح أن العبارة صحيحة عند $n = 1$. لنفرض أن العبارة صحيحة عند n. ولنفرض أن $g_1 + g_2 + \ldots + g_n + g_{n+1} = 0$ حيث $o(g_{n+1}) = p_{n+1}^k$.

إذن،

$p_{n+1}^k g_1 + p_{n+1}^k g_2 + \ldots + p_{n+1}^k g_{n+1} = 0$. ولذا فإن $p_{n+1}^k g_1 + p_{n+1}^k g_2 + \ldots + p_{n+1}^k g_n = 0$.
وباستخدام فرضية الإستقراء نجد أن $p_{n+1}^k g_i = 0$ لكل $1 \le i \le n$. وبما أن $o(g_i) = p_i^r$ حيث $p_i \ne p_{n+1}$ فإن $g_i = 0$ ◆

مبرهنة (٦,٣٠)

إذا كانت G زمرة إبدالية فإن G تحتوي على مجموعة جزئية مستقلة خطياً أعظمية.

البرهان

نستخدم تمهيدية زورن. لنفرض أن $P = \{S \subseteq G : \text{مستقلة خطياً } S\}$. ولتكن $L = \{S_i : i \in I\}$ سلسلة في P. ولنفرض أن $T = \bigcup_{i \in I} S_i$. من الواضح أن $T \subseteq G$. وسنبرهن الآن أن T مستقلة خطياً.

لنفرض إذن، أن $a_1, a_2, \ldots, a_n \in T$. وأن $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}$ حيث $t_1 a_1 + t_2 a_2 + \ldots + t_n a_n = 0$. بما أن L سلسلة فإنه يوجد $k \in \mathbb{Z}^+$ حيث $a_1, a_2, \ldots, a_n \in S_k$. وبما أن S_k مستقلة خطياً فإن $t_i = 0$ لكل $1 \le i \le n$. إذن، T مستقلة خطياً. ومن ثم $T \in P$ حداً

أعلى للسلسلة T . وباستخدام تمهيدية زورن فإن P تحتوي على عنصر أعظمي. أي تحتوي على مجموعة جزئية مستقلة خطياً أعظمية ◆

مبرهنة (٣,٣١)

لتكن $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ سلسلة تصاعدية من الزمر الدورية غير المنتهية حيث $A_i = \langle a_i \rangle$ وحيث $(i+1)a_{i+1} = a_i$. إذا كانت $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ فإن $G \cong (\mathbb{Q}, +)$.

البرهان

إذا كانت $\mathbb{Q}_i = \langle 1/i! \rangle$ فإنه من الواضح أن $\mathbb{Q}_1 \subseteq \mathbb{Q}_2 \subseteq \mathbb{Q}_3 \subseteq \ldots$ وأن $\mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}_i$. لنفرض الآن أن $\varphi : G \to \mathbb{Q}$ معرفاً بالقاعدة: $\varphi(ma_i) = \dfrac{m}{i!}$ حيث $m \in \mathbb{Z}$.

سنبرهن أولاً أن φ معرفاً تعريفاً حسناً. لنفرض إذن أن $m_1a_i = m_2a_j$ ولنفرض أن $i \leq j$. عندئذ، $a_i = \dfrac{j!}{i!}a_j$. ولذا فإن $m_2a_j = m_1a_i = m_1\dfrac{j!}{i!}a_j$. وعليه فإن $m_2 = m_1\dfrac{j!}{i!}$. أي أن $\dfrac{m_1}{i!} = \dfrac{m_2}{j!}$. وبالتالي فإن $\varphi(m_1a_i) = \varphi(m_2a_j)$.

سنبرهن الآن أن φ تشاكل. لنفرض إذن إن $g, h \in G$. عندئذ، يوجد i حيث $g, h \in A_i$. ولذا فإن $g = m_1a_i$ و $h = m_2a_i$. ومنه فإن:

$$\varphi(g+h) = (m_1+m_2)\frac{1}{i!} = \frac{m_1}{i!} + \frac{m_2}{i!} = \varphi(g) + \varphi(h) .$$

بما أن $\varphi(A_i) = \mathbb{Q}_i = \langle 1/i! \rangle$ فإن $\varphi(G) \supseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}_i = \mathbb{Q}$. ولذا فإن φ شامل.

وأخيراً إذا كانت $g = ma_i \in \mathrm{Ker}\varphi$ فإن:

$$g \in \mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(g) = 0 \Rightarrow \frac{m}{i!} = 0 \Rightarrow m = 0 .$$

إذن، $g = 0$. وبالتالي فإن φ أحادي ونخلص إلى أن $G \cong \mathbb{Q}$ ◆

مبرهنة (٦,٣٢)

إذا كانت G زمرة قابلة للقسمة فإن $T(G)$ زمرة قابلة للقسمة أيضاً وأن $G = T(G) \oplus F$ حيث F

زمرة عديمة الفتل وقابلة للقسمة.

البرهان

لنفرض أن $y \in T(G)$ وأن $n \in \mathbb{Z}^+$. بما أن G قابلة للقسمة فإنه يوجد $x \in G$ حيث $nx = y$.
وبما أن $o(y) < \infty$ فإن $o(x) < \infty$. إذن $x \in T(G)$. وبالتالي فإن $T(G)$ قابلة للقسمة.
الآن باستخدام المبرهنة (٦,٢٨) ، نستطيع إيجاد زمرة جزئية F من G حيث $G = T(G) \oplus F$. وبما أن $T(G) \cap F = \{0\}$ فإن $G/T(G) \cong F$. وباستخدام المبرهنة (٦,١٨) ، نجد أن F عديمة الفتل.
وأخيراً بما أن G قابلة للقسمة فإنه باستخدام المبرهنة (٦,٢٦) ، نجد أن $G/T(G)$ قابلة للقسمة.
وبالتالي فإن F قابلة للقسمة ◆

مبرهنة (٦,٣٣)

إذا كانت F زمرة إبدالية قابلة للقسمة وعديمة الفتل فإن $F = \sum_{s \in S} A_s$ حيث $A_s \cong \mathbb{Q}$ لكل $s \in S$.

البرهان

باستخدام المبرهنة (٦,٣٠)، نجد أن F تحتوي على مجموعة جزئية مستقلة خطياً أعظمية ولتكن S.
لنفرض أن $s \in S$. نعرف الآن استقرائياً العناصر $r_{i,s}$ حيث $i \in \mathbb{Z}^+$ كالتالي:
$r_{1,s} = s$ و $r_{i+1,s}$ هو العنصر الذي يحقق $(i+1)r_{i+1,s} = r_{i,s}$ (لاحظ أن $r_{i+1,s}$ نحصل عليه باستخدام قابلية القسمة للزمرة F).
لنفرض الآن أن $B_i = \langle r_{i,s} \rangle$. إذن $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subset \ldots$ حيث $(i+1)r_{i+1,s} = r_{i,s}$. ولـذا فإنـه باستخدام المبرهنة (٦,٣١) نجد أن $A_s = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \cong \mathbb{Q}$. لنفـرض أن $G = \sum_{s \in S} A_s$. سـنبرهن الآن أن $F = G$. بما أن A_s زمرة قابلة للقسمة فإن G زمرة جزئية من F قابلة للقسمة. إذن، باستخدام المبرهنة (٦,٢٨) ، توجد زمرة جزئية K من F حيث $F = G \oplus K$. إذا كانـت $K \neq \{0\}$ فإنـه يوجد $0 \neq k \in K$. وبما أن $k \notin S$ فإن $S \cup \{k\}$ مجموعة مستقلة خطياً. وهذا يناقض أعظميـة S.
إذن، $K = \{0\}$. وبالتالي فإن $F = G = \sum_{s \in S} A_s$ ◆

مبرهنة (٦,٣٤)

إذا كانت T زمرة إبدالية قابلة للقسمة من النوع p فإن T مجموع مباشر لزمر كل منها تماثل $\mathbb{Z}(p^{\infty})$.

البرهان

لنفرض أن $H = \{x \in T : o(x) \leq p\}$. من الواضح أن $H \leq T$. لنفرض أن $S \subseteq H$ مجموعة مستقلة خطياً أعظمية. وليكن $s \in S$. ولنفرض أن $\{b_{i,s}\}$ هي المتتالية المعرفة كالتالي: $pb_{1,s} = s$ و $pb_{i+1,s} = b_{i,s}$ لكل $i \geq 1$. (لاحظ أننا نحصل على العناصر $b_{i+1,s}$ باستخدام قابلية القسمة للزمرة T). لنفرض الآن أن $B_i = \langle b_{i,s} \rangle$. من الواضح أن $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \ldots$. باستخدام المبرهنة (٦,٢٥) ، نجد أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = A_S \cong \mathbb{Z}(P^\infty)$. لنفرض أن $G = \sum_{s \in S} A_s$. بما أن A_s قابلة للقسمة فإن G زمرة جزئية من T قابلة للقسمة. إذن، باستخدام المبرهنة (٦,٢٨) توجد زمرة جزئية K من T بحيث يكون $T = G \oplus K$. إذا كانت $K \neq \{0\}$ فإنه يوجد $k \in K$ حيث $o(k) = p$. ولذا فإن $S \cup \{k\}$ مجموعة مستقلة خطياً. وهذا يناقض أعظمية S . إذن، $K = \{0\}$. وبالتالي فإن $T = G = \sum_{s \in S} A_s$ ◆

مبرهنة (٦,٣٥)

إذا كانت T زمرة فتل قابلة للقسمة فإن T مجموع مباشر لزمر كل منها تماثل $\mathbb{Z}(P^\infty)$.

البرهان

باستخدام المبرهنة (٢,٢٩) ، نجد أن $T = \sum_{p \in P} T(p)$ حيث P هي مجموعة الأعداد الأولية. وبما أن T قابلة للقسمة فإن $T(p)$ قابلة للقسمة لكل $p \in P$. وباستخدام المبرهنة (٦,٣٤) ، نجد أن $T(p)$ مجموع مباشر لزمر كل منها تماثل $\mathbb{Z}(P^\infty)$. إذن، T مجموع مباشر لزمر كل منها تماثل $\mathbb{Z}(P^\infty)$ ◆

لدينا الآن جميع المعلومات اللازمة لتصنيف الزمر الإبدالية القابلة للقسمة.

مبرهنة (٦,٣٦)

إذا كانت G زمرة إبدالية قابلة للقسمة فإن $G = \sum_{i \in I} A_i$ حيث $A_i \cong \mathbb{Q}$ أو $A_i \cong \mathbb{Z}(P^\infty)$ لكل $i \in I$.

البرهان

باستخدام المبرهنة (٦,٣٢) ، نجد أن $G = T(G) \oplus F$ حيث F زمرة عديمة الفتل وقابلة للقسمة.

وباستخدام المبرهنة (٦,٣٣) ، نجد أن F مجموع مباشـــر لزمر كل منها تماثل $\mathbb{Q}$. وباستخدام المبرهنة (٦,٣٥) ، فإن $T(G)$ مجموع مباشر لزمر تماثل كل منها تماثل $\mathbb{Z}(P^{\infty})$ ◆

ملحوظة

نلفت إنتباه القارئ إلى أن عوامل الجمع المباشر في المبرهنة (٦,٣٦) ليست وحيدة ولكن الوحيد هـــو عدد الزمر من كل نوع، والقارئ المهتم بمسألة الوحدانية عليه الرجوع [13] .

٦,٣,١) تمارين محلولة (Solved Exercies)

تمرين (١)

لتكن G زمرة إبدالية . نقول إن G زمرة مختزلة **(reduced group)** إذا كانت الزمرة الجزئيـــة القابلة للقسمة هي فقط الزمرة التافهة $\{0\}$. أثبت أن جميع الزمر الجزئية الفعلية من $\mathbb{Q}$ هي زمـــرة مختزلة .

الحل

لنفرض أن H زمرة جزئية غير مختزلة من $\mathbb{Q}$. سنبرهن أن $H = \mathbb{Q}$. بما أن H غير مختزلـــة فإنـــه توجد $\{0\} \neq D \leq H$ بحيث أن D قابلـــة للقســـمة. لنفـــرض أن $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ ، $y \neq 0$. بمـــا أن $D \neq \{0\}$ فإنه يوجد $\frac{a}{b} \in D$ حيث $a \neq 0$. وعليه فإن $ay \neq 0$. وبما أن D قابلة للقسمة فإنه يوجد $t \in D$ بحيث يكون $(ay)t = \frac{a}{b}$. ومنه فإن $t = (\frac{a}{b})(\frac{1}{ay}) = \frac{1}{by}$. وبما أن $t \in D$ فـــإن $(xb)t \in D$. ولذا فإن $(xb)(\frac{1}{by}) = \frac{x}{y} \in D$. وبالتالي فإن $\mathbb{Q} \subseteq D$. أي أن $\mathbb{Q} \subseteq H$. وعليه فإن $\mathbb{Q} = H$ Δ

تمرين (٢)

لـــتكن G زمـــرة إبداليـــة ولـــتكن $H \leq G$. نقـــول إن H زمـــرة جزئيـــة نقيـــة مـــن G **(pure subgroup of G)** إذا كان $nH = H \cap nG$ لكل $n \in \mathbb{Z}^{+}$. كما نقول إن الزمرة G

زمرة نقية بسيطة **(pure simple group)** إذا كانت زمر G الجزئية النقية هي فقط $\{0\}$ و G.
أثبت أن $\mathbb{Z}(p^\infty)$ زمرة نقية بسيطة.

الحل

لنفرض أن $\{0\} < H < \mathbb{Z}(p^\infty)$. سنبرهن أن H ليست نقية. إستناداً إلى المبرهنة (٦,٢٥) يوجد $n \in \mathbb{Z}^+$ حيث $H = H_n = \langle \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \rangle$. لنفرض لغرض التناقض أن H نقية. عندئذ، $p^n\mathbb{Z}(p^\infty) \cap H_n = p^n H_n$. ولكن $p^n\mathbb{Z}(p^\infty) = \mathbb{Z}(p^\infty)$. ولذا فإن $H_n = p^n H_n$. وعليه فإنه يوجد $k \in \mathbb{Z}^+$ حيث $\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} = p^n(\frac{k}{p^n} + \mathbb{Z})$. ومنه فإن $\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} = k + \mathbb{Z}$. أي أن $\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. وبالتالي فإن $\frac{1}{p^n} \in \mathbb{Z}$ وهذا مستحيل لأن $n \neq 0$ ونخلص إلى أن H ليست زمرة جزئية نقية Δ

تمارين (٦,٣)

(١) إذا كانت $G = \sum_{i \in I} G_i$ حيث G_i زمرة من النوع p فأثبت أن G زمرة من النوع p.

(٢) إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر عديمة الفتل فأثبت أن كلاً من $\prod_{i \in I} G_i$ و $\sum_{i \in I} G_i$ زمرة عديمة الفتل.

(٣) إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الإبدالية فأثبت أن $T\left(\sum_{i \in I} G_i\right) = \sum_{i \in I} T(G_i)$.

(٤) إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الإبدالية فأثبت أن :

$$\sum_{i \in I} G_i / \sum_{i \in I} T(G_i) \cong \sum_{i \in I} G_i / T(G_i).$$

(٥) إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الإبدالية وكان $n \in \mathbb{Z}^+$ فأثبت أن $\sum_{i \in I} nG_i = n\sum_{i \in I} G_i$.

(٦) إذا كانت P مجموعة الأعداد الأولية فأثبت أن $\prod_{p \in P} G(p) / \sum_{p \in P} G(p)$ زمرة قابلة للقسمة.

(٧) إذا كانت $S \subseteq \mathbb{Z}(p^\infty)$ مستقلة خطياً فأثبت أن $|S| = 1$.

(٨) إذا كانت G زمرة غير إبدالية فأثبت أن G تحتوي على زمرة إبدالية جزئية أعظمية.

(٩) أثبت أن $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \sum_{p\in P}\mathbb{Z}(p^\infty)$ حيث P هي مجموعة الأعداد الأولية. ثم استنتج أن $\mathbb{Z}(p^\infty)$ قابلة للقسمة.

(١٠) إذا كانت G زمرة من النوع p حيث p عدداً أولياً فأثبت أن $G \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ إذا وفقط إذا كانت G تحقق الشرطين التاليين:

(أ) جميع الزمر الجزئية الفعلية من G زمر دورية.

(ب) لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ توجد زمر جزئية دورية من G رتبتها p^n.

(١١) إذا كانت H زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{C}^*,.)$ تحتوي على جميع جذور الوحدة من النوع n فأثبت أن $H \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(١٢) إذا كانت G زمرة إبدالية حرة فأثبت أن G تماثل زمرة إبدالية قابلة للقسمة.

(١٣) إذا كانت G زمرة إبدالية فأثبت أن G تماثل زمرة جزئية من زمرة إبدالية قابلة للقسمة.

(١٤) إذا كانت G زمرة إبدالية حيث G عامل جمع مباشر لكل زمرة $G \subseteq H$ فأثبت أن G قابلة للقسمة.

(١٥) أثبت أن الزمرة $\mathbb{Q}$ تحتوي على زمرة جزئية فعلية H حيث H ليست زمرة إبدالية حرة.

(١٦) إذا كانت G زمرة عديمة الفتل حيث كل زمرة جزئية فعلية من G هي زمرة إبدالية حرة فأثبت أن G زمرة إبدالية حرة.

(١٧) أثبت أن كل من الزمر الإبدالية التالية مختزلة:

(أ) $\mathbb{Q}_p = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : \gcd(a,b) = 1\right\}$ حيث p عدداً أولياً.

(ب) $\mathbb{Q}^p = \left\{\frac{a}{p^n} : \frac{a}{p^n} \in \mathbb{Q}\right\}$ حيث p عدداً أولياً.

(١٨) إذا كانت G زمرة إبدالية وكانت $S = \{H_i \leq G : H_i$ قابلة للقسمة$\}$ فأثبت أن $H = \langle S\rangle$ زمرة جزئية من G قابلة للقسمة.

(١٩) إذا كانت G زمرة إبدالية فأثبت أن $G = H \oplus K$ وحيث H قابلة للقسمة و K مختزلة.

(٢٠) إذا كانت G زمرة إبدالية حيث $G = H \oplus K$ وكانت $H < D < G$ فأثبت أن $D = H \oplus (K \cap D)$.

(٢١) إذا كانت G زمرة إبدالية حيث $G = H \oplus K$ ، H قابلة للقسمة ، K مختزلة فأثبت أن H زمرة جزئية أعظمية قابلة للقسمة من G.

(٢٢) إذا كانت $G = H \oplus K$ حيث H قابلة للقسمة و K مختزلة فأثبت أن H وحيدة.

(٢٣) إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الإبدالية المختزلة فأثبت أن $\prod_{i \in I} G_i$ زمرة مختزلة.

(٢٤)إذا كانت كل من G و H زمرة إبدالية قابلة للقسمة وكان $G \oplus G \cong H \oplus H$ فأثبت أن $G \cong H$.

(٢٥) إذا كانت كل من G و H و K زمرة إبدالية قابلة للقسمة حيث $G \oplus H \cong G \oplus K$ فأثبت أن $H \cong K$.

(٢٦) نقول إن الزمر الإبدالية D زمرة تباينية **(injective group)** إذا كـان لكـل تـشاكل أحادي $\alpha : A \to B$ وكل تشاكل $\varphi : A \to D$ يوجد تشاكل $\psi : B \to D$ حيث $\psi \circ \alpha = \varphi$.

إذا كانت D زمرة إبدالية فأثبت أن العبارات التالية متكافئة:

(أ) D قابلة للقسمة.

(ب) D زمرة تباينية.

(ج) لكل زمرة إبدالية $D \subseteq G$ يوجد زمرة جزئية K من G حيث $G = D \oplus K$.

[إرشاد: استخدم تمهيدية زورن والتمرينين ١٣و١٤] .

(٢٧) أثبت أن جميع الزمر الجزئية من $\mathbb{Q}$ هي زمر نقية بسيطة.

(٢٨) إذا كانت G زمرة إبدالية فأثبت أن $T(G)$ زمرة جزئية نقية من G.

(٢٩) إذا كانت G زمرة إبدالية فأثبت أن أي عامل جمع مباشر من G زمرة جزئية نقية من G.

(٣٠) إذا كانت G زمرة إبدالية و H زمرة جزئية من G حيث G/H عديمة الفتل فأثبـت أن H نقية من G.

(٣١)إذا كانت G زمرة إبدالية عديمة الفتل وكانت $\{H_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر الجزئية النقية من G فأثبت أن $\bigcap_{i \in I} H_i$ زمرة جزئية نقية من G.

(٣٢)إذا كانت G زمرة إبدالية وكان $H \leq K \leq G$ حيث H نقية من K و K نقية من G فأثبت أن H نقية من G.

(٣٣)إذا كانت G زمرة إبدالية وكان $H \leq K \leq G$ وكانت K نقية من G فأثبت أن K/H نقية من G/H.

(٣٤) إذا كانت G زمرة إبدالـــية وكان $H \leq K \leq G$ وكـــانت H نقية من G و K/H نقية من G/H فأثبت أن K نقية من G.

(٣٥)أثبت أن $\mathbb{Z}(p^\infty)$ غير قابلة للإختزال جزئياً.

الفصل السابع

الزمر القابلة للحل والزمر المتلاشية
SOLVABLE AND NILPOTANT GROUPS

(٧,١) سلاسل الزمر
Series of Groups

لتكن G زمرة منتهية. إذا كانت G ليست بسيطة فإننا نستطيع إيجاد زمرة جزئية ناظمية فعلية غير تافهة H_{n-1} من G. وإذا كانت H_{n-1} ليست بسيطة فإننا نستطيع أن نجد زمرة جزئية ناظمية فعلية غير تافهة H_{n-2} من H_{n-1}. وبالإستمرار على هذا المنوال نحصل على سلسلة $\{e\} = H_0 \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = G$. إن هذا يقودنا إلى التعريف التالي :

تعريف (٧,١)

لتكن G زمرة ولتكن $\{e\} = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_{n-1} \le H_n = G$ سلسلة من زمر G الجزئية.

(أ) نقول إن السلسلة ناظمية جزئياً (**subnormal series**) إذا كانت $H_{i-1} \lhd H_i$ لكل $1 \le i \le n$.

(ب) إذا كانت $H \le G$ فإننا نقول إن الزمرة H زمرة ناظمية جزئياً (**subnormal group**) من الزمرة G إذا كانت H حداً في سلسلة ناظمية جزئياً للزمرة G.

(ج) نقول إن السلسلة ناظمية (**normal series**) إذا كانت $H_i \lhd G$ لكل $0 \le i \le n-1$.

(د) نقول إن السلسلة الناظمية جزئياً هي سلسلة تركيبية (**composition series**) إذا كانت H_i/H_{i-1} زمرة بسيطة غير تافهة (أي أن H_{i-1} زمرة جزئية أعظمية من H_i) لكل $1 \le i \le n$.

(هـ) نقول إن السلسلة الناظمية هي سلسلة رئيسة (**principal series**) إذا كانت H_i/H_{i-1} زمرة بسيطة غير تافهة لكل $1 \le i \le n$.

(و) تسمى زمر خارج القسمة H_i/H_{i-1} عوامل (**factors**) السلسلة.

(ي) طول السلسلة هو عدد العوامل غير التافهة.

ملحوظات

(١) في الزمر الإبدالية تتطابق السلاسل الناظمية جزئياً والناظمية.

(٢) من الواضح أن السلسلة الناظمية هي سلسلة ناظمية جزئياً (ولذا فإن الزمرة الجزئية الناظمية هي زمرة جزئية ناظمية جزئياً) ولكن العكس ليس بالضرورة صحيحاً، فمثلاً ، السلسلة $\{e\} \le H_1 \le H_2 \le A_4$ حيث $H_2 = \{e,(1\ 2)\circ(3\ 4),(1\ 3)\circ(2\ 4),(1\ 4)\circ(2\ 3)\}$ و $H_1 = \{e,(1\ 2)\circ(3\ 4)\}$ سلسلة ناظمية جزئياً ولكنها ليست ناظمية لأن H_1 زمرة جزئية من A_4 ولكنها ليست ناظمية من A_4.

(٣) من الواضح أن السلسلة الرئيسة يجب أن تكون تركيبية ولكن العكس ليس بالضرورة صحيحاً.

(٤) من الواضح أن $\{e\} \subseteq G$ سلسلة ناظمية لأي زمرة G.

(٥) من الواضح أنه يوجد سلسلة تركيبية لكل زمرة منتهية G. أما إذا كانت G زمرة غير منتهية فإنه ليس من الضروري أن يكون لها سلسلة تركيبية. فمثلاً، كل زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$ زمرة دورية وكل زمرة جزئية دورية $\langle k\rangle$ من $\mathbb{Z}$ تحتوي على عدد غير منته من الزمر الجزئية ، بالتحديد :

$$\langle k\rangle > \langle 3k\rangle > \langle 6k\rangle > \langle 12k\rangle > \dots$$

(٦) إذا كانت $n \in \mathbb{Z}^+$ فإننا نستطيع دائماً أن نجد زمرة G وسلسلة تركيبية للزمرة G طولها n. على سبيل المثال، إذا كان p عدداً أولياً وكانت $H_i \cong \mathbb{Z}_p$ لكل $1 \le i \le n$ فإن:

$$\{e\} \lhd H_1 \lhd H_1 \times H_2 \lhd H_1 \times H_2 \times H_3 \lhd \dots \lhd G$$

سلسلة تركيبية للزمرة $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ طولها n.

(٧) إذا كانت G زمرة فإنه من الممكن أن يكون للزمرة G أكثر من سلسلة تركيبية واحدة من الطول نفسه. فمثلاً ، كل من السلاسل التالية تركيبية طولها 3 للزمرة $\mathbb{Z}_{12}$:

$$\langle[0]\rangle \le \langle[6]\rangle \le \langle[3]\rangle \le \mathbb{Z}_{12}$$

$$\langle[0]\rangle \le \langle[4]\rangle \le \langle[2]\rangle \le \mathbb{Z}_{12}$$

$$\langle[0]\rangle \le \langle[6]\rangle \le \langle[2]\rangle \le \mathbb{Z}_{12}.$$

تعريف (٧,٢)

لنفرض أن G زمرة وأن : $\{e\} = H_0 \le H_1 \le H_2 \le \dots \le H_{n-1} \le H_n = G \qquad (1)$

سلسلة ناظمية جزئياً للزمرة G.

(أ) نقول إن السلسلة : $\{e\} = H_0 \le H_1 \le \dots \le H_{i-1} \le H \le H_i \le \dots \le H_{n-1} \le H_n = G$

سلسلة أدق من السلسلة (1) بخطوة واحدة **(one-step refinement)** إذا كان $H_{i-1} \lhd H \lhd H_i$.

(ب) نقول إن سلسلة ناظمية جزئياً: $\{e\} = K_0 \le K_1 \le K_2 \le \ldots \le K_{m-1} \le K_m = G$ هي سلسلة أدق **(refinement)** من السلسلة (1) إذا حصلنا عليها من السلسلة (1) بعدد منته من الخطوات . أي أن : $\{H_0, H_1, \ldots H_n\} \subseteq \{K_0, K_1, \ldots, K_m\}$.

(ج) إذا كانت : $$\{e\} = K_0 \le K_1 \le \ldots \le K_{m-1} \le K_m = G \qquad (2)$$

سلسلة أدق من السلسلة (1) فإننا نقول إنها أدق فعلياً **(proper refinement)** إذا وجدت زمرة جزئية K_j في السلسلة (2) حيث $K_j \ne H_i$ لكل $0 \le i \le n$. أي أن :

$\{H_0, H_1, \ldots, H_n\} \subset \{K_0, K_1, \ldots, K_m\}$.

مثال (٧,١)

السلسلة $\{0\} \le 24\mathbb{Z} \le 12\mathbb{Z} \le 6\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$ أدق بخطوة واحدة من السلسلة $\{0\} \le 24\mathbb{Z} \le 12\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$. أما السلسلة $\{0\} \le 48\mathbb{Z} \le 24\mathbb{Z} \le 12\mathbb{Z} \le 6\mathbb{Z} \le 3\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$ فهي أدق بخطوتين □

مثال (٧,٢)

السلسلة $\langle[0]\rangle \le \langle[6]\rangle \le \langle[3]\rangle \le \mathbb{Z}_{12}$ أدق من السلسلة $\langle[0]\rangle \le \langle[3]\rangle \le \mathbb{Z}_{12}$ ولكن السلسلة $\langle[0]\rangle \le \langle[2]\rangle \le \mathbb{Z}_{12}$ فهي ليست أدق □

مبرهنة (٧,١)

إذا كانت $$\{e\} = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_n = G \qquad (3)$$

سلسلة ناظمية جزئياً فإنها تركيبية إذا وفقط إذا لم توجد سلسلة أدق منها فعلياً.

البرهان

لنفرض أولاً أن السلسلة (3) تركيبية. ولنفرض أن :

$$\{e\} = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_{i-1} \le H \le H_i \le \ldots \le H_{n-1} \le H_n = G \qquad (4)$$

سلسلة أدق من (3) بخطوة واحدة . بما أن (3) تركيبية فإن H_{i-1} زمرة جزئية ناظمية أعظمية من H_i . إذن، $H_{i-1} = H$ أو $H_i = H$. وبالتالي فإن السلسلة (4) ليست أدق فعلياً من السلسلة (3) . ولبرهان العكس، لنفرض أنه لا توجد سلسلة أدق فعلياً من السلسلة (3) . ولنفرض لغرض التناقض أن

(3) ليست تركيبية. عندئذ ، توجد H_{i-1} زمرة جزئية من (3) بحيث تكون H_{i-1} ليست أعظمية من H_i. إذن توجد H حيث $H \neq H_{i-1}$ و $H \neq H_i$. ولذا فإنه توجد سلسلة أدق فعلياً من (3) وهذا تناقض. إذن، السلسلة (3) تركيبية ◆

تعريف (٧,٣)

نقول إن السلسلتين الناظمتين جزئياً:

$$\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_{n-1} \leq H_n = G \qquad (5)$$

$$\{e\} = K_0 \leq K_1 \leq \ldots \leq K_{m-1} \leq K_m = G \qquad (6)$$

متكافئتان **(equivalent)** إذا كان $m = n$ ويوجد تقابل بين عوامل (5) غير التافهة وعوامل (6) غير التافهة بحيث تكون العوامل المتقابلة متماثلة.

مثال (٧,٣)

السلسلتان $\langle[0]\rangle \leq \langle[6]\rangle \leq \langle[3]\rangle \leq \mathbb{Z}_{12}$ و $\langle[0]\rangle \leq \langle[4]\rangle \leq \langle[2]\rangle \leq \mathbb{Z}_{12}$ متكافئتان لأن طول كل منهما 3 وأن عوامل السلسلة الأولى هي :

$$\mathbb{Z}_{12}/\langle[3]\rangle \cong \mathbb{Z}_3 \ , \ \langle[3]\rangle/\langle[6]\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \ , \ \langle[6]\rangle/\langle[0]\rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

وعوامل السلسلة الثانية هي :

$$\mathbb{Z}_{12}/\langle[2]\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \ , \ \langle[2]\rangle/\langle[4]\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \ , \ \langle[4]\rangle/\langle[0]\rangle \cong \mathbb{Z}_3$$

ولذا فإنه يوجد تقابل بين العوامل والعوامل المتقابلة متماثلة □

المبرهنة التالية تعرف بتمهيدية زازنهاوس **(Zassenhaus lemma)** وتعرف أحياناً بتمهيدية الفراشة **(betterfly lemma)** لأن الشكل المصاحب للتمهيدية يشبه الفراشة.

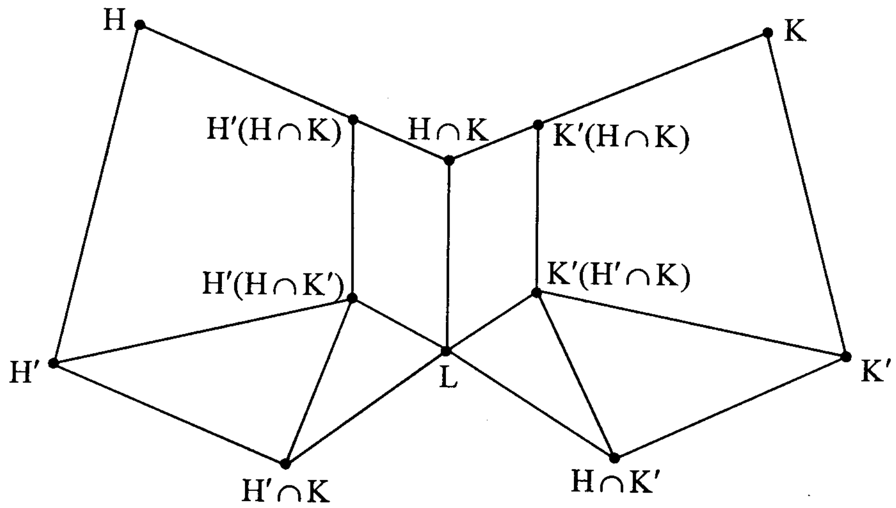
مبرهنة (٧,٢) [تمهيدية زازنهاوس]

إذا كانت كل من H ، H' ، K ، K' زمرة جزئية من زمرة G حيث $H' \lhd H$ و $K' \lhd K$ فإن :

(أ) $H'(H \cap K') \lhd H'(H \cap K)$

(ب) $K'(H' \cap K) \lhd K'(H \cap K)$

(ج) $H'(H \cap K)/H'(H \cap K') \cong K'(H \cap K)/K'(H' \cap K)$.



البرهان

(أ) إذا كان $a \in H \cap K'$ و $b \in H \cap K$ فإن $a \in K'$ و $b \in K$. وبما أن $K' \lhd K$ فـإن $bab^{-1} \in K'$. أيضاً $a, b \in H$. ولذا فإن $bab^{-1} \in H$. إذن ، $bab^{-1} \in H \cap K'$. ولذا فـإن $H \cap K' \lhd H \cap K$. وبالتالي فإن $H'(H \cap K') \lhd H'(H \cap K)$.

(ب) مماثل لبرهان الفقرة (أ).

(ج) لنفرض أن $L = (H \cap K')(H' \cap K)$. بما أن كل من $H' \cap K$ و $H \cap K'$ زمرة جزئية ناظمية من $H \cap K$ فإن $L \lhd H \cap K$. لـيكن $(H \cap K)/L \leftarrow \varphi : H'(H \cap K)$ التطبيـق المعرف بالقاعدة $\varphi(h'b) = bL$ لكل $h' \in H$ وكل $b \in H \cap K$.

سنبرهن الآن أن φ حسن التعريف. ولهذا الغرض نفرض أن $h_1 b_1 = h_2 b_2$ حيث $h_1, h_2 \in H'$ و $b_1, b_2 \in H \cap K$. عندئذ :

$$h_2^{-1} h_1 = b_2 b_1^{-1} \in H' \cap (H \cap K) = H' \cap K \subseteq L$$

ولذا فإن $b_1 L = b_2 L$. أي أن $\varphi(h_1 b_1) = \varphi(h_2 b_2)$.

ولإثبات أن φ تشاكل نفرض أن $h_1 b_1, h_2 b_2 \in H'(H \cap K)$. بمـا أن $H' \lhd H$ فإنـه يوجـد $h_3 \in H$ حيث $b_1 h_2 = h_3 b_1$. ومنه فإن :

$$\varphi(h_1 b_1 h_2 b_2) = \varphi(h_1 h_3 b_1 b_2) = (b_1 b_2)L = (b_1 L)(b_2 L) = \varphi(h_1 b_1)\varphi(h_2 b_2)$$

من الواضح أن φ شامل. وأخيراً ، إذا كان $h \in H'$ و $b \in H \cap K$ فإن :

$$\varphi(hb) = bL = L \Leftrightarrow b \in L \Leftrightarrow hb \in H'L$$

ولكن $H'L = H'(H' \cap K)(H \cap K') = H'(H \cap K')$. إذن ، $\operatorname{Ker}\varphi = H'(H \cap K')$.
وباستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن $(H \cap K)/L \cong H'(H \cap K)/H'(H \cap K')$.
وبطريقة مماثلة تماماً نجد أن : $(H \cap K)/L \cong K'(H \cap K)/K'(H' \cap K)$. وبالتالي فإن :
$$H'(H \cap K)/H'(H \cap K') \cong K'(H \cap K)/K'(H' \cap K) \quad \blacklozenge$$

مبرهنة (٧,٣) [شراير (Schreier)]

إذا كانت :

$$\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_{n-1} \leq H_n = G \qquad (7)$$
$$\{e\} = K_0 \leq K_1 \leq \ldots \leq K_{m-1} \leq K_m = G \qquad (8)$$

سلسلتين ناظميتين جزئياً للزمرة G فإن توجد سلسلتان أدق منهما ومتكافئتين.

البرهان

لكل $0 \leq i \leq n-1$ لدينا :

$$H_i = H_i(H_{i+1} \cap K_0) \leq H_i(H_{i+1} \cap K_1) \leq \ldots \leq H_i(H_{i+1} \cap K_m) = H_{i+1} .$$

أي أننا أدخلنا العدد $m-1$ من الزمـــر (ليـــست جميعهـــا مختلفـــة) بـــين H_i و H_{i+1} لكـــل $0 \leq i \leq n-1$. وبوضع $H_{i,j} = H_i(H_{i+1} \cap K_j)$ لكل $0 \leq i \leq n-1$ وكل $0 \leq j \leq m$ فإننا نحصل على السلسلة:

$$\begin{aligned} \{e\} = H_{0,0} &\leq H_{0,1} \leq H_{0,2} \leq \ldots \leq H_{0,m-1} \leq H_{1,0} \\ &\leq H_{1,1} \leq H_{1,2} \leq \ldots \leq H_{1,m-1} \leq H_{2,0} \\ &\leq H_{2,1} \leq H_{2,2} \leq \ldots \leq H_{2,m-1} \leq H_{3,0} \\ &\leq \ldots \\ &\leq H_{n-1,1} \leq H_{n-1,2} \leq \ldots \leq H_{n-1,m-1} \leq H_{n-1,m} = G \end{aligned} \qquad (9)$$

لاحظ أن السلسلة (9) تحتوي على $mn+1$ زمرة (ليست بالضرورة مختلفـــة) وأن $H_{i,0} = H_i$.
وباستخدام تمهيدية زازنهاوس نجد أن السلسلة (9) ناظمية جزئياً وأنها أدق مـــن السلـــسلة (7) .
وبصورة مماثلة إذا وضعنا $K_{j,i} = K_j(K_{j+1} \cap H_i)$ لكل $0 \leq j \leq m-1$ وكل $0 \leq i \leq n$ نحصل على السلسلة الناظمية جزئياً (10) والتي تحتوي على $mn+1$ زمرة (ليست بالضرورة مختلفة) وأن $K_{j,0} = K_j$ حيث (10) أدق من (8) .

$$\begin{aligned} \{e\} = K_{0,0} &\leq K_{0,1} \leq K_{0,2} \leq \ldots \leq K_{0,n-1} \leq K_{1,0} \\ &\leq K_{1,1} \leq K_{1,2} \leq \ldots \leq K_{1,n-1} \leq K_{2,0} \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\leq K_{2,1} \leq K_{2,2} \leq \ldots \leq K_{2,n-1} \leq K_{3,0}$$
$$\leq \ldots$$
$$\leq K_{m-1,1} \leq K_{m-1,2} \leq \ldots \leq K_{m-1,n-1} \leq K_{m-1,n} = G$$

الآن ، بإستخدام تمهيدية زازنهاوس نجد أن :

$$H_{i,j+1} / H_{i,j} \cong H_i(H_{i+1} \cap K_{j+1}) / H_i(H_{i+1} \cap K_j)$$
$$\cong K_j(K_{j+1} \cap H_{i+1)}) / K_j(K_{j+1} \cap H_i)$$
$$\cong K_{j,i+1} / K_{j,i}$$

ولذا فإن السلسلتين (9) و (10) متكافئتان ◆

المبرهنة التالية تسمى مبرهنة جوردان وهولدر **(Jordan-Holder theorem)**.

مبرهنة (٧,٤) [جوردن وهولدر]

أي سلسلتين تركيبيتين لزمرة G متكافئتان.

البرهان

لنفرض أن $\{H_i\}$ و $\{K_j\}$ سلسلتين تركيبيتين للزمرة G. بإستخدام مبرهنة شراير نستطيع إيجاد سلسلتان أدق منهما ومتكافئتان. وبما أن السلسلة التركيبية ليس لها سلسلة أدق منها فعلياً فإن أي سلسلة تركيبية تكافئ أي سلسلة أدق منها. ولذا فإن $\{H_i\}$ و $\{K_j\}$ متكافئتان ◆

بما أنه يوجد سلسلة تركيبية لأي زمرة منتهية فإننا نحصل على النتيجة التالية :

نتيجة (٧,٥)

أي سلسلتين تركيبيتين لزمرة منتهية G يجب أن تكونا متكافئتين ◆

ملحوظة

استناداً إلى مبرهنة جوردان وهولدر يكون من الواضح أنه إذا كان للزمرة G سلسلة تركيبية طولها n فإن طول أي سلسلة تركيبية أخرى للزمرة G يجب أن يكون n أيضاً وأن عوامل سلسلة تركيبية للزمرة G هي نفس العوامل في أي سلسلة تركيبية أخرى. ولذا فإننا نسمي زمر خارج القسمة لأي سلسلة تركيبية العوامل التركيبية **(composition factors)**. وبالتالي فإن أي زمرة تحدد لنا تماماً عواملها التركيبية ولكن العكس ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً وهذا ما يوضحه المثال التالي :

مثال (٧,٤)
العوامل التركيبية لكل من الزمرتين S_3 و $\mathbb{Z}_6$ هـــي $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_3$ لأن $\{e\} \le \mathbb{Z}_3 \le \mathbb{Z}_6$ سلـــسلة تركيبية للزمرة $\mathbb{Z}_6$ وأن $\{e\} \le \mathbb{Z}_3 \le S_3$ سلسلة تركيبية للزمرة S_3 ولكن $\mathbb{Z}_6 \not\cong S_3$ □

(٧,١,١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)
لتكن $\{e\} = H_0 < H_1 < H_2 < \ldots < H_n = G$ سلسلة ناظمية للزمرة G. إذا كانت H_{i+1}/H_i زمرة منتهية رتبتها m_{i+1} فأثبت أن G زمرة منتهية رتبتها $m_1 m_2 \ldots m_n$.

الحل
نستخدم الاستقراء الرياضي على n لإثبات أن $|H_i| = m_1 m_2 \ldots m_i$ لكل $i = 1,2,\ldots,n$. إذا كان $n = 1$ فإن $|H_1| = |H_1/\{e\}| = |H_1/H_0| = m_1$. لنفرض الآن أن $|H_k| = m_1 m_2 \ldots m_k$ حيث $k < i \le n$. الآن : عدد المجموعات المشاركة للزمرة H_i/H_{i-1} هو m_i وعدد عناصر كل من هذه المجموعات المشاركة يساوي $|H_{i-1}|$. ولكن باستخدام فرضية الاستقراء نعلم أن : $|H_{i-1}| = m_1 m_2 \ldots m_{i-1}$. ولذا فإن : $|H_i| = |H_{i-1}| m_i = m_1 m_2 \ldots m_{i-1} m_i$. وبالتالي نحـــصل على المطلوب بأخذ $i = n$ Δ

تمرين (٢)
استخدم مبرهنة جوردان وهولدر لإثبات المبرهنة الأساسية للحساب.

الحل
لنفرض أن $n > 1$ عدد صحيح . بما أن $\mathbb{Z}_n$ زمرة منتهية فإن لها سلسلة تركيبية :
$\{[0]\} = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_{k-1} \le H_k = \mathbb{Z}_n$ حيث H_i/H_{i-1} زمرة إبدالية بسيطة. ولذا فـــإن $|H_i/H_{i-1}| = p_i$ حيث p_i عدداً أولياً. ومنه فإن :

$$n = |\mathbb{Z}_n| = |H_k/H_{k-1}||H_{k-1}/H_{k-2}|\ldots|H_1/H_0|$$
$$= p_k p_{k-1} \ldots p_1$$

أما وحدانية التحليل فنحصل عليها من تكافؤ السلاسل التركيبية Δ

تمارين (٧,١)

(١) جد سلسلة ناظمية جزئياً وليست ناظمية للزمرة D_4 .

(٢) لكل زوج من أزواج السلاسل التالية جد زوجاً أدق ومتكافئاً :

(أ) $\{e\} \le 25\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$ ، $\{0\} \le 10\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$.

(ب) $\{0\} \le 245\mathbb{Z} \le 49\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$ ، $\{0\} \le 60\mathbb{Z} \le 20\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$.

(ج) $\{[0]\} \le \langle[24]\rangle \le \langle[12]\rangle \le \mathbb{Z}_{72}$ ، $\{[0]\} \le \langle[18]\rangle \le \langle[3]\rangle \le \mathbb{Z}_{72}$.

(٣) لكل زمرة من الزمر التالية ، جد جميع السلاسل التركيبية وأثبت أنها متكافئة:

(أ) $\mathbb{Z}_{60}$ (ب) $\mathbb{Z}_{48}$

(٤) لكل زمرة من الزمر التالية ، جد جميع السلاسل التركيبية :

(أ) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (ب) S_3 (ج) A_4

(د) D_4 (هـ) S_4 (و) $S_3 \times \mathbb{Z}_2$

(ز) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ (ح) $S_3 \times S_3$

(٥) أعط مثالاً لزمرة G وسلسلتين غير قابلتين للتدقيق مختلفتا الطول. هل هذا يناقض مبرهنة جوردان وهولدر؟

(٦) إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $H \le G$ فأثبت أن H ناظمية جزئياً إذا وفقط إذا كانت H إحدى حدود سلسلة تركيبية للزمرة G .

(٧) إذا كانت G زمرة إبدالية فأثبت أنه يوجد سلسلة تركيبية للزمرة G إذا وفقط إذا كانت G منتهية.

(٨) إذا كانت G زمرة منتهية من النوع p حيث p عدداً أولياً وكانت $H \le G$ فأثبت أن H ناظمية جزئياً.

(٩) إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية جزئياً من G وكانت K زمرة جزئية ناظمية جزئياً من H فأثبت أن K زمرة جزئية ناظمية جزئياً من G .

(١٠) إذا كانت $H \le G$ وكانت K زمرة جزئية ناظمية جزئياً من G فأثبت أن $H \cap K$ زمرة جزئية ناظمية جزئياً من H .

(١١) إذا كانت $K \le H \le G$ وكانت K ناظمية جزئياً من G فأثبت أن K ناظمية جزئياً من H .

(١٢) إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية ناظمية جزئياً من G فأثبت أن $H \cap K$ زمرة جزئية ناظمية جزئياً من G.

(١٣) أعط مثالاً لزمرة G وزمرتين جزئيتين H و K ناظميتين جزئياً من G ولكن HK ليست زمرة جزئية من G.

(١٤) إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية جزئياً من G وكانت $K \lhd G$ فأثبت أن HK زمرة جزئية ناظمية جزئياً من G.

(١٥) بين أياً من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :

(أ) إذا كان لزمرتين سلسلتين تركيبيتين متكافئتين فإن الزمرتين متماثلتين.

(ب) أي سلسلة ناظمية يجب أن تكون ناظمية جزئياً.

(ج) أي سلسلة ناظمية جزئياً يجب أن تكون ناظمية.

(د) توجد سلسلة تركيبية لأي زمرة إبدالية.

(هـ) توجد سلسلة تركيبية لأي زمرة منتهية.

(٧,٢) الزمر القابلة للحل
Solvable Groups

إن أول من قدم مفهوم الزمر القابلة للحل هو الرياضي الفرنسي الشهير جالوا **(Galois)** أثناء محاولته حل معادلات كثيرات الحلول بإستخلاص الجذور.

تعريف (٧,٤)

(أ) نقول إن السلسلة الناظمية جزئياً $\{e\} = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_{n-1} \le H_n = G$ سلسلة قابلة للحل **(solvable series)** إذا كانت H_i / H_{i-1} زمرة إبدالية لكل $1 \le i \le n$.

(ب) نقول إن الزمرة G قابلة للحل **(solvable group)** إذا وجدت سلسلة قابلة للحل للزمرة G.

(ج) نقول إن السلسلة الناظمية جزئياً $\{e\} = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_{n-1} \le H_n = G$ سلسلة كثيرة الدورية **(polycyclic series)** إذا كانت H_i / H_{i-1} زمرة دورية لكل $1 \le i \le n$.

(د) نقول إن الزمرة G كثيرة الدورية **(polycyclic group)** إذا وجدت سلسلة كثيرة الدورية للزمرة G.

(هـ) نقول أن السلسلة الناظمية $\{e\} = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_{n-1} \le H_n = G$ سلسلة قابلة للحـل فوقياً **(supersolvable series)** إذا كانت H_i / H_{i-1} زمرة دورية لكل $1 \le i \le n$.

(و) نقول إن الزمرة G قابلة للحل فوقياً **(supersolvable group)** إذا وجدت سلسلة قـابلة للحل فوقياً للزمرة G.

ملحوظات

(١) من الواضح أن أي زمرة إبدالية يجب أن تكون قابلة للحل.

(٢) بما أن الزمر الدورية هي زمر إبدالية فإن كل زمرة كثيرة الدورية يجب أن تكون قابلة للحل.

(٣) بما أن السلسلة الناظمية هي سلسلة ناظمية جزئياً فإن كل زمرة قابلة للحل فوقياً يجب أن تكون كثيرة الدورية ومن ثم قابلة للحل.

(٤) إذا كانت G زمرة كثيرة الدورية (أو قابلة للحل فوقياً) فإن G منتهية التوليد ، وذلك لأنه لو كانت $\{e\} = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_{n-1} \le H_n = G$ سلسلة كثيرة الدورية حيث H_i / H_{i-1} دورية مولّدة بالعنصر $a_i H_{i-1}$ فإنه من الواضح أن $G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$. ولذا فهي منتهية التوليد.

(٥) بما أن $\mathbb{Q}$ زمرة إبدالية فهي قابلة للحل . وبما أن $\mathbb{Q}$ غير منتهية التوليد فإن $\mathbb{Q}$ ليست كـثيرة الدورية.

(٦) A_4 كثيرة الدورية لأن السلسلة $\{e\} = \{e, (1\ \ 2) \circ (4\ \ 3)\} \le V \le A_4$ كثيرة الدوريـة . ولكن A_4 ليست قابلة للحل فوقياً.

مبرهنة (٧,٦)

إذا كانت G زمرة قابلة للحل وكانت $H \le G$ فإن H قابلة للحل.

البرهان

بما أن G قابلة للحل فإنه توجد سلسلة قابلة للحـل $\{e\} = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_{n-1} \le H_n = G$ لنفرض أن $K_i = H_i \cap H$ لكل $0 \le i \le n$. إذن ، $\{e\} = K_1 \le K_2 \le \ldots \le K_n = H$ سلسلة ناظمية جزئياً للزمرة H. وباستخدام المبرهنة الثانية للتماثل نجد أن :

$$\begin{aligned} K_i / K_{i-1} &= (H_i \cap H)/(H_{i-1} \cap H) \\ &= (H_i \cap H)/(H_{i-1} \cap (H_i \cap H)) \\ &\cong H_{i-1}(H_i \cap H)/H_{i-1} \le H_i / H_{i-1} \end{aligned}$$

وبما أن H_i / H_{i-1} إبدالية فإن K_i / K_{i-1} إبدالية . وبالتالي نخلص إلى أن H قابلة للحل ◆

مبرهنة (٧,٧)

إذا كانت G زمرة قابلة للحل وكانت $H \lhd G$ فإن G/H زمرة قابلة للحل.

البرهان

بما أن G قابلة للحل فإنه توجد سلسلة قابلة للحل $G = H_n \geq H_{n-1} \geq \ldots \geq H_1 \geq H_0 = \{e\}$.

لنفرض أن $K_i = H_iH/H$ لكل $0 \leq i \leq n$. بما أن، $H_i \lhd H_{i+1}$ فإن :

$G/H = K_n \geq K_{n-1} \geq \ldots \geq K_1 \geq K_0 = \{e\}$ سلسلة ناظمية جزئياً للزمرة G/H. وبإستخدام المبرهنة الثالثة للتماثل نجد أن : $K_i/K_{i-1} = (H_iH/H)/(H_{i-1}H/H) \cong H_iH/H_{i-1}H$.

وبإستخدام المبرهنة الثانية للتماثل نجد أن :

$$H_iH/H_{i-1}H = H_i(H_{i-1}H)/H_{i-1}H \cong H_i/(H_i \cap H_{i-1}H).$$

وبما أن : $H_{i-1} \lhd H_i \cap H_{i-1}H$ فإننا نجد بإستخدام المبرهنة الثالثة للتماثل أن :

$H_i/H_i \cap H_{i-1}H \cong (H_i/H_{i-1})/(H_i \cap H_{i-1}H)/H_{i-1}$. ولذا فإن K_i/K_{i-1} تماثل زمرة خارج قسمة زمرة إبدالية ، وبالتالي فهي إبدالية. إذن ، G/H قابلة للحل ◆

مبرهنة (٧,٨)

إذا كانت G زمرة كثيرة الدورية وكانت $H \leq G$ فإن H زمرة كثيرة الدورية أيضاً.

البرهان

البرهان مماثل لبرهان المبرهنة (٧,٦) ، ولذا فإننا نتركه للقارئ ◆

مبرهنة (٧,٩)

إذا كانت G زمرة كثيرة الدورية وكانت $H \lhd G$ فإن G/H زمرة كثيرة الدورية.

البرهان

مماثل لبرهان المبرهنة (٧,٧) ، ولذا نتركه للقارئ ◆

مبرهنة (٧,١٠)

إذا كانت G زمرة قابلة لحل فوقياً وكانت $H \leq G$ فإن H قابلة للحل فوقياً.

البرهان

مماثل لبرهان المبرهنة (٧,٦) ، ولذا نتركه للقارئ ◆

مبرهنة (٧,١١)

إذا كانت G زمرة قابلة للحل فوقياً وكانت $H \triangleleft G$ فإن G/H قابلة للحل فوقياً .

البرهان

مماثل لبرهان المبرهنة (٧,٧) ، ولهذا فإننا نتركه للقارئ ◆

مبرهنة (٧,١٢)

إذا كانت $H \triangleleft G$ حيث كل من H و G/H قابلة للحل فإن G قابلة للحل.

البرهان

لنفرض أن كل من :

$$\{H\} = \bar{K}_0 \le \bar{K}_1 \le \ldots \le \bar{K}_{m-1} \le \bar{K}_m = G/H$$
$$\{e\} = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_{n-1} \le H_n = H$$

سلسلة قابلة للحل . بإستخدام مبرهنة التقابل توجد $K_i \le G$ حيث $K_i \triangleleft K_{i+1}$ ، $\bar{K}_i = K_i/H$ ، $G = K_m$ ، $H = K_0$ لكل $0 \le i \le m-1$. وبإستخدام المبرهنة الثالثة للتماثل نجد أن $K_i/K_{i-1} \cong \bar{K}_i/\bar{K}_{i-1}$. إذن ،

$\{e\} = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_n = H \le K_0 \le K_1 \le \ldots \le K_m = G$ سلسلة قابلة للحل للزمرة G .

وبالتالي فإن G قابلة للحل ◆

مبرهنة (٧,١٣)

إذا كانت $H \triangleleft G$ حيث كل من H و G/H كثيرة الدورية فإن G كثيرة الدورية.

البرهان

مماثل لبرهان المبرهنة (٧,١٢) ، ولذا فإننا نتركه للقارئ ◆

مبرهنة (٧,١٤)

إذا كانت $H \triangleleft G$ حيث كل من H و G/H قابلة للحل فوقياً فإن G قابلة للحل فوقياً.

البرهان

مماثل لبرهان المبرهنة (٧,١٢) ، ولذا فإننا نتركه للقارئ ◆

تزودنا المبرهنة التالية بأمثلة لزمر كثيرة الدورية (ومن ثم قابلة للحل).

مبرهنة (٧,١٥)

إذا كانت G زمرة منتهية من النوع p فإن G كثيرة الدورية.

البرهان

بإستخدام الاستقراء الرياضي على $|G|$. لنفرض إذن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر المنتهية من النوع p التي رتبتها أقل من $|G|$. بما أن G من النوع p فإن $Z(G) \neq \{e\}$. وبما أن $Z(G)$ زمرة إبدالية من النوع p فإنه باستخدام المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية التوليد نجد أن $Z(G)$ زمرة ضرب مباشر لزمر دورية من النوع p. ولذا فإننا نستطيع إيجاد سلسلة ناظمية جزئياً $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_{n-1} \leq H_n = Z(G)$ حيث كل من H_i / H_{i-1} دورية. إذن ، $Z(G)$ كثيرة الدورية. وبإستخدام الاستقراء الرياضي نجد أن $G/Z(G)$ زمرة كثيرة الدورية. إذن ، بإستخدام المبرهنة (٧,١٣) ، نجد أن G كثيرة الدورية ◆

نتيجة (٧,١٦)

إذا كانت G زمرة منتهية من النوع p فإن G قابلة للحل.

البرهان

بإستخدام المبرهنة (٧,١٥) ، نجد أن G كثيرة الدورية ، ولذا فهي قابلة للحل ◆

لقد بينا أن $\mathbb{Q}$ زمرة قابلة للحل ولكنها ليست كثيرة الدورية. لاحظ أن $\mathbb{Q}$ ليست منتهية التوليد. المبرهنة التالية تبين لنا الشرط اللازم والكافي لكي تكون الزمرة القابلة للحل زمرة كثيرة الدورية.

مبرهنة (٧,١٧)

لتكن G زمرة قابلة للحل. عندئذ ، G كثيرة الدورية إذا وفقط إذا كانت كل زمرة جزئية من G منتهية التوليد.

البرهان

لنفرض أولاً أن G كثيرة الدورية. ولتكن $H \leq G$. عندئذ ، بإستخدام المبرهنة (٧,٨) ، نجد أن H كثيرة الدورية. ولذا فإن H منتهية التوليد حسب الملحوظة (٤).

ولبرهان العكس ، نفرض أن G قابلة للحل وجميع زمرها الجزئية منتهية التوليد. لنفرض أن : $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$ سلسلة قابلة للحل للزمرة G. الآن ، H_i / H_{i-1} زمرة إبدالية وأن $H_i \leq G$. إذن ، H_i منتهية التوليد. لاحظ أيضاً أن H_i كثيرة الدورية. لنفرض الآن أن $H_i = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$. عندئذ، $H_i / H_{i-1} = \langle a_1H_{i-1}, a_2H_{i-1}, \ldots, a_kH_{i-1} \rangle$. ولذا فإن $\{e\} \leq \langle a_1H_{i-1} \rangle \leq \langle a_1H_{i-1}, a_2H_{i-1} \rangle \leq \ldots \leq H_i / H_{i-1}$ سلسلة ناظمية جزئياً للزمرة H_i / H_{i-1} عواملها زمر دورية. إذن ، H_i / H_{i-1} كثيرة الدورية لكل $1 \leq i \leq n$. وعلى وجه الخصوص ، G / H_{n-1} كثيرة الدورية. وبما أن H_{n-1} كثيرة الدورية فإننا نخلص بإستخدام المبرهنة (٧,١٣) إلى أن G كثيرة الدورية ◆

سنبرهن الآن أن الزمرة S_n غير قابلة للحل لكل $n \geq 5$. لاحظ أولاً أن كل من S_3 و S_4 قابلة للحل لأن $\{e\} \leq \langle (1\ 2\ 3) \rangle \leq S_3$ سلسلة قابلة للحل وأن $\{e\} \leq V \leq A_4 \leq S_4$ سلسلة قابلة للحل.

مبرهنة (٧,١٨)

لتكن G زمرة قابلة للحل. عندئذ ، G زمرة بسيطة إذا وفقط إذا كانت G زمرة دورية رتبتها عدداً أولياً.

البرهان

لنفرض أولاً أن G زمرة بسيطة. ولنفرض أن $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = G$ سلسلة قابلة للحل للزمرة G وبحذف الحدود المتساوية نستطيع أن نفرض أن $H_i \neq H_{i+1}$ لكل $0 \leq i \leq n-1$. إذن H_{n-1} زمرة جزئية ناظمية فعلية من G. بما أن G زمرة بسيطة فإن $H_{n-1} = \{e\}$. ولذا فإن السلسلة الوحيدة القابلة للحل للزمرة G هي $\{e\} < G$. إذن G زمرة إبدالية. وبإستخدام المبرهنة (٤,٣٠) ، نجد أن $G \cong \mathbb{Z}_p$ حيث p عدد أولي. وبرهان العكس واضحاً ◆

نتيجة (٧,١٩)

الزمرة S_n غير قابلة للحل لكل $n \geq 5$.

البرهان

إذا كانت S_n زمرة قابلة للحل فإنه بإستخدام المبرهنة (٧,٦) نجد أن A_n قابلة للحل. وبما أن A_n زمرة بسيطة لكل $n \geq 5$ فإنه بإستخدام المبرهنة (٧,١٨) نجد أن A_n زمرة دورية رتبتها عدداً أولياً وهذا مستحيل لأن $|A_n| = \frac{n!}{2}$ ليس عدداً أولياً لكل $n \geq 5$. إذن ، S_n غير قابلة للحل ◆

نقدم الآن شرطاً لازماً وكافياً لقابلية حل الزمر بإستخدام زمرة المبدلات ، ويلزمنا لـــذلك التعريف التالي وهو عبارة عن تعميم لمفهوم المبدلات.

تعريف (٧,٥)

إذا كانت كل من A و B مجموعة جزئية من الزمرة G فإننا نعرف مبدَّل A و B على النحو التالي: $[A,B] = \langle [a,b] : a \in A, b \in B \rangle$. لاحظ أن $G' = [G,G]$.

مبرهنة (٧,٢٠)

إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية من G فإن :

(أ) $H \lhd G$ إذا وفقط إذا كان $[H,G] \leq H$

(ب) إذا كانت $H \lhd G$ و $K \lhd G$ فإن $[H,K] \lhd G$

(ج) إذا كان $H \lhd G$ فإن $[K,G] \leq H$ إذا وفقط إذا كان $HK/H \leq Z(G/H)$

البرهان

(أ) لكل $g \in G$ و $h \in H$ لدينا : $[h,g] \in H \Leftrightarrow h^{-1}g^{-1}hg \in H \Leftrightarrow g^{-1}hg \in H$.

إذن $H \lhd G$ إذا وفقط إذا كانت $[H,G] \leq H$.

(ب) لاحظ أولاً أنه لكل $h,k,g \in G$ لدينا :

$$\begin{aligned} g^{-1}[h,k]g &= g^{-1}(h^{-1}k^{-1}hk)g \\ &= (g^{-1}hg)^{-1}(g^{-1}kg)^{-1}(g^{-1}hg)(g^{-1}kg) \\ &= [g^{-1}hg, g^{-1}kg] \end{aligned}$$

الآن ، إذا كان $h \in H$ و $k \in K$ و $g \in G$ فإن $g^{-1}hg \in H$ وإن $g^{-1}kg \in K$. ولـــذا فـــإن $g^{-1}[h,k]g \in [H,K]$.

لنفرض الآن أن $a \in [H,K]$. عندئـــذ ، $a = a_1a_2 \ldots a_m$ حيـــث $a_i \in [h_i,k_i]$ و $h_i \in H$ و $k_i \in K$. إذن ، $g^{-1}ag = g^{-1}a_1gg^{-1}a_2g \ldots g^{-1}a_mg \in [H,K]$. وبالتالي فإن $[H,K] \lhd G$.

(ج) لنفرض أولاً أن $[K,G] \leq H$. عندئذ ، لكل $k \in K$ و $g \in G$ نجد أن $kgk^{-1}g^{-1} \in H$. ومنه فإن $HkHg = HgHk$. ولذا فإن $Hk \in Z(G/H)$. لنفرض الآن أن $h \in H$ و $k \in K$. عندئذ ، $Hhk = HhHk = HHk = Hk \in Z(G/H)$. وبالتالي فإن $HK/H \leq Z(G/H)$.

ولبرهان العكس ، نفرض أن $HK/H \leq Z(G/H)$. ولنفـــرض أن $k \in K$ ، $g \in G$. بمـــا أن $HK \in Z(G/H)$ فإن $Hkgk^{-1}g^{-1} = HkHgHb^{-1}Hk^{-1} = H$. ولـــذا فـــإن $[k,g] \in H$. وبالتالي فإن $[K,G] \leq H$ ◆

تعريف (٧,٦)

إذا كانت G زمرة فإننا نعرف استقرائياً $G^{(i)}$ كالتالي :

$$G^{(0)} = G \text{ و } G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}] \text{ لكل } i \geq 1 .$$

ملحوظة

من الواضح أن $G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \ldots$.

تسمى هذه السلسلة ، السلسلة المشتقة **(derived series)** للزمرة G .

مبرهنة (٧,٢١)

تكون الزمرة G قابلة للحل إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح موجـــب m حيـــث $G^{(m)} = \{e\}$. وعلاوة على ذلك إذا كان m هو أصغر عدد صحيح يحقق $G^{(m)} = \{e\}$ فإن طول أي سلسلة قابلة للحل للزمرة G هو على الأقل m .

البرهان

لنفرض أن G قابلة للحل وأن $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = G$ سلسلة قابلة للحل للزمرة G . سنبرهن بإستخدام الإستقراء الرياضي على i أن $G^{(i)} \leq H_{n-i}$. بمـــا أن $G^{(0)} = H_n = G$ فـــإن

العبارة صحيحة عندما $i = 0$. لفرض الآن أن $G^{(i-1)} \leq H_{n-i+1}$. بمـا أن H_{n-i+1} / H_{n-i} زمـرة إبدالية فإن $[H_{n-i+1}, H_{n-i+1}] \leq H_{n-i}$. ولذا فإن :
$G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}] \leq [H_{n-i+1}, H_{n-i+1}] \leq H_{n-i}$. إذن ، علـى وجـه الخـصوص $G^{(n)} \leq H_{n-n} = H_0 = \{e\}$.

ولبرهان العكس ، نفرض أن $G^{(m)} = \{e\}$. عندئذ :
$\{e\} = G^{(m)} \leq G^{(m-1)} \leq \ldots \leq G^{(1)} \leq G^{(0)} = G$ سلسلة ناظمية جزئياً للزمـرة G . وبمـا أن $G^{(i+1)} = (G^{(i)})'$ فإن $G^{(i)} / G^{(i+1)}$ زمرة إبدالية. ولذا فإن G قابلة للحل.

وأخيراً ، من الواضح أنه إذا كان طول أي سلسلة قابلة للحل يساوي n وكان m هو أصغر عـدد صحيح يحقق $G^{(m)} = \{e\}$ فإن $m \leq n$ ◆

تعريف (٧,٧)

إذا كانت G زمرة قابلة للحل فإن أصغر عدد صحيح m يحقـق $G^{(m)} = \{e\}$ يـسمى الطـول الاشتقاقي **(derived length)** للزمرة G .

لاحظ أن الزمر الإبدالية زمر قابلة للحل وطولها الاشتقاقي يساوي 1.

مثال (٧,٥)

الطول الاشتقاقي للزمـرة S_3 و 2. لأن $S_3^{(1)} = \mathbb{Z}_3$ وأن $S_3^{(2)} = \mathbb{Z}_3^{(1)} = \{e\}$. إذن ، السلـسلة المشتقة للزمرة S_3 هي $S_3 \geq \mathbb{Z}_3 \geq \{e\}$ □

مثال (٧,٦)

الطول الاشتقاقي للزمرة S_4 هو 3. لاحظ أولاً أن $S_4^{(1)} = S_4' = A_4$. لأن:
$[(1\ 2),(1\ 3)] = (1\ 3\ 2) \in S_4^{(1)}$. وبما أن جميع الدورات ذات الطول 3 مترافقة في S_4 فإننا نجد أن $S_4^{(1)}$ تحتوي على جميع الدورات من الطول 3. إذن ، $A_4 \leq S_4^{(1)}$. ولكـن $S_4 / A_4 \cong \mathbb{Z}_2$. إذن، $S_4^{(1)} \leq A_4$. وبالتالي فإن $S_4^{(1)} = A_4$. الآن ، V هي الزمرة الجزئية الوحيدة الناظميـة مـن A_4 . ولذا فإن $S_4^{(2)} = V$. إذن ، $S_4 \geq A_4 \geq V \geq \{e\}$ هي السلسلة المشتقة للزمرة S_4 □

مثال (٧,٧)

السلسلة المشتقة للزمرة S_n حيث $n \geq 5$ هي $\ldots \geq A_n \geq A_n \geq S_n$. لأن $S_n^{(i)} = A_n$ لكل $i \geq 1$ $\square$

ننتقل الآن لدراسة الزمر المنتهية القابلة للحل ، لهذه الزمر نبرهن التعميم التالي لمبرهنات سيلو التي قدم برهانها فيليب هول **(Phillip Hall)**.

إذا كانت G زمرة منتهية قابلة للحل من الرتبة mn حيث $\gcd(m,n)=1$ فإن :

(١) G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة m .

(٢) إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية من G رتبتها m فإن H و K مترافقتان.

لكي نبرهن الحقيقتين أعلاه يلزمنا بعض التحضيرات لذلك . لقد قدمنا في التمارين (٣,٧) مفهومي الزمر الجزئية اللامتغيرة تماماً والمميزة ودرسنا بعض خواصهما. ولغرض التسهيل على القارئ نعيد تقديم هذين المفهومين ونبرهن بعض الخواص الأساسية لهما.

تعريف (٧,٨)

لتكن H زمرة جزئية من G .

(أ) نقول إن H لامتغيرة تماماً **(fully invariant)** إذا كان $\varphi(H) \subseteq H$ لكل تشاكل $\varphi : G \to G$.

(ب) نقول إن H مميزة من G **(characteristic in G)** إذا كان $\varphi(H) \subseteq H$ لكل $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$.

ملحوظات

(١) بما أن كل تماثل ذاتي هو تشاكل فإنه من الواضح أن الزمر الجزئية اللامتغيرة تماماً يجب أن تكون مميزة.

(٢) إذا كانت $H \leq G$ فإن H مميزة إذا وفقط إذا كان $\varphi(H) = H$ لكل $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. لأنه إذا كانت H مميزة فإن $\varphi(H) \subseteq H$ لكل $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. ولذا فإن $\varphi^{-1}(H) \subseteq H$. إذن ، لكل $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ يكون $H = \varphi(\varphi^{-1}(H)) \subseteq \varphi(H)$. أماالعكس فهو واضح.

(٣) إن عكس الملحوظة (١) ليس بالضرورة صحيحاً إذ أن $Z(G)$ زمرة جزئية مميزة من G لأنه إذا كان $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ وكان $\varphi(x) \in \varphi(Z(G))$ فإن $x \in Z(G)$. ولذا فإن:

$$x \in Z(G) \Rightarrow xa = ax \ \forall a \in G \Rightarrow \varphi(x)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) \in Z(G)$$
$$\Rightarrow \varphi(Z(G)) \subseteq Z(G)$$

وينتج عن ذلك أن $Z(G)$ زمرة جزئية مميزة من G. ولكن $Z(G)$ ليست لامتغيرة تماماً ، خذ $G = \mathbb{Z}_2 \times S_3$ ولاحظ أن $Z(G) = \langle([1],e)\rangle$. ولاحظ أيضاً أن $\varphi : G \to G$ المعرف بالقاعدة $\varphi([1],\sigma) = ([0],(1\ 2)), \varphi([0],\sigma) = ([0],e)$ لكل $\sigma \in S_3$ تشاكل. ولكن $\varphi(Z(G)) \not\subseteq Z(G)$.

مثال (٧,٨)

إذا كانت G زمرة فإن G' زمرة جزئية لامتغيرة تماماً وبالتالي مميزة من G. لأنه إذا كان $\varphi : G \to G$ تشاكل وكان $a, b \in G$ فإن:

$\varphi([a,b]) = \varphi(a)^{-1}\varphi(b)^{-1}\varphi(a)\varphi(b) = [\varphi(a),\varphi(b)] \in G'$. ولذا فإن $\varphi(G') \subseteq G'$ $\square$

تزودنا المبرهنة التالية بالخصائص الأساسية للزمر الجزئية المميزة .

مبرهنة (٧,٢٢)

(أ) إذا كانت H زمرة جزئية مميزة من G فإن $H \lhd G$.

(ب) إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية مميزة من G فإن $H \cap K$ زمرة جزئية مميزة من G.

(ج) إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية مميزة من G فإن HK زمرة جزئية مميزة من G.

(د) إذا كانت $H \lhd G$ وكانت K زمرة جزئية مميزة من H فإن $K \lhd G$.

(هـ) إذا كانت H زمرة جزئية مميزة من K وكانت K زمرة جزئية مميزة من G فإن H زمرة جزئية مميزة من G.

(و) إذا كانت G زمرة منتهية وكانت H زمرة جزئية ناظمية من G حيث $\gcd(|H|,[G:H]) = 1$ فإن H زمرة جزئية مميزة من G.

(ي) إذا كانت $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ وكانت $P \lhd G$ فإن P مميزة من G.

البرهان

(أ) لنفرض أن $H \le G$ مميزة وليكن $g \in G$. عندئذ ، $gHg^{-1} = \varphi_g(H) \subseteq H$. ولذا فإن

$H \lhd G$.

ب) لنفرض أن $x \in H \cap K$ وأن $\varphi \in Aut(G)$. إذن، $\varphi(x) \in \varphi(H)$ و $\varphi(x) \in \varphi(K)$.
وبما أن $\varphi(H) \subseteq H$ وأن $\varphi(K) \subseteq K$ فإن $\varphi(x) \in H \cap K$. وبالتالي فإن $\varphi(H \cap K) \subseteq H \cap K$.

ج) لنفرض أن $x = hk \in HK$ وأن $\varphi \in Aut(G)$. عندئذ:
$\varphi(x) = \varphi(h)\varphi(k) \in \varphi(H)\varphi(K) \subseteq HK$. وبالتالي فإن $\varphi(HK) \subseteq HK$.

د) بما أن $H \lhd G$ فإن $\varphi_g(H) \subseteq H$ لكل $\varphi_g \in Inn(G)$. لنفرض أن $\psi = \varphi_g |_H$. إذن، $\psi \in Aut(H)$ وأن $\psi(K) \subseteq K$ لأن K مميزة من H. ولكن $\varphi_g(K) = \psi(K)$. إذن، $\varphi_g(K) \leq K$ لكل $g \in G$. وبالتالي فإن $K \lhd G$.

هـ) لنفرض أن $\varphi \in Aut(G)$ وأن $\psi = \varphi |_K$. إذن $\psi \in Aut(K)$. ولذا فإن $\psi(H) \subseteq H$ وبما أن $\varphi(K) \subseteq K$ وأن $\psi(H) = \varphi(H)$ فإن $\varphi(H) \subseteq H$. وبالتالي فإن H مميزة من G.

و) لنفرض أن $H \lhd G$ وأن $\gcd(|H|,[G:H]) = 1$. لنفرض أن $\varphi \in Aut(G)$ وأن $K = \varphi(H)$. لنفرض أن $|H| = n$ وأن $|G/H| = m$. بما أن $HK/H \leq G/H$ فإن $|HK/K|$ يقسم m. ولكن بإستخدام المبرهنة الثانية للتماثل نجد أن $HK/H \cong K/H \cap K$.
إذن، $|HK/H| = \frac{|K|}{|H \cap K|} = \frac{|\varphi(H)|}{|H \cap K|} = \frac{|H|}{|H \cap K|}$. وبما أن $\gcd(m,n) = 1$ فإن $|HK/H| = 1$. ولذا فإن $HK = H$. إذن، $K = \varphi(H) \subseteq H$. وبالتالي فإن H زمرة جزئية مميزة من G.

ي) بما أن $P \lhd G$ فإن P وحيدة. لنفرض أن $x \in P$ وأن $\varphi \in Aut(G)$. إذن، $|\varphi(x)| = p^k$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$. وبما أن P وحيدة فإن $\varphi(x) \in P$. إذن، $\varphi(P) \subseteq P$ ◆

تعريف (٧,٩)

إذا كانت H زمرة جزئية من G فإننا نعرف قلب H في G **(core of H in G)** كالتالي :

$$CR(H) = \bigcap_{x \in G} x^{-1}Hx$$

مبرهنة (٧,٢٣)

إذا كانت $H \leq G$ فإن $CR(H)$ أكبر زمرة جزئية ناظمية من G محتواة في H.

البرهان

بما أن $H = e^{-1}He$ فإن $CR(H) \leq H$. وإذا كان $g \in G$ فإن:

$$g^{-1}CR(H)g = g^{-1}(\bigcap_{x\in G} x^{-1}Hx)g = \bigcap_{x\in G}(xg)^{-1}H(xg) = \bigcap_{y\in G} CR(H)$$
$$= \bigcap_{y\in G} y^{-1}Hy = CR(H)$$

إذن ، $CR(H) \lhd G$ ◆

مبرهنة (٧,٢٤)

إذا كانت $H \leq G$ حيث $[G:H] = n$ فإن $G/CR(H)$ تماثل زمرة جزئية من S_n .

البرهان

لنفرض أن $A = \{xH : x \in G\}$. بإستخدام النتيجة (٤,٦) ، يوجد تشاكل $\psi : G \to S_n$ معرفاً بالقاعدة $\psi(g) = \tau_g$ حيث $\tau_g : A \to A$ هو التطبيق المعرف بالقاعدة $\tau_g(xH) = gxH$. الآن:

$$g \in Ker\psi \Leftrightarrow \psi(g) = \tau_e \Leftrightarrow g(aH) = aH \quad \forall aH \in A \Leftrightarrow ga = ah \text{ ,} h \in H$$
$$\Leftrightarrow g \in a^{-1}Ha \Leftrightarrow g \in \bigcap_{a\in G} a^{-1}Ha = CR(H)$$

ولذا فإنه بإستخدام المبرهنة الأولى للتماثل نجد أن $G/CR(H)$ تماثل زمرة جزئية من S_n ◆

تعريف (٧,١٠)

لتكن H زمرة جزئية فعلية من زمرة G .

(أ) نقول إن H زمرة جزئية أعظمية **(maximal subgroup)** من G إذا كان لكل $H \leq K \leq G$ فإن $H = K$ أو إن $K = G$.

(ب) نقول إن H زمرة جزئية ناظمية أعظمية من G **(maximal normal subgroup)** إذا كانت $H \lhd G$ وكان لكل $H \lhd K \lhd G$ فإن $H = K$ أو إن $K = G$.

(ج) نقول أن H زمرة جزئية أصغرية **(minimal subgroup)** من G إذا كانت $H \neq \{e\}$ وكان لكل $\{e\} \leq K \leq H$ فإن $K = \{e\}$ أو إن $K = H$.

(د) نقول إن H زمرة جزئية ناظمية أصغرية **(minimal normal subgroup)** من G إذا كانت $\{e\} \neq H \lhd G$ وكان لكل $\{e\} \lhd K \lhd H$ فإن $K = \{e\}$ أو إن $K = H$.

ملحوظات

(١) ليس بالضرورة أن توجد زمر جزئية أصغرية (أو أعظمية) لزمرة معطاة ، فمثلاً لا توجد زمرة جزئية أصغرية للزمرة $\mathbb{Z}$.

(٢) إذا كان p عدداً أولياً فإنه توجد للزمرة $\mathbb{Z}_p$ زمرة جزئية أعظمية وحيدة هي $\{e\}$ وزمرة جزئية أصغرية وحيدة هي $\mathbb{Z}_p$.

(٣) من الواضح أنه إذا كانت $G \neq \{e\}$ زمرة منتهية فإن G تحتوي زمرة جزئية أعظمية وزمرة جزئية أصغرية.

(٤) إذا كانت G زمرة منتهية وكانت H زمرة جزئية فعلية غير تافهة من G فإن H تحتوي زمرة جزئية أصغرية من G وأن H محتواة في زمرة جزئية أعظمية من G.

(٥) إذا كانت $H \leq G$ حيث $[G:H]=p$ وحيث p عدد أولي فإنه من الواضح أن H زمرة جزئية أعظمية من G. لاحظ أن العكس غير صحيح ، فمثلاً $H=\langle(1\ 2\ 3)\rangle \cong \mathbb{Z}_3$ زمرة جزئية أعظمية من A_4 لأنه لو كان $H<K<A_4$ فإن $|K|=6$ وهذا مستحيل. لاحظ أيضاً أن $[A_4:H]=4$ ليس عدداً أولياً.

لدينا الآن جميع المعلومات اللازمة لإستكمال دراستنا للزمر المنتهية القابلة للحل.

مبرهنة (٧,٢٥)

إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية أصغرية من الزمرة المنتهية والقابلة للحل G فإن H زمرة إبدالية من النوع p ومن ثم فهي تماثل زمرة ضرب مباشر لزمر دورية رتبة كل منها تساوي p.

البرهان

بما أن الزمرة المشتقة H' مميزة من H وأن H ناظمية من G فإن $H' \lhd G$. وبما أن G قابلة للحل و $H \leq G$ فإن H قابلة للحل أيضاً. ولذا فإن $H' \neq H$. وبما أن H زمرة أصغرية من G فإن $H'=\{e\}$. إذن، H زمرة إبدالية. لنفرض الآن أن p عدداً أولياً يقسم $|H|$ وأن $P \in Syl_p(H)$. بما أن H إبدالية فإن $P \lhd H$. ولذا فإن P وحيدة. وبإستخدام المبرهنة (٧,٢٢)، نجد أن P مميزة من H. وبإستخدام المبرهنة (٧,٢٢) مرة أخرى ، نجد أن $P \lhd G$. وباستخدام أصغرية H نجد أن $P=H$. إذن ، H زمرة إبدالية منتهية من الرتبة p^k حيث $k \in \mathbb{Z}^+$. وبإستخدام النتيجة (٦,٥) ، نجد أن H تماثل زمرة ضرب مباشر لزمر دورية رتبة كل منها p ◆

مبرهنة (٧,٢٦)

إذا كانت M زمرة جزئية أعظمية من الزمرة G المنتهية والقابلة للحل فإن $[G:M]=p^k$ حيث p عدد أولي و $k\in\mathbb{Z}^+$.

البرهان

لنفرض أن $K=CR(M)$. عندئذ ، بإستخدام المبرهنة (٧,٢٣) نجد أن K أكبر زمـــرة جزئيـــة ناظمية من G حيث $K\le M$. لنفرض الآن أن H/K زمرة جزئية ناظمية أصغرية من G/K. إذن ، $K<H\lhd G$. ومنه فإن $H\not\le M$. ولذا فإن $G=HM$. بمـــا أن $H\cap M\lhd M$ فـــإن $(H\cap M)/K\lhd M/K$. وبإستخدام المبرهنة (٧,٢٥) ، نجد أن H/K زمرة إبدالية. إذن $(H\cap M)/K\lhd H/K$. ولكن $(H\cap M)/K\le H/K$. ولذا فإن $(H\cap M)/K\lhd HM/K=G/K$. وبمـــا أن $H\not\le M$ فـــإن $H\cap M<H$. ولـــذا فـــإن $H\cap M=K$. إذن ، $[H:K]=[H:H\cap M]=[HM:M]=[G:M]$. وبإستخدام المبرهنة (٧,٢٥)، نجد أن $[H:K]=p^k$ حيث p عدد أولي. وبالتالي فإن $[G:M]=p^k$ ◆

تعريف (٧,١١)

إذا كانت H زمرة جزئية من الزمرة المنتهية G فإننا نقول إن H زمرة هـــول الجزئيـــة مـــن G **(Hall subgroup of G)** إذا كان $\gcd(|H|,[G:H])=1$.

مثال (٧,٩)

إذا كانت $H\in Syl_p(G)$ فإن H زمرة هول الجزئية من G □

مثال (٧,١٠)

لتكن $G=A_5$. ولتكن $H\le A_5$ زمرة هول الجزئية. عندئذ ، $\gcd(H,[A_5:H])=1$. ولذا فإن $|H|=3,4,5,12,15,20$. إذا كانت $|H|=3,4,5$ فإن $H\in Syl_p(A_5)$ حيث $p=2,3,5$. ولذا فإنه توجد زمرة هول الجزئية من الرتبة $3,4,5$. أيضاً توجد زمرة هول الجزئية من الرتبـــة 12 لأن $|A_4|=12$ وأن $A_4\le A_5$. ولكن A_5 لا تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة 15 أو الرتبـــة

20 لأنه لو كانت مثل هذه الزمرة الجزئية موجودة فإنه استناداً إلى النتيجة (٤,٨) نجد أن A_5 تماثل زمرة جزئية من S_4 أو S_5 وهذا مستحيل □

لاحظ أن $|A_5| = 60$ وأن $\gcd(20,3) = 1$ ولكن لا تحتوي A_5 على زمرة هول الجزئية من الرتبة 20. المبرهنة التالية تضمن لنا وجود زمر هول الجزئية للزمر المنتهية القابلة للحل.

مبرهنة (٧,٢٧)

إذا كانت G زمرة منتهية قابلة للحل من الرتبة mn حيث $\gcd(m,n)=1$ فإن G تحتوي على زمرة هول الجزئية من الرتبة m.

البرهان

بإستخدام الإستقراء الرياضي على $|G|$. من الواضح أن العبارة صحيحة عندما يكون $|G|=1$. لنفرض الآن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر المنتهية القابلة للحل التي رتبها أقل من $|G|$.

لدينا الحالتان التاليتان:

الحالة الأولى:

تحتوي G على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة N من الرتبة ab حيث a يقسم m و b قاسم فعلي للعدد n. أي أن $|N|$ لا يقسم n. لنفرض في هذه الحالة أن $m = ar$ وأن $n = bs$. إذن ، $|G/N| = rs < |G|$. وبإستخدام فرضية الإستقراء نجد أن G/N تحتوي على زمرة جزئية K/N من الرتبة r. إذن ، $|K| = rab = mb < |G|$. وبإستخدام الإستقراء الرياضي مرة أخرى نجد أن K تحتوي على زمرة جزئية H رتبتها m.

الحالة الثانية:

العدد n يقسم رتبة أي زمرة جزئية ناظمية غير تافهة من الزمرة G. لنفرض في هذه الحالة أن N زمرة جزئية ناظمية أصغرية من G. إذن، n يقسم $|N|$. بإستخدام المبرهنة (٧,٢٥)، نجد أن $|N| = p^\alpha$ حيث p عدد أولي . وبما أن n يقسم p^α فإن p لا يقسم m. إذن، $n = p^\alpha$. ولذا فإن $N \in Syl_p(G)$ وأن N وحيدة. لنفرض الآن أن K/N زمرة جزئية ناظمية أصغرية من G/N. إذن، بإستخدام المبرهنة (٧,٢٥)، نجد أن $|K/N| = q^\beta$ حيث q عدد أولي. بما أن q^β يقسم m فإن $q \neq p$. لاحظ أيضاً أن $|K| = p^\alpha q^\beta$. لنفرض أن $Q \in Syl_q(K)$ وأن $H = N(Q)$. إذا كانت $H = G$ فإن $Q \lhd G$ وهذا يناقض الفرض لأن p^α لا يقسم $|Q|$. إذن

$H < G$. الآن بما أن $Q \le K \lhd G$ وأن $Q \in Syl_q(K)$ فـإن $x^{-1}Qx \le x^{-1}Kx = K$. إذن، $Q, x^{-1}Qx \in Syl_q(K)$. ولذا فإنه يوجد $y \in K$ حيـث $Q = (xy)^{-1}Qxy$. ولـذا فـإن، $xy \in N(Q)$. ومنه فإن $x \in N(Q)K$. وبالتالي فـإن $G = N(Q)K = HK = KH$. الآن، $NQ \le K$ وأن $\gcd(|N|,|Q|) = 1$. إذن، $N \cap Q = \{e\}$. ولذا فإن :

$$|NQ| = \frac{|N||Q|}{|N \cap Q|} = |N||Q| = p^\alpha q^\beta = |K|$$ ومنه فإن $K = NQ$. إذن،

$G = HK = NQH = NH$. بما أن $N \lhd G$ فإن $N \cap H \lhd H$. وبمـا أن N إبداليـة فـإن $N \cap H \lhd N$. إذن، $N \cap H \lhd NH = G$. وبمـا أن N أصـغرية فـإن $N \cap H = N$ أو $N \cap H = \{e\}$. إذا كان $N \cap H = N$ فإن $N \le H$. ولـذا فـإن $G = NH = H$ وهـذا مستحيل. إذن $N \cap H = \{e\}$. الآن $|G| = |NH| = |N||H| = p^\alpha |H|$. ولذا فإن $m = \frac{|G|}{p^\alpha} = |H|$. وبالتالي فإن H هي زمرة هول الجزئية من الرتبة m ◆

سنبرهن الآن أن زمر هول الجزئية من الزمرة المنتهية والقابلة للحل G جميعهـا مترافقـة. ولكننا نحتاج أولاً إلى الحقيقة التالية :

مبرهنة (٧,٢٨)

إذا كانت H و K زمرتين مترافقتين من G فإن $N(H)$ و $N(K)$ كذلك.

البرهان

لنفرض أن $K = g^{-1}Hg$ حيـث $g \in G$. سـنبرهن أن $N(K) = g^{-1}N(H)g$. لنفـرض أن $x \in N(H)$. لكـل $k \in K$ لـدينا : $(g^{-1}xg)^{-1}k(g^{-1}xg) = g^{-1}x^{-1}gkg^{-1}xg$. وبمـا أن $gkg^{-1} \in H$ فإن $x^{-1}(gkg^{-1})x \in H$. ولذا فإن $g^{-1}(x^{-1}(gkg^{-1})x)g \in K$. إذن، $g^{-1}N(H)g \le N(K)$. وبالمثل ، $N(K) \le g^{-1}N(H)g$ ◆

مبرهنة (٧,٢٩)

إذا كانت G زمرة منتهية قابلة للحل من الرتبة mn حيث $\gcd(m,n) = 1$ فإن أي زمرتي هول الجزئية من الرتبة m يجب أن تكونا مترافقتين (ومن ثم متماثلتان).

البرهان

بإستخدام الإستقراء الرياضي على $|G|$. من الواضح أن العبارة صحيحة عندما يكون $|G|=1$. لنفرض الآن أن العبارة صحيحة لجميع الزمر المنتهية القابلة للحل التي رتبها أقل من $|G|$. كما في المبرهنة (٧,٢٧) ندرس الحالتان التاليتان:

الحالة الأولى:

تحتوي G على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة N من الرتبة ab حيث a يقسم m و b قاسم فعلي للعدد n. لنفرض أن كل من H و K زمرة هول من الرتبة m. ولنفرض أن $m=ar$، $n=bs$ حيث $s\neq 1$. إذن، $|NH|=|N|[NH:N]=|N|[H:N\cap H]=abm_1$ حيث $m_1=[H:N\cap H]$ يقسم m. وبما أن $H\leq NH$ فإن m يقسم abm_1. ولذا فإن $m=am_1$. ومنه فإن $|NH|=bm$. وبصورة مماثلة تماماً نستطيع أن نبرهن أن $|NK|=bm$ أيضاً. الآن كل NH/N و NK/N زمرة جزئية من G/N رتبتها r. إذن بإستخدام الإستقراء الرياضي نجد أنهما مترافقتان في G/N. ومنه يوجد $xN\in G/N$ حيث $(x^{-1}N)(NK/N)(xN)=NH/N$. ولذا فإن $x^{-1}(NK)x=NH$. وبما أن $|NH|<|G|$ وأن H و $x^{-1}Kx$ زمرتي هول من NH مترفقتان استناداً إلى فرضية الإستقراء. ولذا فإنه يوجد $y\in G$ حيث $H=y^{-1}(x^{-1}Kx)=(xy)^{-1}K(xy)$.

الحالة الثانية:

العدد n يقسم رتبة أي زمرة جزئية ناظمية غير تافهة من G. لنفرض أن N زمرة جزئية ناظمية أصغرية من G. وكما رأينا في برهان الحالة الثانية من المبرهنة (٧,٢٧) فإن $|N|=p^{\alpha}$ وأن N وحيدة. لنفرض أن كل من H و K زمرة هول من الرتبة m. بما أن p لايقسم m فإن $H\cap N=\{e\}$. ولذا فإن $|HN|=|G|$. إذن، $G=HN$. سنبرهن الآن أن H زمرة جزئية أعظمية من G. إذا كانت H محتواة فعلياً في زمرة جزئية أعظمية M من G فإن $G=HN=MN$. ولذا فإن $N\not\leq M$. ومن ثم فإن $M\cap N<N$. كذلك، $M\cap N\neq\{e\}$. لأنه إذا كان $M\cap N=\{e\}$ فإن $|G|=|M||N|=|H||N|$. ولذا فإن $M=H$ وهذا تناقض. إذن، $M\cap N\lhd M$. وبما أنه بإستخدام المبرهنة (٧,٢٥)، N إبدالية فإن $M\cap N\lhd N$. إذن، $M\cap N\lhd MN=G$ وهذا يناقض أصغرية N. إذن ، H زمرة جزئية أعظمية من G.

لنفرض الآن أن B/N زمرة جزئية ناظمية أصغرية من G/N. بإستخدام المبرهنة (٧,٢٥)، نجد أن $|B/N| = q^\beta$ حيث q عدداً أولياً و $q \neq p$. إذن، $|B/N| = q^\beta$ حيث q عدداً أولياً و $q \neq p$. ومنه فإن $|B| = p^\alpha q^\beta$. لنفرض أن $Q = B \cap H$. بما أن H زمرة أعظمية لا تحتوي B فإن: $p^\alpha m = |G| = |BH| = \dfrac{|B||H|}{|Q|} = \dfrac{p^\alpha q^\beta m}{|Q|}$. إذن $|Q| = q^\beta$. ولذا فإن $Q \in Syl_q(B)$.

وبما أن $B \lhd G$ فإن $Q \lhd H$. لاحظ أن Q ليست ناظمية من G لأن N زمرة جزئية ناظمية أصغرية وحيدة من G. وبما أن H أعظمية فإن $H = N(Q)$. وبصورة مماثلة إذا كانت $R = B \cap K$ فإن $R \in Syl_q(B)$ وأن $K = N(R)$. إذن، بإستخدام المبرهنة الثانية لسيلو نجد أن Q و R مترافقتان في B. ولذا فإنهما مترافقتان في G. إذن، بإستخدام المبرهنة (٧,٢٨)، نجد أن $N(Q)$ و $N(R)$ مترافقتان في G. وبالتالي فإن H و K مترافقتان في G ◆

ملحوظات

(١) لقد رأينا أن A_5 ليست قابلة للحل ولا تحتوي على زمرة هول من الرتبة 20 ولكنها تحتوي على زمرة هول من الرتبة 12. وفي الحقيقة ، أي زمرتين من الرتبة 12 يجب أن تكونا مترافقتان (من متماثلتان) في A_5 (انظر تمرين ١٦).

(٢) لاحظ أيضاً أن الزمرة $PSL(2.11)$ غير قابلة للحل ولكنها تحتوي على زمرتي هول غير متماثلتين (ومن ثم غير مترافقتين) من الرتبة 12 (أنظر تمرين١٧).

ننهي هذا البند بتقديم بعض الشروط التي يجب أن تحققها الزمرة المنتهية لكي تكون قابلة للحل :

(١) [بيرنسايد **(Burnside)**]:

إذا كانت $|G| = p^\alpha q^\beta$ حيث p و q عددان أوليان فإن G قابلة للحل.

(٢) [فيليب هول **(Phillip Hall)**] :

إذا كانت $|G| = p^\alpha m$ حيث $\gcd(p, m) = 1$ وكانت G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة m فإن G قابلة للحل.

(٣) [فيت وثومبسون **(Feit-Thompson)**] :

إذا كان $|G|$ عدداً فردياً فإن G قابلة للحل.

(٤) [ثومبسون (Thompson)] :

إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $\langle x,y \rangle$ قابلة للحل لكل $x,y \in G$ فإن G قابلة للحل.

إن جميع براهين الفقرات أعلاه صعبة وتخرجنا عن مستوى هذا الكتاب ، ولكننا نلفت نظر القارئ إلى أن برهان الفقرة (٢) يمكن الحصول عليه من برهان الفقرة (١). وبرهان الفقرة (٣) يحتاج ما يقارب ٢٥٥ صفحة. أما برهان الفقرة (٤) فهو يعتمد على برهان الفقرة (٣) ويحتاج ما يقارب ٤٧٥ صفحة.

(٧,٢,١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

(أ) إذا كانت G زمرة منتهية الرتبة pq حيث $p > q$ عددان أوليان فأثبت أن G زمرة قابلة للحل.

(ب) إذا كانت G زمرة منتهية من الرتبة pqr حيث $p > q > r$ أعداداً أولية فأثبت أن G قابلة للحل.

الحل

(أ) بإستخدام مبرهنة سيلو الثالثة نجد أن $n_p = pk+1$ ويقسم q. إذن، $n_p = 1$ أو $n_p = q$. وبما أن $p > q$ فإن $n_p = 1$. ولذا فإن G تحتوي على زمرة سيلو وحيدة H من النوع p وبالتالي فإن $H \lhd G$. الآن $|G/H| = q$. ولذا بإستخدام النتيجة (٧,١٦) نجد أن كل من G/H و H زمرة قابلة للحل وبالتالي نخلص استناداً إلى المبرهنة (٧,١٢) أن G زمرة قابلة للحل.

(ب) بإستخدام مبرهنة سيلو الثالثة نجد أن $n_p = kp+1$ ويقسم qr. لنفرض أن $n_p \neq 1$، إذن $n_p = qr$ (لأن $p > q > r$). أيضاً $n_q = jq+1$ ويقسم pr. إذا كان $n_q \neq 1$ فإن $n_q = p$ أو إن $n_q = pr$ (لأن $q > r$). وبالتالي فإن $n_q \geq p$. وأيضاً، $n_r = ir+1$ ويقسم pq. إذا كان $n_r \neq 1$ فإن $n_r = q$ أو إن $n_r = p$ أو إن $n_r = pq$. وبالتالي فإن $n_r \geq q$. ولذا نجد أن G تحتوي $qr(p-1)$ عنصراً من الرتبة p ، على الأقل $p(q-1)$ عنصراً من الرتبة q وعلى الأقل $q(r-1)$ عنصراً من الرتبة r. ومنه فإن : $|G| = pqr \geq qr(p-1)+p(q-1)+q(r-1)+1$. ومنه فإن $0 \geq pq-p-q+1 = (p-1)(q-1)$ وهذا مستحيل. إذن ، $n_p = 1$ أو $n_q = 1$ أو $n_r = 1$. لنفرض أن $n_p = 1$. عندئذ، توجد زمرة سيلو وحيدة H من النوع p. ومنه فإن $H \lhd G$. وبما أن $|G/H| = qr$ فاستناداً إلى الفقرة (أ) نجد أن G/H قابلة للحل. وبما أن H

قابلة للحل أيضاً فنجد بإستخدام المبرهنة (٧,١٢) أن G زمرة قابلة للحل. وبالمثل إذا كان $n_q = 1$ أو $n_r = 1$ Δ

تمرين (٢)

بين أن الزمرة $S_3 \times S_3$ قابلة للحل وجد سلسلة قابلة للحل لها.

الحل

السلسلة $S_3 \times S_3 \geq S_3 \times A_3 \geq A_3 \times A_3 \geq A_3 \times \{e\} \geq \{e\} \times \{e\}$ قابلة للحل للزمرة $S_3 \times S_3$ وبالتالي فإن الزمرة قابلة للحل Δ

تمرين (٣)

إذا كانت G زمرة بسيطة وقابلة للحل فأثبت أن G زمرة إبدالية.

الحل

إذا كانت $G = \{e\}$ فالنتيجة واضحة. لنفرض أن $G \neq \{e\}$. ولنفرض لغرض التناقض أن G ليست إبدالية. عندئذ، $G' \neq \{e\}$. بما أن G' زمرة جزئية ناظمية من G وأن G زمرة بسيطة فإن $G = G'$. إذن، $G^{(n)} = G \neq \{e\}$ لكل عدد صحيح موجب n. وهذا يناقض قابلية الحل للزمرة G. وبالتالي فإن G زمرة إبدالية Δ

تمرين (٤)

لتكن G زمرة منتهية. أثبت أن G زمرة قابلة للحل إذا وفقط إذا كان $H' \neq H$ لكل زمرة جزئية $H \neq \{e\}$ من G.

الحل

لنفرض أولاً أن G قابلة للحل وأن $H \neq \{e\}$ زمرة جزئية من G. وبما أن G قابلة للحل فإن H قابلة للحل أيضاً. إذا كان $H' = H$ فإن $H^{(2)} = (H')' = H' = H \neq \{e\}$. وبإستخدام الإستقراء الرياضي نخلص إلى أن $H^{(n)} = H \neq \{e\}$ لكل عدد صحيح موجب n مما يناقض قابلية الحل للزمرة H. وبالتالي فإن $H' \neq H$. ولبرهان العكس نفرض أن $H' \neq H$ لكل زمرة جزئية $H \neq \{e\}$. عندئذ، $G' \neq G$ ومن ثم من $G' < G$. إذا كان $G^{(n)} \neq \{e\}$ فإن $G^{(n)} \neq G^{(n+1)}$. أي أن $G^{(n+1)} < G^{(n)}$. ولذا فإننا نحصل على السلسلة $\ldots < G^{(n+1)} < G^{(n)} < \ldots < G' < G$. وبما أن

G منتهية وأن $H' \neq H$ لكل زمرة جزئية $H \neq \{e\}$ من G فإنه يجب أن يوجد عـــدد صـــحيح موجب n بحيث يكون $G^{(n)} = \{e\}$. وبالتالي فإن G زمرة قابلة للحل Δ

تمارين (٧,٢)

(١) إذا كانت G زمرة من الرتبة p^2q حيث p و q عددان أوليان فأثبت أن G قابلة للحل.

(٢) إذا كانت G زمرة من الرتبة p^2q^2 حيث p و q عددان أوليان فأثبت أن G قابلة للحل.

(٣) أثبت أن $(GL(2,\mathbb{R}))' = SL(2,\mathbb{R})$.

(٤) إذا كان $n \geq 3$ فأثبت أن $GL(n,\mathbb{R})$ غير قابلة للحل.

(٥) أثبت أن $SL(2,3)$ قابلة للحل وأن طولها الاشتقاقي يساوي 3.

(٦) أثبت أن $GL(2,3)$ قابلة للحل وأن طولها الاشتقاقي يساوي 4.

(٧) أثبت أن $SL(2,3)$ كثيرة الدورية ولكنها ليست قابلة للحل فوقياً.

(٨) إذا كانت كل من G_i ، $1 \leq i \leq n$ قابلة للحل فأثبت أن $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ قابلة للحل.

(٩) إذا كانت كل من G_1 و G_2 قابلة للحل فأثبت أن شبه الضرب المباشر لهما زمرة قابلة للحل.

(١٠) إذا كانت كل من G_1 و G_2 كثيرة الدورية فأثبت أن شبه الضرب المباشر لهما زمرة كثيرة الدورية. استنتج أن $SL(2,3)$ كثيرة الدورية.

(١١) أثبت أن $T = \langle x, y \mid x^6 = e, x^3 = y^2, yx = x^{-1}y \rangle$ كثيرة الدورية.

(١٢) إذا كانت H زمرة جزئية من G فأثبت أن $H^{(n)} \subseteq G^{(n)}$ لكل $n \geq 0$.

(١٣) إذا كانت G زمرة فأثبت أن $G^{(n)}$ زمرة جزئية لامتغيرة تماماً لكل $n \geq 0$.

(١٤) إذا كانت $G = A \times B$ فأثبت أن $G^{(n)} = A^{(n)} \times B^{(n)}$ لكل $n \geq 0$.

(١٥) إذا كانت $G \neq \{e\}$ زمرة قابلة للحل فأثبت أن عوامل أي سلسلة تركيبية للزمرة G هي زمر دورية رتبة كل منها عدداً أولياً.

(١٦) إذا كانت كل H و K زمرة جزئية من الرتبة 12 من A_5 فأثبت أن H و K مترافقتان.

(١٧) أثبت أن $PSL(2,11)$ تحتوي على زمرتي هول من الرتبة 12 غير متماثلتين.

(١٨) بين أي من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة :

(أ) إذا كانت G زمرة من الرتبة p^2 حيث p عدداً أولياً فإن G قابلة للحل.

(ب) إذا كانت G زمرة قابلة للحل فإن G زمرة من النوع p حيث p عدد أولي.

(ت) إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $H \in Syl_p(G)$ فإن H قابلة للحل.

(ث) إذا كانت G زمرة بسيطة وقابلة للحل فإن G دورية.

(ج) إذا كانت G زمرة منتهية من النوع p فإن G قابلة للحل فوقياً.

(ح) $S_3 \times \mathbb{Z}$ قابلة للحل.

(خ) إذا كانت G زمرة غير تافهة قابلة للحل فإن $Z(G) \neq \{e\}$.

(د) إذا كانت G زمرة منتهية قابلة للحل فإنها تحق عكس مبرهنة لاجرانج.

(ذ) إذا كانت G زمرة رتبتها 35 فإن G قابلة للحل.

(٧,٣) الزمر المتلاشية
Nilpotent Groups

قدمنا في البند (٧,٢) صنف هام من الزمر وهو الزمر القابلة للحل ، ونقدم في هذا البند صنف آخر هو الزمر المتلاشية ونبين العلاقة بين هذه الزمر والزمر القابلة للحل.

تعريف (٧,١٢)

(أ) نقول إن السلسلة الناظمية $\{e\} = H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq \ldots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$ هي سلسلة مركزية **(central series)** إذا كان $H_{i+1} / H_i \leq Z(G / H_i)$ لكل $i = 0,1,\ldots,n-1$.

(ب) نقول إن الزمرة G زمرة متلاشية **(nilpotent group)** إذا وجدت سلسلة مركزية للزمرة G.

ملحوظات

(١) إذا كانت G زمرة إبدالية فإن $\{e\} \leq Z(G) = G$ سلسلة مركزية للزمرة G وبالتالي فإن G زمرة متلاشية.

(٢) إذا كانت G زمرة متلاشية فإن أي سلسلة مركزية للزمرة G هي سلسلة قابلة للحل وذلك لأن $Z(G / H_i)$ زمرة إبدالية. وبالتالي فإن أي زمرة متلاشية يجب أن تكون قابلة للحل. ولكن العكس ليس صحيحاً والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٧,١١)

الزمرة S_3 قابلة للحل ولها سلسلتين ناظميتين هما $\{e\} \leq S_3$ و $\{e\} \leq A_3 \leq S_3$. للسلسلة الأولى لدينا: $S_3/\{e\} \cong S_3 \not\leq Z(S_3/\{e\}) = \{e\}$. وأما للسلسلة الثانية فإن $A_3/\{e\} \cong A_3$ وإن $A_3 \notin Z(S_3/\{e\})$. وبالتالي فإن S_3 ليست متلاشية □

قبل أن نقدم المزيد من الأمثلة على الزمر المتلاشية نعطي تعريفان مكافئان آخران لهذه الزمر.

لتكن G زمرة. نعرف متتالية $G^{[n]}$ من الزمر الجزئية استقرائياً على النحو التالي:

$G^{[1]} = G$ و $G^{[n]} = [G^{[n-1]}, G]$ لكل $n \geq 2$.

من السهل أن نرى أن :

$$G = G^{[1]} \supseteq G^{[2]} \supseteq G^{[3]} \supseteq \ldots$$

تسمى هذه السلسلة من الزمر الجزئية ، سلسلة مركزية تنازلية للزمرة G **(descending central series of G)**. سنعرف الآن متتالية أخرى $Z_n(G)$ من الزمرة الجزئية للزمرة G استقرائياً على النحو التالي : $Z_0(G) = \{e\}$ و $Z_1(G) = Z(G)$. الآن:

بما أن $Z_1(G) \lhd G$ وأن $Z(G/Z_1(G)) \lhd G/Z_1(G)$ فإننا نجد استناداً إلى مبرهنة التقابل، زمرة جزئية ناظمية وحيدة $Z_2(G)$ من G بحيث يكون $Z_1(G) \subseteq Z_2(G)$ و $Z_2(G)/Z_1(G) = Z(G/Z_2(G))$. لنفرض الآن أن $Z_n(G)$ معرفة حيث $n \geq 1$. أي أن $Z_n(G) \lhd G$ ، $Z_{n-1}(G) \subseteq Z_n(G)$ ، $Z_n(G)/Z_{n-1}(G) = Z(G/Z_{n-1}(G))$. عندئذ ، توجد زمرة جزئية ناظمية وحيدة $Z_{n+1}(G)$ من G بحيث يكون :

$Z_n(G) \subseteq Z_{n+1}(G)$ و $Z_{n+1}(G)/Z_n(G) = Z(G/Z_n(G))$. وبالتالي فإن لدينا السلسلة الناظمية التالية من الزمر الجزئية للزمرة G :

$$\{e\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \ldots \leq Z_n(G) \leq \ldots$$

حيث $Z_{n+1}(G)/Z_n(G) = Z(G/Z_n(G))$ لكل $n \geq 0$. تسمى مثل هذه السلسلة الناظمية ، سلسلة مركزية تصاعدية للزمرة G **(ascending central series of G)** .

المبرهنة التالية تقدم لنا التكافؤ بين الزمر المتلاشية ووجود سلاسل مركزية تصاعدية وتنازلية لهذه الزمر.

مبرهنة (٧,٣٠)

إذا كانت G زمرة فإن العبارات التالية متكافئة :

(أ) G زمرة متلاشية.

(ب) يوجد عدد صحيح غير سالب n بحيث يكون $G = Z_n(G)$.

(ج) يوجد عدد صحيح غير سالب n بحيث يكون $G^{[n+1]} = \{e\}$.

البرهان

(أ) $\Leftarrow$ (ب) : بما أن G متلاشية فإنه يوجد عدد صحيح غير سالب n وسلسلة مركزية :

$$\{e\} = H_0 \le H_1 \le H_2 \le \ldots \le H_n = G$$

ولذا فإن $H_i / H_{i-1} \le Z(G / H_{i-1})$ لكل $i = 1,2,\ldots,n$. سنبرهن بالاستقراء الرياضي على i أن $H_i \le Z_i(G)$ لكل $i = 0,1,2,\ldots,n$. إذا كان $i = 0$ فإن $H_0 = \{e\} = Z_0(G)$. لنفرض الآن أن $H_i \le Z_i(G)$ حيث $i \ge 0$. بما أن $H_i H_{i+1} / H_i = H_{i+1} / H_i \le Z(G / H_i)$ فإننا نجد استناداً إلى المبرهنة (٧,٢٠ج) أن $[H_{i+1}, G] \le H_i \le Z_i(G)$. أيضاً :

$$Z_i(G)H_{i+1} / Z_i(G) \le Z(G / Z_i(G)) = Z_{i+1}(G) / Z_i(G)$$

ومنه فإن $H_{i+1} \le Z_i(G)H_{i+1} \le Z_{i+1}(G)$ ونكون قد أنهينا خطوة الاستقراء. وبما أن $H_n = G$ فإننا نخلص إلى أن $Z_n(G) = G$.

(ب) $\Leftarrow$ (أ) : بما أن $Z_n(G) = G$: $\{e\} = Z_0(G) \le Z_1(G) \le \ldots \le Z_n(G) = G$ سلسلة ناظمية بحيث إن $Z_{i+1}(G) / Z_i(G) = Z(G / Z_i(G))$ لكل $i = 0,1,\ldots,n-1$ فإننا نخلص إلى أن G زمرة متلاشية.

(أ) $\Leftarrow$ (ج) : بما أن G زمرة متلاشية فإنه توجد سلسلة مركزية :

$$\{e\} = H_0 \le H_1 \le H_2 \le \ldots \le H_n = G$$

سنبرهن الآن أن $G^{[i]} \le H_{n-i+1}$ لكل $i = 1,2,\ldots,n+1$. من الواضح أن $G^{[1]} = G = H_n$. لنفرض الآن أن $G^{[i]} \le H_{n-i+1}$ حيث $1 \le i \le n+1$. بما أن $H_{i+1} / H_i \le Z(G / H_i)$ لكل $i = 0,1,\ldots,n-1$ فإننا نجد استناداً إلى المبرهنة (٧,٢٠ج) أن $[H_{i+1}, G] \le H_i$. ولذا فإن $G^{[i+1]} = [G^{[i]}, G] \le [H_{n-i+1}, G] \le H_{n-i}$. وبالتالي نكون قد أنهينا خطوة الاستقراء ونخلص إلى أن $G^{[n+1]} \le H_0 = \{e\}$.

(ج) $\Leftarrow$ (أ) : إذا كان n عدداً صحيحاً غير سالب بحيث يكون $G^{[n+1]}=\{e\}$ فإن السلسلة $G=G^{[1]}\le\ldots\le G^{[n]}\le G^{[n+1]}=\{e\}$ سلسلة مركزية للزمرة G وبالتالي فإن G زمرة متلاشية ◆

ملحوظة

إذا عرفنا طول السلسلة المركزية على أنه أصغر عدد صحيح n بحيث يكون $H_n=G$ ، طول السلسلة المركزية التصاعدية على أنه أصغر عدد صحيح n بحيث يكون $Z_n(G)=G$ وطول السلسلة المركزية التنازلية على أنه أصغر عدد صحيح n بحيث يكون $G^{[n+1]}=\{e\}$ فإننا نجد باستخدام المبرهنة (٧,٣٠) أن هذه الأطوال متساوية للزمر المتلاشية. يسمى هذا الطول فصل تلاشي **(nilpotency class)** الزمرة المتلاشية G.

مثال (٧,١٢)

أثبت أن زمرة المرباعيات $Q_8=\langle a,b\mid a^4=e,a^2=b^2,ab=ba^{-1}\rangle$ زمرة متلاشية.

الحل

لاحظ أن $|Q_8|=8$ وأن $Z(Q_8)=\langle a^2\rangle\cong\mathbb{Z}_2$ ، $Q_8/\mathbb{Z}_2\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. وبالتالي فإن $Q_8\ge\mathbb{Z}_2\ge\{e\}$ سلسلة مركزية للزمرة Q_8 وبالتالي فهي متلاشية □

المثال (٧,١٢) حالة خاصة من المبرهنة المهمة التالية :

مبرهنة (٧,٣١)

إذا كانت G زمرة منتهية من النوع p حيث p عدداً أولياً فإن G زمرة متلاشية.

البرهان

بما أن $|G|=p^n$ حيث $n\in\mathbb{Z}^+$ فإننا نجد أن $G/Z_i(G)$ زمرة من النوع p لكل $i\ge 0$. ولذا إذا كان $|G/Z_i(G)|>1$ فإن $Z(G/Z_i(G))\ne\{e\}$. وعليه إذا كان $Z_i(G)\ne\{e\}$ فإن $|Z_{i+1}(G)|\ge p|Z_i(G)|$. ومن ثم فإن $|Z_{i+1}(G)|\ge p^{i+1}$. على وجه الخصوص $|Z_n(G)|\ge p^n$ وبالتالي فإن $Z_n(G)=G$ ونخلص إلى أن G زمرة متلاشية ◆

مبرهنة (٧,٣٢)

إذا كانت G زمرة متلاشية فإن أي زمرة جزئية من G يجب أن تكون متلاشية.

البرهان

لتكن $H \le G$. بما أن G زمرة متلاشية فإنه يوجد عدد صحيح غير سالب n بحيث يكون $G^{[n+1]} = \{e\}$. سنستخدم الاستقراء الرياضي لاثبات أن $H^{[i]} \subseteq G^{[i]}$ لكل $i = 1,2,\dots,n+1$. بما أن $H^{[1]} = H \subseteq G = G^{[1]}$ فإن العبارة صحيحة عندما $i = 1$. لنفرض الآن أن $H^{[i]} \subseteq G^{[i]}$ حيث $1 \le i < n+1$. عندئذ : $H^{[i+1]} = [H^{[i]}, H] \subseteq [G^{[i]}, G] = G^{[i+1]}$. ولذا فإن العبارة صحيحة عند $i+1$. وبالتالي فإن $H^{[n+1]} \subseteq G^{[n+1]} = \{e\}$ ونخلص إلى أن H متلاشية ◆

مبرهنة (٧,٣٣)

إذا كانت G زمرة متلاشية وكانت $H \lhd G$ فإن G/H زمرة متلاشية.

البرهان

بما أن G زمرة متلاشية فإنه توجد سلسلة مركزية للزمرة G :

$$\{e\} = H_0 \le H_1 \le \dots \le H_{n-1} \le H_n = G.$$

سنبرهن الآن أن :

$$H = H_0H/H \le H_1H/H \le \dots \le H_{n-1}H/H \le H_nH/H = G/H$$

سلسلة مركزية للزمرة G/H. بما أن $H_i \lhd G$ فإن $H_iH/H \lhd G/H$. أيضاً ، إذا كان $xH \in H_{i-1}H/H$ و $yH \in G/H$ فإن $[x,y] \in H_iH$ وأن $[xH, yH] = [x,y]H \in H_iH/H$. ولذا فإن : $[H_{i-1}H/H, G/H] \le H_iH/H$. وبالتالي باستخدام المبرهنة (٧,٢٠ج) نجد أن $H_{i+1}H/H \le Z(G/HH_i)$ ونخلص إلى أن G/H زمرة متلاشية ◆

مبرهنة (٧,٣٤)

إذا كانت كل من G_1 و G_2 زمرة متلاشية فإن $G_1 \times G_2$ زمرة متلاشية.

البرهان

باستخدام الاستقراء الرياضي نستطيع إثبات أن $Z_i(G_1 \times G_2) = Z_i(G_1) \times Z_i(G_2)$ لكل $i \ge 1$

الآن، بما أن G_1 و G_2 متلاشيتان فإنه يوجد عـــددان غـــير ســـالبين m و n بحيـــث يكـــون $Z_n(G_1)=G_1$ و $Z_m(G_1)=G_1$. لنفرض أن $k=\max\{m,n\}$. عندئذ، $Z_k(G_1)=G_1$ و $Z_k(G_2)=G_2$. وبالتالي فإن $Z_k(G_1\times G_2)=Z_k(G_1)\times Z_k(G_2)=G_1\times G_2$ ونخلص إلى أن $G_1\times G_2$ زمرة متلاشية ◆

نتيجة (٧,٣٥)

إذا كانت كل من $G_1,G_2,\dots,G_n$ زمرة متلاشية فإن $G_1\times G_2\times\dots\times G_n$ زمرة متلاشية.

البرهان

نحصل على البرهان باستخدام الاستقراء الرياضي على n والمبرهنة (٧,٢٤) ◆

(٧,٣,١) تمارين محلولة (Solved Exercises)

تمرين (١)

لتكن G زمرة منتهية. أثبت أن العبارات التالية متكافئة :

(١) G زمرة متلاشية .

(٢) إذا كانت $H<G$ فإن $H<N(H)$.

(٣) إذا كانت H زمرة جزئية أعظمية من G فإن $H\lhd G$.

(٤) إذا كانت $P\in Syl_p(G)$ فإن $P\lhd G$.

(٥) G تماثل زمرة ضرب مباشرة لزمر من النوع p.

الحل

(١) ⇐ (٢) : بما أن G متلاشية فإنه توجد سلسلة مركزية للزمرة G :

$\{e\}=H_0\le H_1\le\dots\le H_{n-1}\le H_n=G$. الآن، بما أن $H_0\le H<G=H_n$ فإنه يوجد عدد صحيح غير سالب m بحيث يكون $H_m\le H$ ولكن $H_{m+1}\not\le H$. ولذا فإنه يوجـــد $x\in H_{m+1}$ بحيث يكون $x\notin H$. بما أن $xH_m\in Z(G/H_m)$ فإن $(xH_m)(hH_m)=(hH_m)(xH_m)$ لكل $h\in H$. ومنه فإن $h^{-1}x^{-1}hx=(xh)^{-1}hx\in H_m\subseteq H$. وعليه فـــإن $x^{-1}hx\in H$ ويكـــون $x^{-1}Hx\subseteq H$. وبالمثل ، $xHx^{-1}\subseteq H$. ولـــذا فـــإن $H=x^{-1}(xHx^{-1})x\subseteq x^{-1}Hx\subseteq H$. وبالتالي فإن $x\in N(H)$ ونخلص إلى أن $H\neq N(H)$.

(٢) ⇐ (٣) : بما أن H زمرة جزئية أعظمية من G وأن $H \subset N(H) \subseteq G$ فإن $N(H) = G$. وبالتالي فإن $H \lhd G$.

(٣) ⇐ (٤) : لنفرض أن $P \in Syl_p(G)$ ولنفرض أن P غير ناظمية. بما أن G منتهية فإنه توجد زمرة جزئية أعظمية H من G بحيث يكون $N(P) \subseteq H$. ولذا بإستخدام (٣) نجد أن $H \lhd G$. لنفرض أن $x \in G$. عندئذ، $xPx^{-1} \subseteq xN(P)x^{-1} \subseteq xHx^{-1} = H$. ولذا فإن $P, xPx^{-1} \in Syl_p(H)$. وعليه يوجد $h \in H$ بحيث يكون $h(xPx^{-1})h^{-1} = P$. ومنه فإن $hx \in N(P) \subseteq H$. أي أن $x = h^{-1}hx \in H$. وبالتالي فإن $G = H$ وهذا مستحيل ونخلص إلى أن $P \lhd G$.

(٤) ⇐ (٥) : بإستخدام التمرين المحلول (٥) ص٢٢٣ نجد أن G زمرة ضرب مباشر لزمر سيلو الجزئية. وبما أن زمرة سيلو هي زمرة من النوع p فإننا نحصل على المطلوب.

(٥) ⇐ (١) : بما أن الزمر من النوع p متلاشية فإننا نجد استناداً إلى النتيجة (٧,٣٥) أن G متلاشية Δ

تمرين (٢)

إذا كانت G زمرة متلاشية من الرتبة m وكان $n \mid m$ فأثبت أن G تحتوي على زمرة جزئية من الرتبة n .

الحل

إذا كان $m = 1$ فإن $H = \{e\}$ زمرة جزئية من G رتبتها 1. لنفرض إذن أن $m > 1$ وأن $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ هو تحليل m إلى قوى عوامله الأولية. لنفرض أن $H_i \in Syl_{p_i}(G)$. عندئذ، استناداً إلى التمرين المحلول (١) نجد أن $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_t$. بما أن $n \mid m$ فإن $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_t^{\beta_t}$. الآن $|H_i| = p_i^{\alpha_i}$. ولذا فإن H_i تحتوي زمرة جزئية K_i من الرتبة $p_i^{\beta_i}$. وبالتالي فإن $K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_t$ زمرة جزئية من G رتبتها n Δ

تمارين (٧,٣)

(١) عين سلسلة مركزية تنازلية للزمرة S_3 ومن ثم استنتج أن S_3 ليست متلاشية.

(٢) عين سلسلة مركزية للزمرة D_4 .

(٣) عين سلسلة مركزية تصاعدية للزمرة $\mathbb{Z}_2 \times S_3$.

(٤) أثبت أن D_n زمرة متلاشية إذا وفقط إذا كان $n = 2^k$ حيث k عدد صحيح موجب.

(٥) إذا كانت G زمرة من الرتبة pq حيث $p > q$ عددان أوليان وحيث $p \not\equiv 1 (\bmod q)$ فأثبت أن G متلاشية.

(٦) إذا كانت $H \leq Z(G)$ وكانت G/H زمرة متلاشية فأثبت أن G زمرة متلاشية.

(٧) بين أن النتيجة في التمرين (٦) ليست صحيحة إذا كانت $H \not\leq Z(G)$.

(٨) أثبت أن A_4 ليست زمرة متلاشية.

(٩) إذا كانت G زمرة متلاشية وكانت $H < G$ بحيث إن $[G:H]$ عــدداً أوليــاً فأثبــت أن $H \lhd G$.

(١٠) إذا كانت G زمرة متلاشية منتهية وكانت H زمرة جزئية أعظميــة مــن G فأثبــت أن $[G:H]$ عدد أولي.

(١١) لتكن G زمرة ولتكن H تقاطع جميع زمر G الأعظميــة (تــسمى H زمــرة فــراتيني **Frattini** الجزئية من G).

(أ) إذا كانت G زمرة منتهية فأثبت أن H زمرة جزئية ناظمية ومتلاشية من G.

(ب) أثبت أن الزمرة المنتهية G تكون متلاشية إذا وفقط إذا كان $G' \subseteq H$.

(ج) عين H لزمرة المرباعيات Q_8.

إجابات وإرشادات لبعض التمارين

Answers and Hints for Some Exercises

تمارين (١,١)

(٤) افرض لغرض التناقض أن $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ هي جميع الأعداد الأولية واعتبر العدد $N = p_1 p_2 \dots p_k + 1$.

(٦) بما أن $a \mid c$ و $b \mid c$ فإن $c = ar = bs$ حيث $r, s \in \mathbb{Z}$. وبما أن $\gcd(a,b) = 1$ فإن $1 = ax + by$ حيث $x, y \in \mathbb{Z}$. ولذا فإننا نستنتج أن $c = ab(sx + ry)$. والعبارة خاطئة عندما يكون $\gcd(a,b) > 1$، فمثلاً $4 \mid 12$ و $6 \mid 12$ ولكن 24 لايقسم 12.

(٩) العكس غير صحيح حيث 11 عدد أولي ولكن $2^{11} - 1$ عدد مؤلف.

(١٠) إذا كان n مؤلفاً فإن $n = ab$ حيث $1 < a, b < n$. بما أن $a < n$ فإن $a \mid (n-1)!$. وبما أن $a \mid (n-1)! + 1$ فإن $a \mid 1$ وهذا مستحيل.

(١١) (أ) استخدم الاستقراء الرياضي.

تمارين (١,٢)

(٢) (أ)

$$(1\ 4\ 5) \circ (7\ 8) \circ (2\ 5\ 7) = (1\ 4\ 5\ 8\ 7\ 2)$$
$$= (1\ 2) \circ (1\ 7) \circ (1\ 8) \circ (1\ 5) \circ (1\ 4)$$

التبديل فردي ورتبته 6

(د) $o[(1\ 2\ 3) \circ (4\ 5) \circ (6\ 7\ 8\ 9)] = \operatorname{lcm}(3,2,4) = 12$

$$(1\ 2\ 3) \circ (4\ 5) \circ (6\ 7\ 8\ 9) = (1\ 3) \circ (1\ 2) \circ (4\ 5) \circ (6\ 9) \circ (6\ 8) \circ (6\ 7)$$

ولذا فإنه تبديلاً زوجياً.

(٣) (أ) $\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1} = (\alpha(2)\ \alpha(4)\ \alpha(6)) = (5\ 4\ 6)$

(ب) $\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1} = (\alpha(2)\ \alpha(3)\ \alpha(6)\ \alpha(7)) = (2\ 1\ 6\ 7)$

(٧) $\alpha = (1\ 2) \circ (5\ 6) \circ (7\ 8)$

(١٢) عدد الدورات من الطول k المختلفة هو : $\dfrac{P(n,k)}{k} = \dfrac{n!}{k(n-k)!}$

تمارين (١,٣)

(١) إبدالية وليست تجميعية .

(٢) إبدالية وتجميعية.

(٣) إبدالية وتجميعية .

(٤) ليست إبدالية وليست تجميعية.

(٥) إبدالية وتجميعية.

(٦) إبدالية وتجميعية.

(٧) إبدالية وتجميعية.

(٨) إبدالية وتجميعية.

(٩) إبدالية وتجميعية.

(١٠) إبدالية وليست تجميعية.

(١١) إبدالية وليست تجميعية.

(١٢) ليست إبدالية وليست تجميعية.

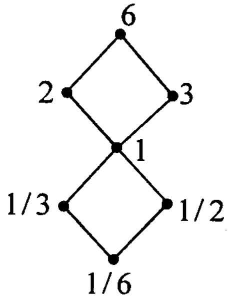
(١٣) ليست إبدالية وليست تجميعية.

(١٤) إبدالية وتجميعية.

(١٥) إبدالية وتجميعية.

تمارين (١,٤)

(٣) (ب)



(٦) (أ) بما أن $a \wedge b \leq a$ وأن $a \wedge b \leq b \vee c$ فإن $a \wedge b \leq a \wedge (b \vee c)$. وبالمثل $a \wedge c \leq a \wedge (b \vee c)$. إذن ، $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$.

(٧) (أ) إذا كانت L توزيعية فإن $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. ولذا فإن $a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. ولبرهان العكس ، لاحظ أنه من التمرين ٦ (أ) لدينا $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$. وبالتالي نحصل على المساواة من الفرض.

(٨)
$$b = b \vee (a \wedge b) = b \vee (a \wedge c) = (b \vee a) \wedge (b \vee c)$$
$$= (a \vee c) \wedge (b \vee c) = c \vee (a \wedge b) = c \vee (a \wedge c) = c$$

تمارين (٢,١)

(١) ليست زمرة لأن * ليست تجميعية ولا يوجد عنصر محايد .

(٢) ليست زمرة لأنه لا يوجد نظير للعنصر -1 .

(٣) ليست زمرة لأنه لا يوجد نظير لكل $a \neq 0$.

(٤) ليست زمرة لأنه لا يوجد نظير للعنصر 1 .

(٥) ليست زمرة لأن * ليست تجميعية.

(٦) زمرة إبدالية .

(٧) ليست زمرة ، العنصر المحايد 0 ولكن لا يوجد نظير لكل $x \in \mathbb{N}$.

(٨) ليست زمرة ، * ليست تجميعية ولا يوجد عنصر محايد.

(٩) ليست زمرة ، * ليست تجميعية.

(١٠) ليست زمرة ، * ليست تجميعية.

(١١) ليست زمرة ، * ليست تجميعية.

(١٢) زمرة إبدالية ، العنصر المحايد 0 ونظير $a \neq -1$ هو $(-a/b, 1/b)$.

(١٣) ليست زمرة ، * ليست عملية ثنائية.

(١٤) ليست زمرة ، لايوجد عنصر محايد.

(١٥) ليست زمرة ، لايوجد عنصر محايد.

(١٨) العنصر المحايد هو $(0,1)$ ونظير (a,b) هو $(\frac{a}{b}, \frac{1}{b})$.

(٢٠) لاحظ أنه لكل $e \neq A \in G$ ولكل $k \in \mathbb{Z}^+$ ، $A^k = \begin{bmatrix} 1 & kn \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(٢١) إذا كان $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ رتبته n فإن $\frac{na}{b} = 0$ ومنه فإن $a = 0$ مستحيل.

(٢٢) -1 رتبته 2.

(٢٥) (أ) * ليست تجميعية.

(٢٧) (أ) الرتب هي 6 ، 4 ، 3 على التوالي. (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ رتبته 2 .

(ج) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (د) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(٣٢) $(ab)^2 = a^2b^2 \Rightarrow abab = aabb \Rightarrow ba = ab$

(٣٣) أثبت أن $(ba)^n = (ab)^n$ وأن $(ba)^{n+1} = (ab)^{n+1}$ ومن ثم $ab = ba$.

(٣٦) أثبت أولاً أن $a^2 = e$.

(٣٧) أثبت أولاً أن $b = a^{-1}$.

(٣٨) أثبت أولاً أن $(ba)^2 = (ab)^3$ وأن $(ab)^2 = (ba)^3$.

(٤١) استخدم الاستقراء الرياضي على n .

(٤٢) إذا كان $a \in G$ فإن العناصر $e, a, a^2, \ldots, a^n$ ليست جميعها مختلفة.

(٤٣) بما أن $\gcd(m,n) = 1$ فإن $1 = ms + nt$ حيث $s, t \in \mathbb{Z}$

الآن : $x = x^{ms+nt} = x^{ms}x^{nt}$. ضع $y = x^{nt}$ و $z = x^{ms}$.

(٤٦) $g^5hg^{-5} = h^{32}$. ولذا فإن $h^{31} = e$.

(٤٧) أثبت أن $x^2y = yx^2$ ، $x^{-1}y^{-1}x = xy^{-1}x^{-1}$ ، $y^{-1}x^{-1}y = yx^{-1}y^{-1}$ ،

$(xyx^{-1}y^{-1})^2 = e$ ومن ثم استنتج أن $xy = yx$.

تمارين (٢,٢)

(٣) H و L إبداليتان ولكن K ليست إبدالية.

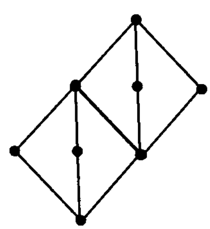
(٤) كل من H ، K ، M زمرة جزئية ولكن L ليست زمرة جزئية لأنها لاتحتوي العنصر المحايد $(1,0)$

(٨) H و N زمرة جزئية . K ليست زمرة جزئية، فعلى فرض أن $b, c \in Y$ حيث $\sigma(b) = c$ ، $\mu(b) = b$ و $\mu(c) \notin Y$ فإن $(\mu \circ \sigma)(b) = \mu(c) \notin Y$. M ليست زمرة جزئية.

(٩) لاحظ أن $H = \{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$. ولذا فهي لست زمرة جزئية من S_3 .

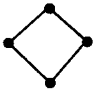
(١٠) كلاهما زمرة دورية من الرتبة 6 .

(١١)

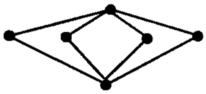


(١٢) $U_{27} = \langle [2] \rangle$ دورية رتبها 18.

(١٣) الزمر الجزئية من $\mathbb{Z}_{p^n}$ حيث p عدد أولي هي سلسلة تتكون من $(n+1)$ زمرة جزئية.

(١٤) مخطط الزمر الجزئية للزمرة $\mathbb{Z}_{pq}$ حيث p و q عددان أوليان يأخذ الشكل 

(١٧) U_n دورية إذا وفقط إذا كان $n = 2, 4, p^k, 2p^k$ حيث p عدد أولي.

(١٨)  لكل من S_3 و D_3 .

(٢٦) إذا كانت $\mathbb{Q}^*$ دورية فإن $\mathbb{Q}^* = \langle \frac{a}{b} \rangle$ حيث $\gcd(a,b) = 1$ ولذا فإن $\frac{1}{2} = (\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$.
أي أن $2a^2 = b^n$ مستحيل. أما إذا كانت $\mathbb{R}^*$ دورية نجد أن $\mathbb{Q}^*$ دورية مستحيل أيضاً.

(٢٧) S_3 أو $\mathbb{Q}_8$.

(٢٨) $H = \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle \leq GL(2, \mathbb{R})$ رتبتها 2.

(٢٩) إذا كان $|G| = n$ فإن عدد المجموعات الجزئية من G هو 2^n. لايوجد زمرة غير منتهية عدد زمرها الجزئية منته لأن $\langle a \rangle \leq G$ لكل $e \neq a \in G$.

(٣٠) $2\mathbb{Z}$.

(٣١) $\mathbb{Z}$.

(٣٣) إذا كانت G غير دورية وكان $e \neq a \neq b \in G$ فإن كل من $\langle a \rangle$ ، $\langle b \rangle$ ، $\langle ab \rangle$ زمرة جزئية فعلية من G وهذا مستحيل.

(٣٨) (ج) خذ $G = (\mathbb{Z}, +)$ و $S = \mathbb{N}$.

(٤٠) بما أن $o(x^{-1}ax) = o(a) = n$ فإن $x^{-1}ax = a$ ومن ثم فإن $a \in Z(G)$.

(٤٦) بما أن $x^{-1}Hx \subseteq H$ لكل $x \in G$ فإن $(x^{-1})^{-1}Hx^{-1} \subseteq H$. لنفرض أن $h \in H$. عندئذ، $xhx^{-1} \in H$ لكل $x \in G$. أي أن $xhx^{-1} = h_1 \in H$. ومنه فإن $h = x^{-1}h_1x \in x^{-1}Hx$.

(٤٧) $hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K = \{e\}$. ولذا فإن $hk = kh$.

(٤٨) بما أن $|H| = |xHx^{-1}|$ وأن K دورية منتهية فإنها تحتوي على زمرة وحيدة لكل رتبة. ولـــذا فإن $H = xHx^{-1}$.

(٥٣) (أ) خاطئة (ب) خاطئة (ت) صائبة
(ث) صائبة (ج) خاطئة (ح) خاطئة
(خ) خاطئة (د) صائبة (ذ) خاطئة
(ر) صائبة (ز) صائبة (س) خاطئة
(ش) خاطئة (ص) خاطئة (ض) صائبة
(ط) صائبة (ظ) خاطئة (ع) خاطئة
(غ) خاطئة (ف) صائبة

تمارين (٣,١)

(١) تشاكل أحادي . (٢) تشاكل غامر. (٣) ليست تشاكل.

(٤) تماثل. (٥) تماثل. (٦) تشاكل غامر.

(٧) تشاكل ، $\text{Ker}\varphi = 4\mathbb{Z}$ ، $\varphi(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_4$.

(٨) ليست تشاكل. (٩) تشاكل أحادي. (١٠) تماثل.

(١١) تشاكل. (١٢) ليس تشاكل. (١٣) تشاكل.

(١٤) تشاكل. (١٥) تشاكل. (١٦) تشاكل.

(١٧) تشاكل. (١٩) تشاكلان هما التافه والمحايد.

(٢٠) جميع التطبيقات الأحادية حيث $\varphi(e) = ([0],[0])$ هي تماثلات وهذه عددها $3! = 6$.

(٢١) كل من $\mathbb{Z}_6$ و $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ دورية ولذا أي تماثل φ من $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ إلى $\mathbb{Z}_6$ يتمدد تماماً بمعرفة $\varphi([1],[1])$ ويجب أن يكون مولداً للزمرة $\mathbb{Z}_6$. وبما أنه مولدات $\mathbb{Z}_6$ هي $[1]$ و $[5]$ فإنه يوجد تماثلان.

(٢٢) يوجد 4 تماثلات لأن عدد مولدات $\mathbb{Z}_{10}$ هو 4 .

(٢٣) اثنان (عدد مولدات $\mathbb{Z}_6$) .

(٢٤) أربعة تماثلات. (٢٥) أربعة تماثلات. (٢٦) عدد مولدات U_{18} .

(٢٧) عدد مولدات U_{25} . (٢٩) جميع الزمر غير متماثلة.

(٣٠) يوجد عدد غير منته من التشاكلات.

(٣١) $a = e$. (٣٦) G يجب أن تكون إبدالية.

(٣٧) $\varphi(m,n)=h^m k^n$ حيث $\varphi(m,0)=h^m$ و $\varphi(0,n)=k^n$.

(٣٨) $\mathrm{Ker}\varphi=\{x\in G: x^n=e\}$ و $\varphi(G)=\{x^n : x\in G\}$.

(٤٣) $\varphi: G\to\mathbb{R}$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ تماثل .

(٤٤) $\varphi(x,y)=(-1)^y x$ تماثل.

(٤٦) $\varphi(x)=\varphi(a)\Leftrightarrow\varphi(xa^{-1})=e_2\Leftrightarrow xa^{-1}\in K\Leftrightarrow x=ka, k\in K$.

(٤٨)

(أ) صائبة	(ب) خاطئة	(ت) صائبة
(ث) صائبة	(ج) خاطئة	(ح) صائبة
(خ) خاطئة	(د) صائبة	(ذ) صائبة
(ر) خاطئة	(ز) صائبة	(س) صائبة
(ش) صائبة	(ص) صائبة	(ض) خاطئة
(ط) خاطئة	(ظ) صائبة	(ع) صائبة
(غ) صائبة	(ف) خاطئة	

تمارين (٣,٢)

(١) $\{[0],[4],[8]\},\{[1],[5],[9]\},\{[2],[6],[10]\},\{[3],[7],[11]\}$

(٣) $H, [7]H, [13]H, [19]H$

(٤) توجد أربعة مجموعات مشاركة مختلفة والمجموعات المشاركة اليسرى لا تساوي المجموعات المشاركة اليمنى.

(٥) توجد مجموعتان مشاركتان وأن $bH=Hb$.

(١١) لا ، فمثلاً S_4 تحقق عكس مبرهنة لاجرانج ولكن A_4 لاتحقق عكس مرهنة لاجرانج.

(١٤) لاحظ أن $G=H\cup Ha=H\cup aH$ وأن $H\cap Ha=H\cap aH=\phi$. ولذا فإن $aH=G-H=Ha$.

(١٥) إذا كانت H زمرة جزئية فعلية فإن $|H|=p$ أو $|H|=q$.

(١٦) إذا كانت كل من a و b عنصر من الرتبة 2 فإن $ab\neq e$ و $(ab)^2=a^2b^2=e$ ولذا فإن $o(ab)=2$. أي أن $H=\{e,a,b,ab\}$. ومن ثم فإن $4\,|\,2n$ وهذا مستحيل لأن n فردي.

(٢٢) بما أن $|H\cap K|$ يقسم 16 فـإن $|H\cap K| = 1,2,4,8$. إذا كـان $|H\cap K|\le 4$ فـإن $|HK| \ge \frac{16\times 16}{4} = 64$ مستحيل.

(٢٤) رتبة كل من عناصر G يساوي 2 ومن ثم فإن G إبدالية.

(٢٦) $n\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$ ، $[\mathbb{Z}:n\mathbb{Z}] = n$ ولكن $\bigcap n\mathbb{Z} = \{0\}$. وبالتالي فإن دليل $\bigcap n\mathbb{Z}$ في $\mathbb{Z}$ غـير منته.

(٣١) (أ) صائبة (ب) خاطئة (ت) صائبة
(ث) صائبة (ج) خاطئة (ح) صائبة
(خ) خاطئة (د) صائبة (ذ) صائبة
(ر) خاطئة

تمارين (٣,٣)

(١) ليست ناظمية .

(٤) (ج) K ليست زمرة جزئية من G (د) L ليست ناظمية من G

(٥) $H\cap K$ ليست ناظمية من G ، فمثلاً ضـع $G = K = S_3$ و $H = \langle(2\ \ 3)\rangle$. عندئـذ ، $H\cap K = H$ ليست ناظمية من S_3.

(٨) لنفرض أن $H \le G$ وأن $g \in G$ ، $a \in H$.. بما أن $\langle a\rangle \lhd G$ فـإن $g^{-1}ag \in \langle a\rangle \subseteq H$. ولذا فإن $H \lhd G$.

(١٠) أثبت أن $[G:H] = 2$.

(١٣) لنفرض أن $e \ne a \in H$ وأن $x \in G$. عندئذ :

$$H \lhd G \Rightarrow x^{-1}ax \in H \Rightarrow x^{-1}ax = e \text{ or } x^{-1}ax = a \Rightarrow ax = xa \Rightarrow a \in Z(G)$$

(٢٠) T غير قابلة للاختزال جزئياً لأن $\langle a^3\rangle \cap \langle a^2\rangle = \{e\}$.

(٢٣) (أ) خاطئة (ب) صائبة (ت) صائبة (ث) صائبة
(ج) صائبة (ح) خاطئة (ج) خاطئة (د) خاطئة
(ذ) خاطئة (ر) صائبة

تمارين (٣,٤)

(١) (أ) 6 (ب) 15 (ج) 9 (د) 60 (هـ) 60

(٢) بما أن $o(a,b) = \text{lcm}(o(a), o(b)) = 5$ فإن $o(a) = o(b) = 5$ ويوجد 16 عنصر من هذاالنوع أو $o(a) = 5$ و $o(b) = 1$ ويوجد 4 عناصر من هذا النوع أو $o(a) = 1$ و $o(b) = 5$ ويوجد 4 عناصر من هذا النوع . ولذا فإن الزمرة تحتوي على 24 عنصر من الرتبة 5.

(٣) $\langle[3]\rangle \times \langle[5]\rangle$ زمرة جزئية رتبتها 24.

(٤) $\langle([400],[50])\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

(٥) D_{42} تحتوي على عنصر رتبته 42 ولكن لاتحتوي $D_3 \times D_7$ على عناصر من الرتبة 42.

(٦) D_6. (١١) لا ، لأن $\gcd(3,9) = 3$. (١٣) 3.

(١٥) عدد العناصر 48 وعدد الزمر الجزئية الدورية 6.

(١٦) $\langle[3]\times[4]\rangle$. (١٧) $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$

(١٩) $U_{900} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{20}$ ولذا أعلى رتبة للعناصر هي $\text{lcm}(2,6,20) = 60$.

(٢١) $n = 275$. (٢٢) $n = 49$.

(٢٧) لا : خذ $n = 4$ و $x \in H$. عندئذ $o(x^2) = 2$ ولذا فإن $x^2 \notin H$.

(٢٩) استخدم مبرهنة لاجرانج . (٣٠) نعم.

(٣٣) لا : T غير متحللة ولكنها قابلة للاختزال جزئياً.

(٣٦) $|G| = |H||K| = \dfrac{|H||K|}{|H \cap K|} = |HK|$. ولذا فإن $HK = G$ ومن ثم فإن $G = H \times K$.

(٣٨) خذ $G = \{e, (1\ 2), (3\ \ 4), (1\ \ 2)\circ(3\ \ 4)\}$ ، $H_1 = \langle(1\ \ 2)\rangle$ ، $H_2 = \langle(3\ \ 4)\rangle$ ، $H_3 = \langle(1\ \ 2)\circ(3\ \ 4)\rangle$.

(٤١) (أ) خاطئة (ب) خاطئة (ت) خاطئة (ث) خاطئة
(ج) صائبة (ح) صائبة (خ) خاطئة (د) صائبة
(ذ) صائبة (ر) خاطئة (ز) صائبة (س) خاطئة

تمارين (٣,٥)

(١) $\mathbb{Z}_4$. (٢) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. (٣) $\mathbb{Z}_{12}$. (٤) $\mathbb{Z}_2$.

(٥) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (٦) $\mathbb{Z}_4$. (٧) $\mathbb{Z}_8$. (٨) $\mathbb{Z}_8$.

(٩) $\mathbb{Z}_4$. (١٠) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. (١١) $\mathbb{Z}_4$. (١٢) $\mathbb{Z}_8$.

(١٣) $\mathbb{Z}$. (١٤) لا ، لأن رتب جميع عناصر $\mathbb{Q}$ غير منتهية.

(١٦) $Z(D_4) = \{e, a^2\}$ ، $Z(Q_8) = \langle a^2 \rangle$ ، $Z(T) = \langle a^3 \rangle$ ، $Z(S_3 \times \mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_4$ ، $Z(S_3 \times D_4) \cong \langle a^2 \rangle$.

(١٧) $Q_8' = \{e, a^2\}$ ، $GL(2,\mathbb{R})' = SL(2,\mathbb{R})$.

(٢٠) $|G/H| = n \Rightarrow (aH)^n = H \Rightarrow a^n \in H$.

(٢٦) لا : ضع $G = S_3$ ، $|K| = 2$ ، $|H| = 3$.

(٢٧) $|Z(G)| = 1, p, q, pq$. G غير إبدالية ولذا $|Z(G)| \neq pq$. إذا كان $|Z(G)| = p$ أو q فإن $G/Z(G)$ دورية ومن ثم G إبدالية. إذن $|Z(G)| = 1$.

(٣٢) بما أن G إبدالية فإن $HK \leq G$ وأن HK منتهية لأن لكل من H و K منتهية . بما أن $H, K \leq HK$ فإن $m \mid |HK|$ و $n \mid |HK|$. ولذا فإن $d \mid |HK|$. ولذا توجد زمرة جزئية من HK (ومن ثم زمرة جزئية من G) من الرتبة d.

(٣٣) $H = \{x : x^n = e\} \leq G$. بما أن $n \mid |G|$ فإنه يوجد $K \leq G$ حيث $|K| = n$. إذا كان $a \in K$ فإن $a^n = e$. ولذا فإن $K \leq H$. ومنه فإن $n \mid |H|$. أي أن $|H| = nm$ وبالتالي فإن عدد الحلول يجب أن يكون مضاعفاً للعدد n.

(٣٤) (أ) صائبة (ب) صائبة (ت) خاطئة (ث) صائبة
(ج) خاطئة (ح) صائبة (خ) خاطئة (د) صائبة
(ذ) صائبة (ر) خاطئة (ز) خاطئة

تمارين (٣,٦)

(٥) $\varphi : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^+$ بالمعرف بالقاعدة $\varphi(x) = |x|$ تشاكل غامر ، $\text{Ker}\varphi = \mathbb{Z}_2$.

(٦) $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x+iy) = x$ تشاكل غامر ، $\text{Ker}\varphi = \mathbb{R}$.

(٩) $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^+$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x+iy) = \sqrt{x^2+y^2}$ تشاكل غامر ، $\text{Ker}\varphi = U$.

(١٢) كل من $K_1 = \langle [1] \rangle$ ، $K_2 = \langle [5] \rangle$ ، $K_3 = \langle [2] \rangle$ زمر جزئية من $\mathbb{Z}_{10}$ دليلها 10 ، 5 ، 2 على التوالي. ولذا الزمر الجزئية المطلوبة هي $\varphi^{-1}(K_i)$ حيث $i = 1,2,3$.

(١٣) $\varphi^{-1}([9]) = \{[3],[13],[23]\}$.

(١٤) استخدم مبرهنة التقابل.

(١٦) إذا كان $\varphi:\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\to\mathbb{Z}_9$ تشاكل غامر فإن $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3/\mathrm{Ker}\varphi\cong\mathbb{Z}_9$. ولذا فإن $\mathrm{Ker}\varphi=\{e\}$. أي أن φ هو التشاكل التافه.

(١٩) استخدم مبرهنة التقابل .

(٢٠) $\mathbb{Q}_8$ $\{e\}$ ، $\mathbb{Z}_2$ ، $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

(٢٢) $HN/N\cong H/H\cap N=H/H\cap M\cong HM/M$.

(٢٧) $G/K\cong(G/H)/(K/H)$ دورية. وبما أن $|K/H|=2$ فإن $K/H\subseteq Z(G/H)$. ولذا فإن K/H إبدالية . وبالتالي فإن G/H إبدالية.

(٣٤)	(أ) صائبة	(ب) صائبة	(ت) صائبة	(ث) خاطئة
	(ج) صائبة	(ح) خاطئة	(خ) صائبة	(د) صائبة
	(ذ) صائبة	(ر) خاطئة	(ز) خاطئة	(س) صائبة

تمارين (٣,٧)

(٣) $Z(D_4)=Z(Q_8)\cong\mathbb{Z}_2$. ولذا فإن:

$$\mathrm{Inn}(D_4)\cong D_4/\mathbb{Z}_2\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$$
$$\mathrm{Inn}(Q_8)\cong Q_8/\mathbb{Z}_2\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$$

(١٠) (أ) إذا كان $\varphi:G\to G$ تشاكلاً وكان $a,b\in G$ فإن :

$$\varphi([a,b])=\varphi(a)\varphi(b)\varphi(a)^{-1}\varphi(b)^{-1}=[\varphi(a),\varphi(b)]\in G'$$

ولذا فإن $\varphi(G')\subseteq G'$.

(١١) إذا كان $\varphi:G\to G$ تماثلاً وكان $x\in H\cap K$ فإن $\varphi(x)\in\varphi(H)$ و $\varphi(x)\in\varphi(K)$ ولذا فإن $\varphi(x)\in H$ و $\varphi(x)\in K$. ومنه فإن $\varphi(x)\in K\cap H$. وبالتالي فإن $\varphi(H\cap K)\subseteq H\cap K$.

(١٣) بما أن $H\lhd G$ فإن $\varphi_g(H)\le H$ لكل $\varphi_g\in\mathrm{Inn}G$. وإذا فرضنا أن $\psi=\varphi_g|_H$ فإن $\psi\in\mathrm{Aut}\,H$. ولذا فإن $\psi(K)\le K$ (لأن K مميزة في H) . ولكن $\varphi_g(K)=\varphi(K)$. ولذا فإن $\varphi_g(K)\le K$ لكل $g\in G$. أي أن $gKg^{-}\subseteq K$.

(١٩)	(أ) خاطئة	(ب) صائبة	(ت) خاطئة	(ث) صائبة
	(ج) صائبة	(ح) صائبة	(خ) صائبة	(د) صائبة

تمارين (٤,١)

(٣) لنفرض أن $1 \le i, j \le n$. عندئذ، يوجد $\sigma, \gamma \in S_n$ حيث $\sigma(1) = i$ و $\gamma(1) = j$. ضع $\delta = \gamma\sigma^{-1}$ ويكون $\delta(i) = j$. أي أن S_n متعدية على $\{1, 2, ..., n\}$.

(٥) لاحظ أن $(1\ 2\ 3\ 4)^i(1) = i$ لكل $i = 1, 2, 3, 4$.

(٦) لا يمكن إيجاد i بحيث يكون $(1\ 2\ 3)^i(1) = 4$.

(١٠) إذا كان $g \in G_G$ فإن $ga = a$ لكل $g \in G$. ولذا فإن $g = e$ ومن ثم $G_G = \{e\}$.

(١١) (أ) $[e] = \{geg^{-1} : g \in G\} = \{e\} \neq G$

(ب) $[a] = \{a\} \Leftrightarrow gag^{-1} = a \ \ \forall\, g \in G \Leftrightarrow a \in Z(G)$

(١٣) $[G : H] = 5$ و 160 لايقسم $5!$.

(١٧) التطبيق $f : H \to [a]$ حيث $f(h) = ha$ تقابل.

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i] \Rightarrow |G| = \sum_{i=1}^{n} |[a_i]| = \sum_{i=1}^{n} |H| = n|H|$$

(٢١) (أ) صائبة (ب) خاطئة (ت) خاطئة (ث) صائبة

(ج) خاطئة (ح) صائبة (خ) صائبة (د) صائبة

(ذ) صائبة (ر) صائبة

تمارين (٤,٢)

(١) $[x]_H = \{hxh^{-1} : h \in H\} \subseteq \{gxg^{-1} : g \in G\} = [x]_G$. إذا كانت $G = S_3$، $x = (1\ 2)$، $H = \langle x \rangle$ فإن $|[x]_H| = 1$ ولكن $|[x]_G| = 3$.

(٦) $60 = 1 + 12 + 12 + 15 + 20$.

(٧)

تجزئة العدد 6	ممثلات فصول التوافق	عدد عناصر فصل التوافق
1,1,1,1,1,1	(1)	1
1,1,1,1,2	$(1\ 2)$	15
1,1,1,3	$(1\ 2\ 3)$	40
1,1,4	$(1\ 2\ 3\ 4)$	90
1,5	$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$	144
6	$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$	120
1,2,3	$(1\ 2) \circ (3\ 4\ 5)$	120

15	$(1\ 2)\circ(3\ 4)\circ(5\ 6)$	2,2,2
90	$(1\ 2)\circ(3\ 4\ 5\ 6)$	2,4
40	$(1\ 2\ 3)\circ(4\ 5\ 6)$	3,3
45	$(1\ 2)\circ(3\ 4)$	1,1,2,2

(٨) إفرض أن G/H تؤثر على H بالترافق.

(١١) أثبت أن $|Z(G)| = p$.

(١٤) $[G:C(a)] = |[a]| = 2$.

(٢٠) (أ) صائبة (ب) صائبة (ت) صائبة (ث) صائبة
(ج) صائبة (ح) صائبة (خ) صائبة

تمارين (٤,٣)

(١) $n_2 = 6$ كل منها تماثل $\mathbb{Z}_5$ ، $n_3 = 10$ كل منها تماثل $\mathbb{Z}_3$ ، $n_2 = 5$ كل منها تماثل $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (لاتحتوي دورات طولها 4) .

(٢) $n_3 = 10$ (٣) $n_5 = 6$

(٥) لنفرض أن $|H| = p^t$ يقسم $p^n m$. وبما أن $|P| = p^n$ وأن $P \subseteq H$ فإن $p^n \mid p^t$. إذن $|P| = |H|$ ومن ثم فإن $P = H$.

(٦) لنفرض أن $Q \in Syl_p(G)$ حيث $H \subseteq Q$. الآن ، يوجد $g \in G$ حيث $gQg^{-1} = P$. ولذا فإن $gHg^{-1} \leq gQg^{-1} = P$.

(١٧) بما أن $H \lhd G$ فإن $xHx^{-1} = H$ لكل $x \in G$. الآن :

$$P \in Syl_p(H) \Rightarrow xPx^{-1} \in Syl_p(xHx^{-1}) \Rightarrow xPx^{-1} \in Syl_p(H)$$

إذن من وحدانية P نجد أن $xPx^{-1} = P$ ومن ثم فإن $P \lhd G$.

(١٩) كل منها زمرة رتبتها pq حيث $p < q$ و $q \not\equiv 1 (\bmod p)$.

(٢٣) كل منها إبدالية بإستخدام التمرين (٢٢) ومن ثم استخدم المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية.

(٢٥) إما أن $n_7 = 1$ أو أن $n_5 = 1$ إذا فرضنا أن $n_7 = 1$ وأن $H \in Syl_p(G)$ و $K \in Syl_5(G)$ فإن $H \lhd G$ وأن $HK \leq G$ من الرتبة 35.

(٢٦) $n_5 = 1$ ولتكن $H \in Syl_5(G)$. عندئذ $H \lhd G$ و $|H| = 5^3$. ولذا توجد $K \lhd H$ حيث $|K| = 5$. لنفرض أن $L \in Syl_3(G)$. عندئذ ، $KL = LK$. ومنه $LK \leq G$ من الرتبة 15.

(٣١) $n_5 = 1$ أو $n_5 = 6$. ولذا فإنه يوجد 4 عناصر أو $6 \times 4 = 24$ عنصراً من الرتبة 5.

(٣٢) إذا كان $|Z(G)| = 4$ فإن $G / Z(G)$ دورية ومن ثم G إبدالية أي أن $G = Z(G)$ وهذا مستحيل.

(٣٣) إذا كانت $H \leq G$ رتبتها 15 فإن $[G : H] = 4$ ومن ثم فإنه يوجد تشاكل $\psi : G \to S_4$ حيث $\ker \psi \subseteq H$. ولذا فإن $\ker \psi = \{e\}$. ومنه فإن G تماثل زمرة جزئية من S_4 وهذا مستحيل لأن 60 لا يقسم 24.

(٣٦) (أ) خاطئة (ب) صائبة (ت) صائبة (ث) صائبة
(ج) خاطئة (ح) صائبة (خ) خاطئة (د) صائبة
(ذ) صائبة (ر) صائبة (ز) خاطئة

تمارين (٤,٤)

(١) $210 = 2 \times 55$ ولذا فالزمرة غير بسيطة حسب المرهنة (٤,٣٠) .

(٢) $216 = 2^3 \times 3^3$. إذا كانت $H \in Syl_3(G)$ فإن $[G : H] = 8$ وإذا كانت G بسيطة فإن $G \leq A_8$ مستحيل.

(٣) $n_5 = 1$ ولذا الزمرة غير بسيطة.

(٤) 6 أو $n_5 = 1$. لنفرض أن G بسيطة ، إذن $n_5 = 6$. ولنفرض أن $H \in Syl_5(G)$. عندئذ، $[G : N(H)] = 6$. ومن ثم $G \leq A_6$ مستحيل.

(٥) $302 = 2 \times 151$ غير بسيطة حسب المبرهنة (٤,٣٠).

(٦) $n_{13} = 1$ ولذا الزمرة غير بسيطة.

(٧) $351 = 3^3 \times 13$. إذا كان $n_3 = 1$ أو $n_{13} = 1$ فإن G ليست بسيطة . لنفرض إذن أن $n_3 = 13$ و $n_{13} = 27$. عندئذ تحتوي الزمرة على $27 \times 12 = 324$ عنصراً من الرتبة 13. لنفرض أن $H, K \in Syl_3(G)$. بما أن $|H \cap K| < |H|$ فإن $|H \cap K| \leq 9$. ولذا فإن $|H \cup K| \geq 27 + 27 - 9 = 45$. وبالتالي فإن $|G| \geq 324 + 45 = 369$ مستحيل.

(٨) $n_5 = 1$ ولذا فالزمرة غير بسيطة.

(٩) 12 أو 1 = n_{11}. إذا كانت G بسيطة وكانت $H \in Syl_{11}(G)$ فإن $[G:N(H)]=12$.
ولذا فإن $|N(G)|=33$. ومنه فإن $N(H)$ دورية تحتوي على عنصر من الرتبة 33 ولكن $G \le A_{12}$ و A_{12} لاتحتوي على عنصر من الرتبة 33 . إذن G ليست بسيطة.

(١٠) $462 = 2 \times 231$ ولذا فالزمرة غير بسيطة حسب المبرهنة (٤,٣٠).

(١١) إذا كانت G بسيطة فإن $n_7 = 15$ ، $n_5 = 21$ و $n_3 \ge 25$. إذا كان $|H_1 \cap H_2| = 1$ لكل $H_1, H_2 \in Syl_5(G)$ فإن G تحتوي على $21 \times 24 = 504$ عنصراً رتبة كل منها لايساوي 7 . و $15 \times 6 = 90$ عنصراً من الرتبة 7 ويكون $|G| \ge 525$ مستحيل. لنفرض إذن أنه يوجد $H_1, H_2 \in Syl_5(G)$ حيث $|H_1 \cap H_3| = 3$. عندئذ ، $H_1 \cap H_2 \lhd H_1, H_2$ ومنه $H_1H_2 \subset N(H_1 \cap H_2)$. ولذا فإن $|N(H_1 \cap H_2)| \ge \frac{25 \times 25}{5} = 125$ ويقسم 525. إذن $N(H_1 \cap H_2) \ge 175$ ومنه $[G:N(H_1 \cap H_2)] \le 3$ وهذا مستحيل حسب مبرهنة الدليل.

(١٢) لنفرض أن G بسيطة . عندئذ ، $n_{11} = 12$ ، $n_3 \ge 4$ ، $n_2 \ge 3$. لنفرض أن $H \in Syl_{11}(G)$. عندئذ ، $[G:N(H)] = 12$. ومنه $G \le A_{12}$. الآن ، G تحتوي على عنصر x من الرتبة 11 وعنصر y من الرتبة 2. ولذا فإن $o(xy) = 22$ وهذا مستحيل لأن A_{12} لاتحتوي على عنصر من الرتبة 22.

(١٣) $542 = 2 \times 271$ ولذا فالزمرة ليست بسيطة حسب المبرهنة (٤,٣٠).

(١٥) استخدم التمرين (١٤)

(١٧) استخدم التمرين (١٦)

(١٩) استخدم التمرين (١٨)

(٢١) استخدم التمرين (٢٠)

(٣٣) $PSL(2,11)$ زمرة بسيطة من الرتبة 660.

(٣٤) A_6 زمرة بسيطة من الرتبة 360.

(٣٥) $A'_n = A_n$ أو $A'_n = \{e\}$ (لأن $A'_n \lhd A_n$) . وبما أن A_n بسيطة فإن $A'_n = A_n$.

(٣٩) (أ) صائبة (ب) خاطئة (ت) صائبة (ث) صائبة
(ج) صائبة (ح) خاطئة (خ) صائبة (د) صائبة
(ذ) خاطئة (ر) صائبة (ز) خاطئة (س) صائبة
(ش) صائبة

تمارين (٥,١)

(١) إذا كانت $F = F(S)$ وكان $a \in S$ فإن $\langle a \rangle \le F$. ولكن لكل $r \in \mathbb{Z}^+$ ، a^r كلمة مختزلة وأن $r = s \Leftrightarrow a^r = a^s$. إذن ، $\langle a \rangle$ زمرة دورية غير منتهية ومن ثم فإن $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z} \le F$.

(٢) إذا كانت F حرة فإن $\mathbb{Z} \le F$ وهذا مستحيل.

(٨) لنفـرض أن $F = F(X)$ حيـث $|x| = n!$ ولـيكن $\varphi : X \to S_n$ تقابـل . إذن يوجـد $\psi : F(X) \to S_n$ تشاكل شامل.

(٩) $F_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ وكل مولّد يمكن إرساله لأي من عناصر $\mathbb{Z}_4$ لنحصل على تـشاكل ومـن ثم يكون عدد التشاكلات يساوي 16.

(١٠) عدد التشاكلات يساوي 36.

تمارين (٥,٢)

(١) أثبت أن العلاقات المبنية تؤدي إلى أن $a = e$.

(٥)
$$ab = b^2a = bba = ba^2b = baab \Rightarrow ba = e \Rightarrow b^{-1} = a$$
$$ab = b^2a \Rightarrow b = e, ba = a^2b \Rightarrow a = e$$

إذن $G = \{e\}$.

(١٢)
$$a^2 = b^2ab^{-1} \Rightarrow e = a^8 = (b^2ab^{-1})^4 = (bbab^{-1})^4 = b(ba)^4b^{-1}$$
$$\Rightarrow (ba)^4 = e \Rightarrow (ab)^4 = e$$
$$b^2 = a^2ba^{-1} \Rightarrow b^8 = (aaba^{-1})^4 = a(ab)^4a^{-1} = aa^{-1} = e$$

تمارين (٥,٣)

(٦) $(fg)(i) = f(i)g(i) = g(i)f(i) = (gf)(i) \; \forall i \in I$.

(٧) ضع $H = \bigcap_{i \in I} H_i$. التطبيق $\varphi : G/H \to \prod_{i \in I}(G/H_i)$ المعرف بالقاعدة $\varphi(xH) = \{(H_i, xH_i) : i \in I\}$ تشاكل أحادي.

(٨) إذا كان $\alpha : J \to I$ تقابل فإن التطبيق $\varphi : \sum_{j \in J} G \to \sum_{i \in I} G$ المعرف بالقاعدة $\varphi(g)(j) = g(\alpha(j))$ تماثل.

تمارين (٥,٤)

(١) لنفرض أن $\mathbb{Z}_3 = \langle t \rangle$. الآن

$$H \times_\varphi \mathbb{Z}_3 = \langle a, b, c, t \mid ab = c, bc = a, ca = b, t^3 = e, t^{-1}at = b, t^{-1}bt = c, t^{-1}ct = a \rangle$$
$$= \langle a, t \mid at^{-1}a = tat, t^3 = e \rangle$$

إذا كان $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $\tau = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ فإن $SL(2,3) \cong \langle \alpha, \tau \rangle$ وتحقق العلاقات أعلاه . ولـــذا فإن $H \times_\varphi \mathbb{Z}_3 \cong SL(2,3)$.

(٣) $SL(2,\mathbb{Z}_6) \cong SL(2,2) \times SL(2,3) \cong S_3 \times SL(2,3)$.

ولكن $SL(2,3) \cong Q_8 \times_\varphi \mathbb{Z}$.

(٧) يوجد أربع زمر غير متماثلة .

(٨) يوجد خمسة زمر غير متماثلة.

(٩) إذا كان $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ فإنه يوجد خمسة زمر غير متماثلة.

وإذا كان $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$ فإنه يوجد أربع زمر غير متماثلة.

تمارين (٦,١)

(١) من الرتبة p^3 : $\mathbb{Z}_{p^3}$ ، $\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p$ ، $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$

من الرتبة p^5 : $\mathbb{Z}_{p^5}$ ، $\mathbb{Z}_{p^4} \oplus \mathbb{Z}_p$ ، $\mathbb{Z}_{p^3} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$ ، $\mathbb{Z}_{p^3} \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ ، $\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p$ ، $\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ ، $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.

(٢) $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{pq}$.

(٣) $\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_q$ ، $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{pq}$.

(٩) بما أن p^2 لا يقسم n فإن $n = p_1 p_2 \ldots p_k$ ومن ثم فإن

$$G \cong \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \mathbb{Z}_{p_2} \oplus \ldots \mathbb{Z}_{p_k} \cong \mathbb{Z}_{p_1 p_2 \ldots p_k}$$

(١٠) (أ) خاطئة (ب) خاطئة (ج) صائبة (د) صائبة (هـ) صائبة

تمارين (٦,٢)

(١) $\{(1,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$ وإجابات أخرى ممكنة.

(٣) استخدم المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية منتهية التوليد .

(٧) لنفرض أن $g \in T(G)$. عندئذ ،

(لأن G/H عديمة الفتل) $o(g) < \infty \Rightarrow o(g+H) < \infty \Rightarrow g+H = H$

$$\Rightarrow g \in H \Rightarrow T(G) \subseteq H$$

(٨) $T(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(٩) التطبيق $\varphi : G \oplus H \to G/T(G) \oplus H/T(H)$ المعرف بالقاعدة:

$\varphi(g+h) = (g+T(G)+(h+T(H))$ تشاكل غامر و $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.

(١١) (أ) صائبة (ب) خاطئة (ت) صائبة (ث) صائبة (ج) خاطئة

(ح) خاطئة (خ) صائبة (د) صائبة (ذ) صائبة (ر) خاطئة

تمارين (٦,٣)

(٣) لنفرض أن $g \in T(\Sigma G_i)$. عندئذ $g \in \Sigma G_i$ و $o(g) = n$.

$$ng = 0 \Rightarrow (ng)(i) = 0 \, \forall i \in I \Rightarrow ng(i) = 0 \Rightarrow g(i) \in T(G_i)$$

وبما أن $S(g) < \infty$ فإن $g \in \Sigma T(G_i)$. ولبرهان العكس ، لاحظ أن $T(G_i)$ زمرة فتل ولذا فإن $\Sigma T(G_i)$ زمرة فتل وأن $\Sigma T(G_i) \leq \Sigma G_i$. ولذا فإن $\Sigma T(G_i) \subseteq T(\Sigma G_i)$.

(٨) استخدم تمهيدية زورن.

(٩) بما ن $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ زمرة فتل فإن $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \sum_{p \in P} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(p)$. الآن

$$\begin{aligned}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(p) &= \{x+\mathbb{Z} : o(x+\mathbb{Z}) = p^\alpha\} \\ &= \{x+\mathbb{Z} : p^\alpha x \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\frac{m}{p^\alpha} + \mathbb{Z} : 0 \leq m < p^{\alpha-1}\} \\ &= \mathbb{Z}(p^\infty)\end{aligned}$$

وبما أن $\mathbb{Q}$ قابلة للقسمة فإن $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ قابلة للقسمة . ولذا فإن $\mathbb{Z}(p^\infty)$ قابلة للقسمة.

(١٢) لاحظ أن $G = \sum_{i \in I} A_i$ حيث كل من A_i دورية غير منتهية. لنفـرض أن $K = \sum_{i \in I} \mathbb{Q}_i$.

عندئذ ، K قابلة للقسمة. وإذا كان $b_i \in \mathbb{Q}_i$ وكان $B_i = \langle b_i \rangle$ فإن

$$G = \Sigma A_i \cong \Sigma B_i \leq \Sigma \mathbb{Q}_i = K$$

(١٣) لاحظ أن $G \cong F/N$ حيث F إبدالية حرة. ولكن بإستخدام تمرين (١٢) نعلم أن $F \leq D$ حيث D قابلة للقسمة. عندئذ ، $G \cong F/N \leq D/N$ و D/N قابلة للقسمة.

(١٤) باستخدام التمرين (١٣) ، $G \le D$ حيث D قابلة للقسمة. ومن الفرض $D \cong G \oplus K$.
بما أن D قابلة للقسمة فإن G قابلة للقسمة.

(١٥) $H = \langle \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{Z}^+ \rangle < \mathbb{Q}$ و H ليست حرة.

(٢٠) $d \in D \Rightarrow d \in G = H + K \Rightarrow d = h + k, h \in H, k \in K$. بما أن $H < D$ فإن $h \in D$. ولذا فإن $k = d - h \in D$. أي أن $k \in K \cap D$. ومنه فإن $D = H + (K \cap D)$. وإذا كان $x \in H \cap (K \cap D)$ فإن $x \in H \cap K$. ومنه فإن $x = 0$. إذن ، $D = H \oplus (K \cap D)$.

(٢١) إذا كانت D هي الزمرة الجزئية الأعظمية من G والقابلة للقسمة فإن $H < D < G$. وبإستخدام تمرين (٢٠) نجد أن $D = H \oplus (K \cap D)$. وبما أن D قابلة للقسمة فإن $K \cap D$ قابلة للقسمة. وبما أن K مختزلة فإن $K \cap D = \{0\}$. إذن $D = H$ ومن ثم فإن H أعظمية.

(٢٨) $x \in nG \cap T(G) \Rightarrow x = ny, y \in G, o(x) = m$. ولذا فإن
$0 = mx = mny \Rightarrow o(y) < \infty \Rightarrow y \in T(G)$ وبالتالي فإن $x = ny \in nT(G)$.
والاتجاه الآخر واضح.

(٣٢) $nH = H \cap nK = H \cap (K \cap nG) = (H \cap K) \cap nG = H \cap nG$.

(٣٣) $n(K/H) = nK + H = (K \cap nG) + H = K \cap (nG + H) = K \cap n(G/H)$.

تمارين (٧,١)

(١) $\{e\} < \{e, (1\ 2) \circ (3\ 4)\} < \{e, (1\ 3) \circ (2\ 4), (1\ 2) \circ (3\ 4), (1\ 4) \circ (2\ 3)\} < D_4$
سلسلة ناظمية جزئياً من D_4 ولكنها ليست سلسلة ناظمية لأن $\{e, (1\ 2) \circ (3\ 4)\}$ ليست زمرة جزئية ناظمية من D_4.

(٢) (ب) $\{0\} \le 14700\mathbb{Z} \le 300\mathbb{Z} \le 60\mathbb{Z} \le 20\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$
$\{0\} \le 14700\mathbb{Z} \le 4900\mathbb{Z} \le 245\mathbb{Z} \le 49\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$

(٤) (ب) $\{e\} \le A_3 \le S_3$

(ج) إذا كانت $H_1 = \{e, (1\ 2) \circ (3\ 4)\}$ ، $H_2 = \{e, (1\ 2) \circ (2\ 4)\}$
$H_3 = \{e, (1\ 4) \circ (2\ 3)\}$ فإن سلاسل A_4 التركيبية هي :
$\{e\} \le H_i \le V \le A_4$ حيث $i = 1, 2, 3$

(٥) $\{e\} \le \langle (1\ 2\ 3) \rangle \le A_4$ سلسلة ليست ناظمية جزئياً ولكن

$\{e\} \le \langle(1\ 3)\circ(2\ 4)\rangle \le V \le A_4$ فهي ناظمية (تركيبية).

(٨) $H \le N(H) \le N(N(H)) \le \ldots \le G$ سلسلة ناظمية جزئياً.

(١٠) بما أن K زمرة جزئية ناظمية جزئياً من G فإن K احدى حدود سلسلة ناظمية جزئياً:

$\{e\} = K_0 \le K_1 \le \ldots \le K_{i-1} \le K \le K_i \le \ldots \le K_n = G$ ولذا فإن :

$$H = K_0 \cap H \le K_1 \cap H \le \ldots \le K \cap H \le \ldots \le K_n \cap H = G \cap H = H$$

وكل من $H \cap K_i \lhd H \cap K_{i+1}$ لأن $K_i \lhd K_{i+1}$.

(١١) استخدم التمرين (١٠) .

(١٢) استخدم التمرين (٦) والتمرين (١٠) .

(١٣) $G = D_4$ ، $H = \{e, a^2b\}$ ، $K = \{e, ab\}$.

(١٥) (أ) خاطئة (ب) صائبة (ج) خاطئة (د) خاطئة (هـ) صائبة

تمارين (٧,٢)

(٥) $SL(2,3)^{(2)} = Z(Q_8) = \mathbb{Z}_2$ ، $SL(2,3)^{(1)} = Q_8$ ، $e \le \mathbb{Z}_2 \le Q_8 \le SL(2,3)$ سلسلة مشتقة .

(٦) $\{e\} \le \mathbb{Z}_2 \le Q_8 \le SL(2,3) \le GL(2,3)$ سلسلة مشتقة.

(٨) إذا كانت $G = G_1 \times G_2$ فإن $G/G_1 \cong G_2$. وبما أن كل من G_1 و G_2 قابلة للحل فإن G قابلة للحل . استخدم الآن الاستقراء الرياضي.

(١٨) (أ) صائبة (ب) خاطئة (ت) صائبة (ث) صائبة
(ج) صائبة (ح) صائبة (خ) خاطئة (د) خاطئة
(ذ) صائبة

تمارين (٧,٣)

(١) $S_3^{[1]} = S_3^1 = A_3$

$S_3^{[2]} = [S_3^{[1]}] = A_3$

لأن $(1\ 2\ 3) = [(1\ 2),(1\ 3\ 2)] \in [S_3^{[1]}, S_3]$

وبالتالي فإن $S_3 \ge A_3 = A_3$ سلسلة مركزية تنازلية للزمرة S_3.

(٢) $\{e\} = H_0 \le H_1 = \{e, a^2\} \le H_2 = \{e, a, a^2, a^3\} \le D_4$

(٥) G دورية ومن ثم فهي متلاشية.

(٦) استخدم الاستقراء الرياضي على k لأثبات أنه إذا كان $xH \in Z_k(G/H)$ فإن $x \in Z_{k+1}(G)$ لكل K. ثم أثبت أن $G = Z_{n+1}(G)$.

(٧) S_3 غير متلاشية ، $A_3 \lhd S_3$ ، $A_3 \not\subseteq Z(S_3)$ ، S_3/A_3 متلاشية.

(٨) $Z_1(A_4) = \{e\}$ ولذا فإن $Z_n \neq A_4$ لكل n.

(٩) بما أن $p = [G:H] = [G:N(H)][N(H):H]$ وأن $[N(H):H] \neq 1$ فإن $[G:N(H)] = 1$. ومنه فإن $G = N(H)$. أي أن $H \lhd G$.

(١١) (ج) $H \cong \mathbb{Z}_2$

المراجع
REFERENCES

أولاً : المراجع العربية

[1] الذكير ، فوزي والسحيباني ، علي. مواضيع في الجبر (مترجم). الرياض ، منشورات جامعة الملك سعود ، ١٩٩٤م.

[2] الذكير ، فوزي وسمحان ، معروف. مقدمة في نظرية الأعداد. الطبعة الثانية ، الرياض ، دار الخريجي للنشر والتوزيع ، ٢٠٠٢م.

[3] سمحان ، معروف والذكير ، فوزي ، وأبوعمه ، عبدالرحمن. معجم العلوم الرياضية. الرياض ، منشورات جامعة الملك سعود ، ٢٠٠١م.

ثانياً : المراجع الأجنبية

[4] Aschbacher, M. The Classification of Finite Simple Groups. Mathematics Intelligencer, 3(2), 59-65, 1981.

[5] Buchthal, D.C. and Cameron E.D., Modern Abstract Algebra. PWS-Boston, 1987.

[6] Cohn, P.M. Algebra, Vols. 1 and 2. Wiley, 1974, 1977.

[7] Dean, R.A., Classical Abstract Algebra. Harper and Row, Inc., 1990.

[8] Enderton, H.B., Elements of Set Theory. Academic Press, 1977.

[9] Enderton, H.B., A Mathematical Introduction to Logic. Academic Press, 1972.

[10] Fraleigh, J.B., A First Course in Abstract Algebra. Fourth Edition, Addison-Wesley, 1989.

[11] Fuchs, L. Infinite Abelian Groups, Vols. 1 and 2, Academic Press, 1970, 1973.

[12] Gallian, J.A., Contemporary Abstract Algebra. Fourth Edition, Houghton Mifflin Company, 1998.

[13] Hall, M., The Theory of Groups. Chelsea Publishing Company, 1976.

[14] Herstein, I.N., Abstract Algebra. Macmillan Publishing Company, 1986.

[15] Hillman, A.P. and Alexanderson, G.L., A First Undergraduate Course in Abstract Algebra, Third Edition, Wadsworth, 1983.

[16] Hungerford, T.W., Algebra. Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1974.

[17] Jacobson, N. Basis Algebra, Vols. 1 and 2. Freeman, 1974, 1980.

[18] Jones, G.A. and Jones, J.M., Elementary Number Theory, Springer Verlag, 1998.

[19] Lyndon, R.C. and Schupp, P.E. Combinatorial Group Theory. Springer-Verlag, 1977.

[20] Mitchell, A.R. and Mitchell, R.W. An Introduction to Abstract Algebra, Wadsworth Publishing Company, 1970.

[21] Micheal, W. Examples of Groups, Polygonal Publishing House, 1977.

[22] Rotman, J.J. An Introductoin to The Theory of Groups. Wm. C. Brown, 1988.

[23] Saracino, D. Abstract Algebra: A First Course, Addision Wesley, 1980.

كشاف وثبت المصطلحات
Subject Index

Commutator group	١٦٤	زمرة مبدلات
Decomposable group	١٤٣	زمرة متحللة
Nilpotent group	٣٦٢	زمرة متلاشية
Reduced group	٣٢٥	زمرة مختزلة
Derived group	١٦٤	زمرة مشتقة
p-group	٢٠٣	زمرة من النوع p
Finite group	٥١	زمرة منتهية
Finitely generated group	٧١	زمرة منتهية التوليد
Subnormal group	٣٣١	زمرة ناظمية جزئياً
Pure simple group	٣٢٦	زمرة نقية بسيطة
Hall subgroup	٣٥٤	زمرة هول الجزئية

س

Equivalent series	٣٣٤	سلاسل متكافئة
Refinement series	٣٣٣	سلسلة أدق
Proper refinement series	٣٣٣	سلسلة أدق فعلياً
Composition series	٣٣١	سلسلة تركيبية
Principal series	٣٣١	سلسلة رئيسة
Solvable series	٣٤٠	سلسلة قابلة للحل
Supersolvable series	٣٤١	سلسلة قابلة للحل فوقياً
Polycyclic series	٣٤٠	سلسلة كثيرة الدورية
Central series	٣٦٢	سلسلة مركزية
Ascending central series	٣٦٣	سلسلة مركزية تصاعدية
Descending central series	٣٦٣	سلسلة مركزية تنازلية
Derived series	٣٤٧	سلسلة مشتقة
Subnormal series	٣٣١	سلسلة ناظمية جزئياً
Normal series	٣٣١	سلسلة ناظمية