الفصل الثاني : المجاميع و العودية
Summations and Recursion

عندما تتضمن الخوارزمية حلقات تكرارية مثل حلقة while أو حلقة for ، فإن زمن تنفيذها يعبر عنه كمجموع أزمنة مستهلكة على كل تكرار لجسم الحلقة .

2- 1 خواص المجاميع و أنواعها

لتكن متتالية الأعداد $a_1, a_2, ..., a_n$ ، يعبر عن المجموع المنتهى لعناصر المتتالية بالشكل: $a_1 + a_2 + ... + a_n$ أو بالشكل : $\sum_{k=1}^{n} a_k$. إذا كان n = 0 عندئذ قيمة المجموع تساوي الصفر ، و إذا كان n عدد غير صحيح عندئذ نفترض أن الحد الأعلى للمجموع $\lfloor n \rfloor$ ، و بشكل مشابه إذا بدأ المجموع بـ k = x حيث x عدد غير صحيح عندئذ نفترض أن القيمة الابتدائية للمجموع $\lfloor x \rfloor$. كما أنه يوجد قيمة معرفة جيدا للمجموع المنتهى . أما المجموع اللامنتهى للمتتالية العددية $a_1, a_2, ...$ فيعبر عنه بالسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ و التي تساوي $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$. تكون السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ متباعدة إذا كانت النهاية $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ غير موجودة و غير ذلك تكون متقاربة .

2-1-1 الخاصة الخطية Linearity

من أجل أي عدد حقيقي c و أي متتاليتين منتهيتين $a_1, a_2, ..., a_n$ و $b_1, b_2, ..., b_n$ فإن : $\sum_{k=1}^{n} (ca_k + b_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ و هذه الخاصة قابلة للتطبيق على السلاسل غير المنتهية و المتقاربة و كذلك يمكن أن تستخدم لمعالجة السلاسل المتضمنة لحدوديات التقارب ، مثلا: $\sum_{k=1}^{n} \Theta(f(k)) = \Theta(\sum_{k=1}^{n} f(k))$.

2-1-2 السلسلة الحسابية Arithmetic Series

من أجل $n \geq 1$ ، يعبر عن المجموع $1 + 2 + 3 + ... + n$ بالسلسلة $\sum_{k=1}^{n} k$

الحسابية و تعطى قيمته بالشكل : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(1+n) = \Theta(n^2)$

3-1-2 السلسلة الهندسية Geometric Series

من أجل عدد حقيقي $x \neq 1$ يعبر عن المجموع

$1 + x + x^2 + ... + x^n$ بالسلسلة الهندسية أو الآسية و $\sum_{k=0}^{n} x^k$

قيمتها : $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ و إذا كان $|x| < 1$ فإن $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x}$

4-1-2 السلسلة التوافقية Harmonic Series

ليكن n عدد صحيحا" موجبا" ، يعرف العدد التوافقي من المرتبة n بالشكل :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + O(1)$$

5-1-2 سلسلة التلسكوب Telescoping Series

لتكن المتتالية $a_0, a_1, ..., a_n$. تعطى سلسلة تلسكوب بالشكل:

$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ أو بالشكل $\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_n$.

مثلا : تعتبر السلسلة : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$ سلسلة تلسكوب لأن كل حد فيها يكتب بالشكل :

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ و بالتالي : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n}$

2-1-6 تقييد المجاميع Bounding Summations

توجد عدة تقنيات لتقييد المجموع و التي تصف أزمنة تنفيذ الخوارزميات و هي : الاستقراء الرياضي ، تقييد الحدود ، تقسيم المجاميع ، و التقريب بالتكامل.

2-1-7 الاستقراء الرياضي Mathematical Induction

يعتبر الاستقراء الرياضي من أكثر الطرق استخداما" لتقييم السلاسل . مثلا لنثبت أن $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(1+n)$. يمكننا بسهولة التحقق من أن العلاقة صحيحة من أجل n = 1 . و لنفرض جدلا" أن العلاقة محققة من أجل n و لنبرهن أنها محققة من أجل n+1 . لدينا

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

و كذلك يستخدم الاستقراء الرياضي لإيجاد الحد الأعلى (و الحد الأدنى) لسلسلة ما . مثلا : لنثبت أن $\sum_{k=0}^{n} 3^k = O(3^n)$ أي $\sum_{k=0}^{n} 3^k \le c3^n$ من أجل ثابت ما c . من أجل n = 0 ، لدينا $\sum_{k=0}^{0} 3^k = 1 \le c.1$ مادام $c \ge 1$. نفرض أن العلاقة محققة من أجل أي n ، أي أن $\sum_{k=0}^{n} 3^k = O(3^n)$ وهذا يكافئ $\sum_{k=0}^{n} 3^k \le c3^n$. و لنبرهن على صحتها من أجل n+1 . لدينا:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} 3^k &= \sum_{k=0}^{n} 3^k + 3^{n+1} \\ &\le c3^n + 3^{n+1} \\ &= (\frac{1}{3}+\frac{1}{c})c3^{n+1} \\ &\le c3^{n+1}\end{aligned}$$

مادام أن $(\frac{1}{3}+\frac{1}{c}) \le 1$ أو بشكل مكافئ ، $c \ge \frac{3}{2}$ أي أن $\sum_{k=0}^{n} 3^k = O(3^n)$

2–1–8 تقييد الحدود Bounding the terms

يمكننا الحصول على الحد الأعلى لسلسلة بتقييد كل حد في السلسلة باستخدام الحد الأكبر . مثلا : في السلسلة الحسابية : $\sum_{k=1}^{n} k \le \sum_{k=1}^{n} n = n^2$. بشكل عام ، إذا كان $a_{\max} = \max_{1 \le k \le n} a_k$ في السلسلة $\sum_{k=1}^{n} a_k$ عندئذ $\sum_{k=1}^{n} a_k \le n a_{\max}$.

تعتبر تقنيات تقييد كل حد في السلسلة بالحد الأعلى ضعيفة عندما تطبق على السلاسل الهندسية . مثلا : لتكن السلسلة $\sum_{k=0}^{n} a_k$ ، و لنفرض أن $\frac{a_{k+1}}{a_k} \le r$ من أجل $k \ge 0$ حيث r ثابت و $r < 1$. بما أن $a_k \le a_0 r^k$ عندئذ يكون :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k &\le \sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} r^k \\ &= a_0 \frac{1}{1-r}\end{aligned}$$

لنطبق هذه الطريقة لتقييد المجموع $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$.

نلاحظ أن الحد الأول $\frac{1}{3}$ ، و يكون معدل تتابع الحدود: $\frac{(k+1)/3^{k+1}}{k/3^k} = \frac{1}{3}.\frac{(k+1)}{k} \le \frac{2}{3}$ و ذلك من أجل كل $k \ge 1$.

و بالتالي فإن كل حد من حدود السلسلة مقيد بـــ : $(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^k$. لذلك :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^k = \frac{1}{3}.\frac{1}{1-2/3} = 1$$

2-1-9 تقسيم المجاميع Splitting Summations

تستخدم هذه التقنية لتقييد المجموع المعقد و التعبير عنه بمجموع سلسلتين أو أكثر و ذلك بتقسيم دليل السلسلة و من ثم تقييد كل سلسلة ناتجة . مثلا :

لتكن السلسلة $\sum_{k=1}^{n} k$ حيث إن n عدد زوجي ، عندئذ يكون:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} k + \sum_{k=\frac{n}{2}+11}^{n} k \ge \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} 0 + \sum_{k=\frac{n}{2}+11}^{n} \frac{n}{2} \ge (\frac{n}{2})^2 = \Omega(n^2)$$

إذا كان مجموع ما يعبر عن زمن تنفيذ خوارزمية ، عندئذ نقسم المجموع و يتم تجاهل العدد الثابت الذي يدل على حدود البدء . تطبق هذه التقنية عندما يكون كل حد a_k في المجموع $\sum_{k=0}^{n} a_k$ مستقلا" عن n . و بالتالي من أجل $k_0 > 0$ يمكننا كتابة :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{n} a_k = \Theta(1) + \sum_{k=k_0}^{n} a_k$$ و بما أن مجموع حدود البدء ثابت . و بذلك يمكننا تقييد المجموع $\sum_{k=k_0}^{n} a_k$

مثال : أوجد الحد الأعلى للسلسلة : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

الحل: يعطى معدل التتابع (ratio of consecutive) للحدود في السلسلة المعطاة بالشكل:

$\frac{(k+1)^2 / 2^{k+1}}{k^2 / 2^k} = \frac{(k+1)^2}{2k^2} \le \frac{9}{8}$ من أجل $k \ge 3$ ، يقسم المجموع إلى :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} \le \sum_{k=0}^{2} \frac{k^2}{2^k} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} \le O(1) + \frac{9}{8} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{8}{9})^k = O(1)$$

تستخدم تقنية تقسيم المجاميع أيضا لتحديد قيود التقارب (asymptotic bounds) في حالات أكثر تعقيدا" ، على سبيل المثال : يمكننا الحصول على قيد لـــ $O(\log_2 n)$ من السلسلة التوافقية $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ بالشكل :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \sum_{j=0}^{2^i - 1} \frac{1}{2^i + j} \le \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \sum_{j=0}^{2^i - 1} \frac{1}{2^i} \le \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} 1 \le \log n + 1$$

2–1–10 التقارب بالتكاملات Approximation by Integrals

ليكن $f(k)$ تابعا" متزايدا" باطراد ، يتم تقريب المجموع $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ بالتكاملات :

$$\int_{m}^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m-1}^{n} f(x)\,dx \qquad (1)$$

و إذا كان التابع $f(k)$ متناقصا" باطراد ، عندئذ المجموع $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ يقرب بالتكاملات :

$$\int_{m-1}^{n} f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m}^{n+1} f(x)\,dx \qquad (2)$$

لتقريب (1) يخمن العدد التوافقي من المرتبة n ، نحصل على الحد الأعلى للمجموع بالشكل :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ge \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$$

و نحصل على الحد الأدنى للمجموع بالشكل : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \le \int_{1}^{n} \frac{dx}{x} = \ln n$ و منه نجد :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le \ln n + 1$$

2–2 العلاقات العودية **Recurrences Relations**

عندما تحتوي خوارزمية على استدعاء عودي لنفسها ، فإن زمن تنفيذها يوصف بعلاقة عوديه . فالعلاقة العودية: هي مساواة أو متراجحة تصف دالة في حدود قيمتها لمدخلات أصغر. على سبيل المثال : لنفرض أن زمن تنفيذ خوارزمية ما T(n) معطى بالشكل :

$$T(n)=\begin{cases}\Theta(1) & if\ n=1\\ 2T(n/2)+\Theta(n) & if\ n>1\end{cases}$$

و لنفترض أن حل هذه العلاقة هو $T(n)=\Theta(n\log_2 n)$.

نقدم في هذا الفصل ثلاث طرق لحل العلاقات العودية : 1– طريقة التعويض (substitution method) 2– الطريقة التكرارية (iteration method) و 3– الطريقة الرئيسية (master method)

2–2–1 طريقة التعويض:

تستلزم طريقة التعويض في حل العلاقات العودية تخمين شكل الحل ومن ثم استخدام الاستقراء الرياضي لإيجاد الثوابت و إظهار أن الحل يعمل .تعتبر هذه الطريقة فعالة جدا و يفضل تطبيقها في الحالات التي يكون فيها تخمين الحل سهلا. كما يمكن لهذه الطريقة تعيين الحدود الدنيا أو العليا للعلاقة العودية :

مثال: أوجد الحد الأعلى للعلاقة العودية التالية: $T(n)=2T(\lfloor n/2\rfloor)+n$

الحل: ليكن الحل المخمن هو $T(n)=O(n\log_2 n)$. و لنثبت $T(n)\le cn\log_2 n$ من أجل اختيار مناسب للثابت $c > 0$. لنفرض أن هذا الحد محقق

من أجل $\lfloor n/2 \rfloor$. أي أن $T(\lfloor n/2 \rfloor) \le cT(\lfloor n/2 \rfloor)\log_2(\lfloor n/2 \rfloor)$. بالتعويض في العلاقة العودية :

$$\begin{aligned} T(n) &\le 2(c\lfloor n/2 \rfloor \log_2(\lfloor n/2 \rfloor)) + n \\ &\le 2cn\log_2(n/2) + n \\ &= cn\log_2 n - cn + n \\ &\le cn \ \log_2 n \end{aligned}$$

حيث إن الخطوة الأخيرة محققة مادام $c \ge 1$. لنستخدم الاستقراء في إثبات أن الحل محقق من أجل الشروط الحدية . أي أنه يجب أن نختار الثابت c كبيرا" بشكل كاف بحيث إن الحد $T(n) \le cn\log_2 n$ يعمل جيدا من أجل الشروط الحدية . هذه المتطلبات أحيانا يمكن أن تقود إلى مشكلات . فإذا كان T(1) = 1 الشرط الحدي الوحيد للعلاقة العودية . عندئذ لا يمكن اختيار c كبيرا" بشكل كاف لأن $T(1) \le c \log_2 1 = 0$.

يمكننا التغلب على هذه المشكلة وذلك بالاستفادة من مميزات حدوديات التقارب و التي تتطلب لإثبات $T(n) \le cn\log_2 n \quad for\ n \ge n_0$ حيث n_0 ثابت ، لذلك نحذف الشرط الحدي T(1) = 1 من الاعتبار في البرهان بالاستقراء و لنضمن n=2 و n=3 كجزء من الشروط الحدية في البرهان . و لندخل T(2) و T(3) كجزء من الشروط الحدية في البرهان . من العلاقة العودية نجد أن T(2) = 4 و T(3) = 5 و بالتالي البرهان بالاستقراء للمتراجحة $T(n) \le cn\log_2 n$ من أجل ثابت $c \ge 2$ يمكن أن يكتمل باختيار قيم كبيرة بشكل كاف لـــ c بحيث إن $T(2) \le c2\log_2 2$ و $T(3) \le c3\log_2 3$.

ملاحظة: إن إضافة أي حد ثابت α إلى المقدار $\lfloor n/2 \rfloor$ في العلاقة العوديـــة التاليـــة: $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$ لا يغير من حل هذه العلاقة ، لأنه عندما تكون n كبيـــرة يكون الفرق بين $T(\lfloor n/2 \rfloor)$ و $T(\lfloor n/2 \rfloor + \alpha)$ ليس كبيرا" . وبالتالي يكـــون حـــل العلاقة العودية $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor + \alpha) + n$ هو $T(n) = O(n\log_2 n)$.

مثال : بيّن أن الحد الأعلى للعلاقة : $T(n)=2T(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil)+n$ هو $O(n\log_2 n)$.

الحل: اعتمادا" على العلاقة : $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil=\begin{cases}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & if\ \ n\ is\ even \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1 & otherwise\end{cases}$ و المثال السابق نحصل على المطلوب .

مثال : بيّن أن الحد الأدنى $T(n)=2T(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil)+n$ هو $\Omega(n\log_2 n)$.

الحل:

لنثبت $T(n)\geq cn\log_2 n$ من أجل اختيار مناسب للثابت c > 0 . لنفرض أن هذا الحل محقق من أجل $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. أي أن $T(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil)\geq cT(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil)\log_2(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil)$. بالتعويض في العلاقة العودية :

$$\begin{aligned} T(n) &\geq 2(c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\log_2(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil))+n \\ &\geq 2cn\log_2(n/2)+n \\ &= cn\log_2 n-cn+n \\ &\geq cn\ \log_2 n \end{aligned}$$

حيث إن الخطوة الأخيرة محققة مادام $0<c\leq 1$. لنستخدم الاستقراء في إثبات أن الحل محقق من أجل الشروط الحدية . أي أنه يجب أن نختار الثابت c صغيرا" بشكل كاف بحيث تعمل المتراجحة $T(n)\geq cn\log_2 n$ بشكل جيد من أجل الشروط الحدية .

إذا كان T(1) = 1 فإن الشرط الحدي للعلاقة العودية يكون صحيحا" ، لأنه من أجل أي اختيار للثابت c يكون $T(1)=1\geq c\log_2 1=0$.

من أجل الاختيار $T(1)=1$ يكون T(2) = 4 و T(3) = 11 ، و بالتالي البرهان بالاستقراء للمتراجحة $T(n)\geq cn\log_2 n$ من أجل ثابت $c\leq 1$ يمكن أن يكمل باختيار قيم صغيرة بشكل كاف للثابت c بحيث إن $T(2)\geq c2\log_2 2$ و $T(3)\geq c3\log_2 3$.

ملاحظـــــة : مـــــن الأمثلـــــة الـــــسابقة نجـــــد أن حـــــل العلاقـــــة العوديـــــة $T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n$ و كذلك حل العلاقة $T(n)=2T(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil)+n$ هو $\Theta(n\log_2 n)$

ملاحظة: (تغيير المتغيرات changing variables)

باستخدام معالجة جبرية بسيطة يمكن أن تحول علاقة عودية غير معروفة إلى علاقة معروفة مثلا : لتكن العلاقة العودية التالية: $T(n)=2T(\sqrt{n})+\log_2 n$. يمكننا تبسيط هذه العلاقة من خلال تغيير للمتغير و ذلك بوضع $m=\log_2 n$ لنحصل علـــى العلاقـــة : $T(2^m)=2T(2^{m/2})+m$. بجعل $S(m)=T(2^m)$ نحصل على العلاقـــة العوديـــة المعروفـــة التاليـــة: $S(m)=2S(m/2)+m$ و بالتـــالي فـــإن حلهـــا: $S(m)=O(m\log_2 m)$ و بالتالي فإن :

$$T(n)=T(2^m)=S(m)=O(m\log_2 m)=O(\log_2 n\log_2\log_2 n)$$

2-2-2 الطريقة التكرارية Iteration Method:

يعتمد مبدأ هذه الطريقة على تمديد (تكرار) العلاقة العودية والتعبير عنها بشكل مجموع حدود يعتمد على n و الشروط الابتدائية فقط .

مثال: حل العلاقة العودية التالية:

$$T(n)=\begin{cases}0 & if\ \ n=1\\ T(n-1)+2(n-1) & otherwise\end{cases}$$

الحل: لدينا n>1 T(n) = T(n-1)+2(n-1)

بتكرار هذه العلاقة نحصل :

T (n) = T(n-2)+2(n-2)+2(n-1)
= T(n-3)+2(n-3)+ 2(n-2)+2(n-1)

نستمر بتكرار هذه العلاقة حتى نحصل على الشرط الحدي T(0) أي يتم تكرارها n مرة :

T(n) = T(n-n)+2(n-n)+2(n-(n-1))+…….+ 2(n-3)+ 2(n-2)+2(n-1)
= 0+ 2(n-n)+2(n-(n-1))+…….+ 2(n-3)+ 2(n-2)+2(n-1)

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} 2(n-i) = \sum_{j=1}^{n-1} 2j = n(n-1) = \Theta(n^2)$$ و بالتالي :

مثال: أوجد حل العلاقة العودية $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$

الحل: لنكرر هذه العلاقة كما يلي :

$$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$$
$$= n + 4(\frac{n}{2} + 4T(\frac{n}{4}))$$
$$= n + 2n + 16T(\frac{n}{4})$$
$$= n + 2n + 16(\frac{n}{4} + 4T(\frac{n}{8}))$$
$$= n + 2n + 4n + 64T(\frac{n}{8})$$
$$= 2^0 n + 2^1 n + 2^2 n + 4^3 T(\frac{n}{2^3})$$

إلى أي حدّ يجب أن نكرر العلاقة العودية قبل أن نصل إلى الشرط الحدي؟ . الحد ذو الدليل i في السلسلة يساوي $2^i n$. يقف التكرار عندما $\frac{n}{2^i} = 1$ ، أو عندما $i = \log_2 n$ ونستمر بهذا التكرار حتى القيمة $\log_2 n$ و التالي يكون :

$$T(n) = n + 2n + 4n + 8n + \ldots\ldots + 4^{\log_2 n} T(1)$$
$$T(n) = n \sum_{i=1}^{\log_2 n - 1} 2^i + n^{\log_2 4} \Theta(1)$$

$$T(n) = n\frac{1-2^{\log_2 n}}{1-2} + n^2\Theta(1)$$
$$T(n) = n(n-1) + n^2\Theta(1) = \Theta(n^2)$$

مثال: حل العلاقة العودية التالية: $T(n) = n + 3T(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor)$

الحل: لنكرر هذه العلاقة كما يلي :

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\ &= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \\ &= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3(\lfloor n/16 \rfloor + 3T(\lfloor n/64 \rfloor))) \\ &= n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 9\lfloor n/16 \rfloor + 27T(\lfloor n/64 \rfloor))) \end{aligned}$$

حيث $\lfloor n/16 \rfloor = \lfloor \lfloor n/4 \rfloor / 4 \rfloor$ و $\lfloor n/64 \rfloor = \lfloor \lfloor n/16 \rfloor / 4 \rfloor$.

إلى أي حد يجب أن نكرر العلاقة العودية قبل أن نصل إلى الشرط الحدي؟ . الحد ذو الدليل i في السلسلة يكون $3^i \lfloor n/4^i \rfloor$. يقف التكرار عندما $\lfloor n/4^i \rfloor = 1$، أو عندما i تتجاوز $\log_4 n$ ونستمر بهذا التكرار حتى هذه النقطة و باستخدام القيد $\lfloor n/4^i \rfloor \le n/4^i$ نجد :

$$T(n) \le n + 3n/4 + 9n/16 + 27n/64 + ... + 3^{\log_4 n}\Theta(1)$$
$$\le n \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} (\frac{3}{4})^i + \Theta(n^{\log_4 3})$$
$$= 4n + o(n)$$
$$= O(n).$$

ملاحظة: في العلاقات السابقة استخدمنا المتطابقة : $a^{\log_b n} = n^{\log_b n}$ لاستنتاج $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 n}$ و استخدمنا الحقيقة $\log_4 3 < 1$ لاستنتاج $\Theta(n^{\log_4 3}) = o(n)$.

مثال:

ليكن $a \ge 1,\ b > 1$ ثوابت و $f(n)$ تابعا" موجبا" معرفا" على قوى b فقط . لنعرف العلاقة العودية التالية :

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & if\ \ n = 1 \\ aT(n/b) + f(n) & if\ \ n = b^i \end{cases}$$

حيث i عدد صحيح موجب . عندئذ : $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f(n/b^j)$

الحل:

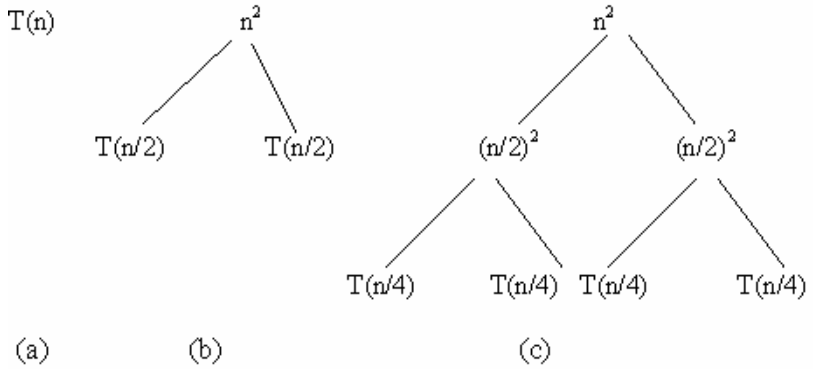
$$\begin{aligned} T(n) &= f(n) + aT(n/b) \\ &= f(n) + af(n/b) + a^2 T(n/b^2) \\ &= f(n) + af(n/b) + a^2 f(n/b^2) + ... \\ &\quad + a^{\log_b n - 1} f(n/b^{\log_b n - 1}) + a^{\log_b n} T(1). \end{aligned}$$

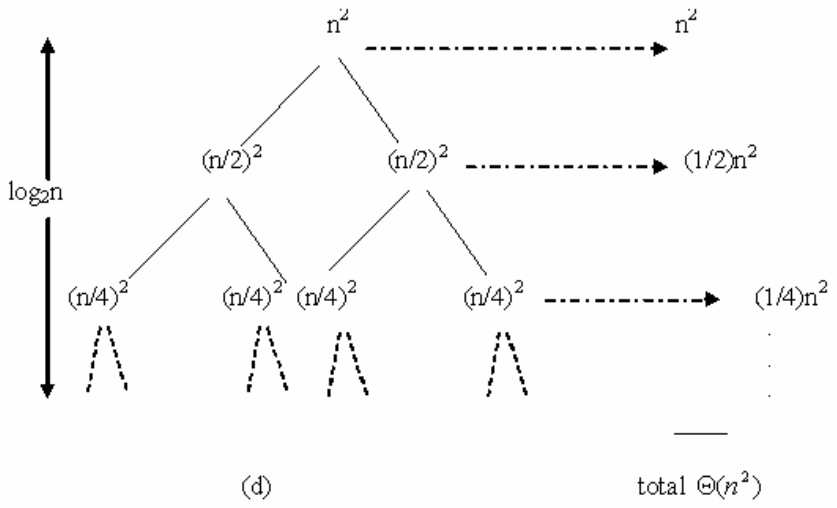
و بما أن $a^{\log_b n} = n^{\log_b n}$ ، فالحد الأخير من التعبير السابق يصبح بالشكل التالي: $a^{\log_b n} T(1) = \Theta(n^{\log_b n})$ وباستخدام الشرط الحدي $T(1) = \Theta(1)$. الحدود الباقية من التعبير يعبر عنها بالشكل: $\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f(n/b^j)$ و بالتالي :

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f(n/b^j)$$

2–2–3 الأشجار العودية Recursion Trees:

الشجرة العودية : هي طريقة ملائمة لعرض ما يحدث عندما يتم تكرار العلاقة العودية و تساعد على تنظيم العلاقات الجبرية الضرورية لحل العلاقة العودية . و تعتبر مفيدة جدا و خصوصاً عندما تصف العلاقة العودية خوارزمية مصممة بتقنية التقسيم و التجميع . الشكل (2–1) يظهر بناء شجرة عودية للعلاقة : $T(n)=2T(n/2)+n^2$.





الشكل(2-1):مراحل بناء شجرة عودية للعلاقة : $T(n)=2T(n/2)+n^2$

نفترض أن n هي قوة لـ 2 . الجزء (a) من الشكل(2-1) يبين شجرة جذرها T(n) ، و التي مددت في الجزء (b) إلى شجرة مكافئة تمثل العلاقة العودية المعطاة ، حيث الحد n^2 يكون عقدة الجذر (الكلفة في المستوي الأعلى للشجرة العودية) . و الشجرتان الفرعيتان للجذر تمثلان علاقات عودية جذر كل منهما هو T(n/2) . الجزء (c) من الشكل(2-1) يبين الشجرة الناتجة من تمديد العلاقة العودية T(n/2) .

كلفة كل عقدة جزئية في المستوي الثاني من العودية هي $(n/2)^2$. نستمر بتمديد كل عقدة في الشجرة و ذلك بتقسيمها إلى جزأين أساسين مثلما يحددان بالعلاقة العوديـــة ، حتـــى يـــتم الوصول إلى الشروط الحدية . الجزء (d) يبين الشجرة الناتجة .

يتم تقييم العلاقة العودية وذلك بجمع القيم التي على كل مستوٍ من الشجرة:

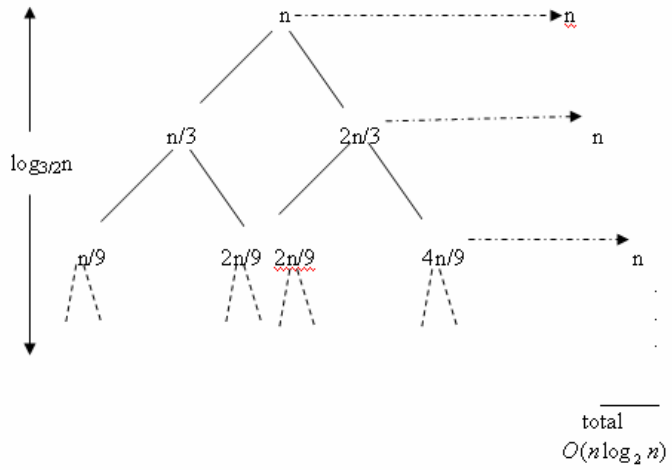
- القيمة الكلية الموجودة في المستوي الأعلى (الأول) n^2
- القيمة الكلية الموجودة في المستوي الثاني $(n/2)^2+(n/2)^2=n^2/2$
- القيمة الكلية الموجودة في المستوي الثالث:

$$(n/4)^2+(n/4)^2+(n/4)^2+(n/4)^2=n^2/4$$

وهكذا . و بما أن القيم السابقة تتناقص هندسيا و بالتالي مجموع هذه القيم : $\Theta(n^2)$

مثال

لتكن العلاقة العودية التالية: $T(n)= T(n/3)+ T(2n/3)+n$. الشكل(2-2) يمثل الـــشجرة العودية لها:



الشكل(2-2): شجرة عودية للعلاقة *T(n)=T(n/3)+2T(2n/3)+n*

عندما نضيف القيم على مستويات الشجرة العودية ، نحصل على القيمة n في كل مستوٍ . و بذلك يكون أطول مسار من عقدة الجذر إلى عقدة ورقية:

$$n \to (2/3)n \to (2/3)^2 n \to .... \to 1$$

و بما إن $(2/3)^k=1$ عندما $k = \log_{3/2}n$ ، فإن ارتفاع الشجرة يساوي $\log_{3/2}n$ ، و بنـــاء على ذلك فإن حل العلاقة العودية هو : $n\log_{3/2}n = O(n\log_2 n)$

2-2-4 الطريقة الرئيسية Master method:

تستخدم هذه الطريقة في حل العلاقات العودية التي من الــشكل : $T(n) = aT(n/b)+f(n)$ حيث $a \geq 1,\ b > 1$ ثوابت و $f(n)$ تابع موجب .
تصف العلاقة العودية السابقة زمن تنفيذ خوارزمية التي تقسم مسألة ما ذات حجم معطيات n إلى a مسألة جزئية . حجم المعطيات في كل مسألة جزئية n/b ، و تحل بشكل عودي بزمن تنفيذ قدره $T(n/b)$ ، و كذلك كلفة تقسيم المسألة و تجميع حلول المسائل الجزئية يعطى بالدالة $f(n)$. الطريقة الرئيسية تعتمد على النظرية التالية:

نظرية: لتكن $a \geq 1,\ b > 1$ ثوابت ، و لتكن $f(n)$ دالة ما موجبة ، و لتكن $T(n)$ معرفــة على مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة بالعلاقة العودية: $T(n) = aT(n/b)+f(n)$ حيث n/b يمكن أن يكون $\lfloor n/b \rfloor$ أو $\lceil n/b \rceil$ عندئذ $T(n)$ يمكن أن يحدد كما يلي:

1. إذا كان $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ حيث أن $\varepsilon > 0$ ، عندئذ
$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$
2. إذا كان $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ عندئذ $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}.\log_2 n)$.
3. إذا كــان $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ حيــث أن $\varepsilon > 0$ ، و إذا كــان $af(n/b) \leq cf(n)$ حيث c ثابت أصغر من 1 و من أجل n كبيرة بــشكل كاف ، عندئذ $T(n) = \Theta(f(n))$.

ملاحظة:

في كل حالة من الحالات الثلاثة السابقة ، نقارن الدالة $f(n)$ بـــ $n^{\log_b a}$. يحدد الحل للعلاقة العودية بأكبر التابعين . إذا كان – مثل الحالة 1– الدالة $n^{\log_b a}$ هي الأكبر ،

فعندئذ يكون الحل $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$. و إذا كانت - كما في الحالة 3 – الدالة $f(n)$ هي الأكبر ، فعندئذ يكون الحل $T(n) = \Theta(f(n))$. أما إذا كانت – مثل الحالة 2- الدالتان من نفس السعة ، فنضرب بالعامل االلوغاريتمي ، و الحل يكون $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}.\log_2 n)$.

مثال: حل العلاقة العودية التالية: $T(n)=9T(n/3)+n$

الحل:

لدينا a=9 و b=3 ، و $f(n) = n$ وبناء على ذلك يكون لدينا $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = \Theta(n^2)$. و بما أن $f(n) = O(n^{\log_3 9-\varepsilon})$ حيث $\varepsilon = 1$ ، بتطبيق الحالة 1 من النظرية السابقة نجد أن الحل : $T(n) = \Theta(n^2)$.

مثال:حل العلاقة العودية التالية: $T(n)= T(2n/3)+1$

الحل:

لدينا a=1 و b=3/2 ، و $f(n) = 1$ و $n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$. و بما أن $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(1)$ و بالتالي الحل : $T(n) = \Theta(\log_2 n)$.

مثال: حل العلاقة العودية التالية: $T(n)=3\ T(n/4)+n\log_2 n$

الحل:

لدينا a=3 و b=4 ، و $f(n) = n \log_2 n$ و $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = O(n^{0.793})$

و بما أن $f(n) = \Omega(n^{\log_4 3+\varepsilon})$ حيث $\varepsilon \approx 0.2$. و من أجل قيم كبيرة لـــــ n ، نجد : $af(n/b) = 3(n/4)\log_2(n/4) \le (3/4)n\log_2 n = cf(n)$ من أجل c=3/4 . باستخدام الحالة 3 نجد أن الحل هو : $T(n) = \Theta(n\log_2 n)$

ملاحظة:

إذا كان $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2^k n)$ ، حيث $k \geq 0$ ، عندئذ العلاقة العودية : $T(n)$ = $aT(n/b)+f(n)$ تملك الحل التالي: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2^{k+1} n)$

2-3 تمارين الفصل الثاني

تمرين 1: أثبت صحة مايلي:

$$1-\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)}=\ln(\sqrt{n})+O(n)$$

$$2-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k-1)}{2^k}=0$$

$$3-\ \sum_{k=1}^{n}O(f_k(n))=O(\sum_{k=1}^{n}f_k(n))$$

$$4-\sum_{k=1}^{n}\Omega(f_k(n))=\Omega(\sum_{k=1}^{n}f_k(n))$$

تمرين 2:

1. أثبت أن المجموع $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ مقيد من الأعلى بحد ثابت .
2. أوجد الحد الأعلى للمجموع $\sum_{k=0}^{\lfloor\log_2 n\rfloor}\left\lceil\frac{n}{2^k}\right\rceil$.
3. بين أن العدد التوافقي من المرتبة n يساوي $\Omega(\log_2 n)$ اعتمادا" على تقسيم المجاميع .
4. أوجد قيمة المجموع $\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)x^{2k}$

تمرين 3:

1. بين أن حل العلاقة $T(n)=T(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor)+1$ هو $O(\log_2 n)$.
2. بين أن حل العلاقة $T(n)=2T(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor)+n$ هو $\Omega(n\log_2 n)$ ثم استنتج أن الحل هو $\Theta(n\log_2 n)$.
3. حل العلاقة العودية $T(n)=2T(\sqrt{n})+1$.

تمرين 4:

1. باستخدام الطريقة التكرارية ، أوجد الحد الأعلى للعلاقة العودية:

$$T(n) = 3T(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + n \quad .$$

2. باستخدام مفهوم الشجرة العودية ، حل العلاقة العودية:

$$T(n) = 4T(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + n$$

3. باستخدام الطريقة التكرارية ، حل العلاقة العودية :

$T(n) = T(n-a) + T(a) + n$ حيث a ثابت و a >=1

4. استخدام مفهوم الشجرة العودية ، حل العلاقة العودية :

$T(n) = T(an) + T((1-a)n) + n$ حيث a ثابت و 0<a<1

تمرين 5: بفرض أن $0 < \alpha, \beta < 1$ و $\alpha + \beta = 1$ ولتكن العلاقة العودية :

$$T(n) = \begin{cases} 1 & if\ n = 1 \\ T(\alpha n) + T(\beta n) + cn & if\ n > 1 \end{cases}$$

حيث c عدد صحيح موجب . بين أن $T(n) = O(n \log_2 n)$.

تمرين 6: حل العلاقات العودية التالية:

1. $T(n) = \begin{cases} 1 & if\ n = 1 \\ 3T(n-1) + 2 & if\ n > 1 \end{cases}$
2. $T(n) = \begin{cases} 8 & if\ n = 1 \\ 3T(n-1) - 15 & if\ n > 1 \end{cases}$
3. $T(n) = \begin{cases} 2 & if\ n = 1 \\ T(n-1) + n - 1 & if\ n > 1 \end{cases}$
4. $T(n) = \begin{cases} 3 & if\ n = 1 \\ 3T(n-1) + 2n - 3 & if\ n > 1 \end{cases}$
5. $T(n) = \begin{cases} 1 & if\ n = 1 \\ 2T(n-1) + n - 1 & if\ n > 1 \end{cases}$

6. $T(n)=\begin{cases}5 & if\ n=1\\ 3T(n-1)+3n+1 & if\ n>1\end{cases}$
7. $T(n)=\begin{cases}1 & if\ n=1\\ 2T(n-1)+n^2-2n+1 & if\ n>1\end{cases}$
8. $T(n)=\begin{cases}1 & if\ n=1\\ nT(n-1)+n & if\ n>1\end{cases}$

تمرين 7: حل العلاقات العودية التالية باعتبار أن $T(1)=1$ وذلك من أجل $n\geq 2$

1. $T(n)=\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+1$
2. $T(n)=\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+7$
3. $T(n)=\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+n^2$
4. $T(n)=2\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+1$
5. $T(n)=\sum_{i=1}^{n-1}T(n-i)+1$
6. $T(n)=\sum_{i=1}^{n-1}(T(i)+T(n-i)+1$

تمرين 8: حل العلاقات العودية التالية باعتبار أن *T(n)* ثابت من أجل $n\leq 2$.

1. $T(n)=2T(\frac{n}{2})+n^3$
2. $T(n)=T(\frac{9n}{10})+n$
3. $T(n)=16T(\frac{n}{4})+n^2$
4. $T(n)=7T(\frac{n}{3})+n^2$

5. $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + n^2$
6. $T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n}$
7. $T(n) = 2T(n-1) + n$
8. $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$
9. $T(n) = T(n-1) + \frac{1}{n}$
10. $T(n) = T(n-1) + \log_2 n$

تمرين 9: بفرض أن $X(n)$ يمثل عدد الطرق المختلفة لوضع الأقواس على جداء مكون من n حد ، على سبيل المثال : X(1) = X(2) = 1 و X(3) = 2 (أي يوجد (xx)x, x(xx)) و X(4) = 5 (أي يوجد x((xx)x), x(x(xx)), (xx)(xx), ((xx)x)x, (x(xx))x) و المطلوب:

1. أثبت أن
$$X(n) = \begin{cases} 1 & if\ n \le 2 \\ \sum_{k=1}^{n-1} X(k).X(n-k) & if\ n > 2 \end{cases}$$
2. بين من أجل $n \ge 1$ أن $X(n) \ge 2^{n-2}$
3. أثبت أن $X(n) = \frac{1}{n}\binom{2n-1}{n-1}$

تمرين 10: بين أن عدد التوابع البوليانية بـــ n متحول يعطى بالعلاقة العودية :

$$T(n) = \begin{cases} 4 & if\ n = 1 \\ (T(n-1))^2 & if\ n > 1 \end{cases}$$

ثم حل العلاقة العودية .

تمرين 11: بين أن عدد الطرق المختلفة لضرب n مصفوفة تعطى بالعلاقة العودية :

$$T(n) = \begin{cases} 1 & if\ n = 1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} T(i)T(n-i) & if\ n > 2 \end{cases}$$

ثم بين أن $T(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

تمرين 12: تعطى متتالية أعداد فيبوناتشي ..... F_0 , F_1 , F_2 , بالقاعدة التالية :

$$F_0 = 0\ , \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

1. أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي أن : $F_n \geq 2^{0.5n}$ for $n \geq 6$
2. أوجد ثابت $c < 1$ يكون من أجله $F_n \leq 2^{cn}$ من أجل $n \geq 6$
3. أوجد أكبر قيمة لـــ c يكون من أجلها $F_n = \Omega(2^{cn})$

تمرين 13 : بفرض لديك ثلاث خوارزميات A, B, C .

- الخوارزمية A تحل المسائل التي حجم معطياتها n بتقسيمها إلى خمس مسائل جزئية حجم المعطيات في كل منها $\frac{n}{2}$ ، و تحل المسائل الجزئية بشكل عودي ، و تقوم بتجميع الحلول بزمن تنفيذ خطي .
- الخوارزمية B تحل المسائل التي حجم معطياتها n بتقسيمها إلى مسألتين جزئيتين حجم المعطيات في كل منها $n-1$ ، و تحل المسائل الجزئية بشكل عودي ، و تقوم بتجميع الحلول بزمن تنفيذ ثابت .
- الخوارزمية C تحل المسائل التي حجم معطياتها n بتقسيمها إلى تسع مسائل جزئية حجم المعطيات في كل منها $\frac{n}{3}$ ، و تحل المسائل الجزئية بشكل عودي ، و تقوم بتجميع الحلول بزمن تنفيذ تربيعي . المطلوب :

أوجد التعقيد الزمني للخوارزميات A, B, C . و رتبها ترتيباً تصاعدياً وفقاً للأفضلية .

تمـــرين 14 : الشجرة الثنائية (Binary tree) تكون ممتلئة بالعقد إذا كان عدد الأبناء في كل عقدة إما صفراً أو اثنين فقط . لتكن B_n عدد الأشجار الثنائية الممتلئة و المكونة من n عقدة.

1. ارسم الأشجار الثنائية الممتلئة بالعقد و المكونة من 3, 5, 7 عقد على التتالي ثم أوجد بدقة عدد الأشجار الثنائية الممتلئة B_3, B_5, B_7 .
2. أوجد علاقة عودية تعطي عدد B_n ، من أجل أي n .
3. بين باستخدام الاستقراء الرياضي أن $B_n = \Omega(2^n)$.