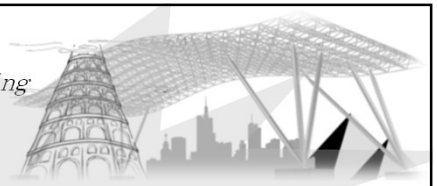
Hama University
Faculty of Civil Engineering
Department of Structural Engineering
Structural Mechanics 1



Lecture 4

Analysis of Indeterminate Structures
Three Moment Equation-1

طريقة العزوم الثلاثة في تحليل المنشآت الغير مقررة

By: Dr. Mhmoud SAUOD
Head of Structural Engineering Department

Introduction مقدمة

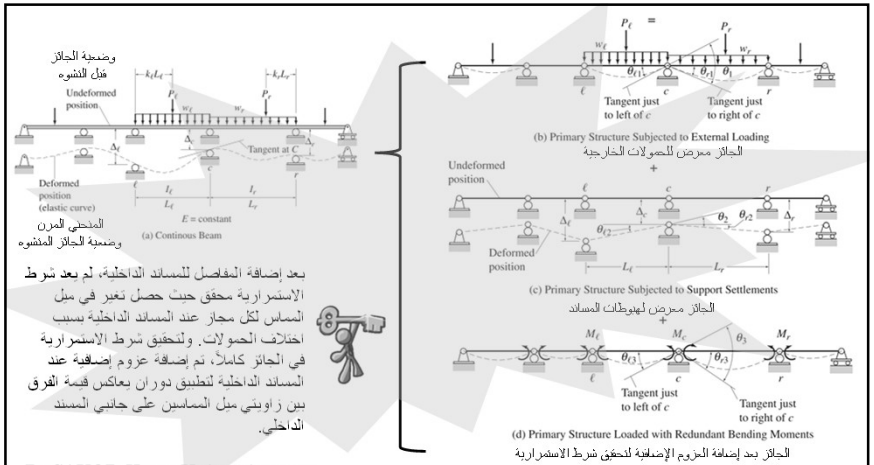
- تم طرح هذه الطريقة من قبل Clapeyron 1857 لتحليل الجوائز المستمرة.
- تعتمد بشكل رئيسي على التوافق في تشوه الجائز المستمر عند المساند الداخلية (Elastic Curve).
- تتضمن المعادلة ثلاثة عزوم انعطاف، مسند وسطي ومسندين مجاورين.
- تحت تأثير هبوطات المساند والحمولات الخارجية، فإن الجائز سيتشوه كما في الشكل.
- الخط المرن للجائز يكون مستمر عند المساند الداخلية.
- نفترض الطريقة تشكيل مفاصل عند المساند الداخلية للجائز المستمر ، وبالتالي تشكل جوائز بسيطة منفصلة.
- لكل منها خط مرن منفصل. وبالتالي لا يوجد استمرارية في الخط المرن عند المساند الداخلية. لذلك يتم إضافة عزوم إضافية لتحقيق الاستمرارية (زاوية ميل المماس للخط المرن عند المسند الوسطي من جهة اليمين يجب أن تساوي زاوية ميل المماس للخط المرن عند نفس المسند من اليسار).

$$\left.\begin{aligned}\theta_1 &= \theta_{l1} + \theta_{r1}\\ \theta_2 &= \theta_{l2} + \theta_{r2}\\ \theta_3 &= \theta_{l3} + \theta_{r3}\end{aligned}\right\} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0 \qquad (\theta_{l1} + \theta_{r1}) + (\theta_{l2} + \theta_{r2}) + (\theta_{l3} + \theta_{r3}) = 0$$

باستخدام علاقات حساب الدورانات تحت تأثير كل من الحمولات الموزعة، الحمولات المركزة، هبوط المساند.

$$\theta_{\ell 1} = \sum \frac{P_\ell L_\ell^2 k_\ell (1-k_\ell^2)}{6EI_\ell} + \frac{w_\ell L_\ell^3}{24EI_\ell} \qquad \theta_{\ell 2} = \frac{\Delta_\ell - \Delta_c}{L_\ell} \qquad \theta_{\ell 3} = \frac{M_\ell L_\ell}{6EI_\ell} + \frac{M_c L_\ell}{3EI_\ell}$$

$$\theta_{r1} = \sum \frac{P_r L_r^2 k_r (1-k_r^2)}{6EI_r} + \frac{w_r L_r^3}{24EI_r} \qquad \theta_{r2} = \frac{\Delta_r - \Delta_c}{L_r} \qquad \theta_{r3} = \frac{M_c L_r}{3EI_r} + \frac{M_r L_r}{6EI_r}$$



بعد إضافة المفاصل للمساند الداخلية، لم يعد شرط الاستمرارية محقق حيث حصل تغير في ميل المماس لكل مجاز عند المساند الداخلية بسبب اختلاف الحمولات. ولتحقيق شرط الاستمرارية في الجائز كاملاً، تم إضافة عزوم إضافية عند المساند الداخلية لتطبيق دوران يعاكس قيمة الفرق بين زاويتي ميل المماسين على جانبي المسند الداخلي.

$$\sum \frac{P_\ell L_\ell^2 k_\ell (1-k_\ell^2)}{6EI_\ell} + \frac{w_\ell L_\ell^3}{24EI_\ell} + \sum \frac{P_r L_r^2 k_r (1-k_r^2)}{6EI_r} + \frac{w_r L_r^3}{24EI_r} + \frac{\Delta_l - \Delta_c}{L_\ell} + \frac{\Delta_r - \Delta_c}{L_r} + \frac{M_\ell L_\ell}{6EI_\ell} + \frac{M_c L_\ell}{3EI_\ell} + \frac{M_c L_r}{3EI_r} + \frac{M_r L_r}{6EI_r} = 0$$

$$\frac{M_\ell L_\ell}{I_\ell} + 2M_c\left(\frac{L_\ell}{I_\ell} + \frac{L_r}{I_r}\right) + \frac{M_r L_r}{I_r} = -\sum \frac{P_\ell L_\ell^2 k_\ell}{I_\ell}(1-k_\ell^2) - \sum \frac{P_r L_r^2 k_r}{I_r}(1-k_r^2) - \frac{w_\ell L_\ell^3}{4I_\ell} - \frac{w_r L_r^3}{4I_r} - 6E\left(\frac{\Delta_\ell - \Delta_c}{L_\ell} + \frac{\Delta_r - \Delta_c}{L_r}\right)$$

- M_c عزم الانعطاف عند المسند C.
- M_l, M_r عزوم الانعطاف عند المساند المجاورة للمسند C.
- L_l, L_r طول المجازات المجاورة للمسند C.
- I_l, I_r عزوم العطالة للمجازات المجاورة للمسند C.
- P_l, P_r القوى المركزة في المجازات المجاورة للمسند C.
- K_l, K_r نسبة المسافة للحمولة P من اليسار أو يمين المسند.
- Δ_l, Δ_r هبوطات المساند المجاورة للمسند C.
- E معامل المرونة
- Δ_c هبوط المسند C

خطوات الحل Procedure

- رسم مخطط عزم الانعطاف لكل مجاز بشكل مستقل وكأنها جوائز بسيطة.
- نحسب لكل مخطط مساحته وموكز ثقله.
- كتابة معادلة العزوم الثلاثة لكل ثلاث مساند متتالية بتداخل مسند وحيد.

$A,B,C \Rightarrow B,C,D \Rightarrow C,D,E$

في حالة هبوطات المساند

$$M_1\left(\frac{L_1}{I_1}\right)+2M_2\left(\frac{L_1}{I_1}+\frac{L_2}{I_2}\right)+M_3\left(\frac{L_3}{I_3}\right)=-6\left[\left(\frac{A_1.a_1}{L_1.I_1}\right)+\left(\frac{A_2.a_2}{L_2.I_2}\right)\right]+\boxed{6E\left[\frac{\Delta_1}{L_1}+\frac{\Delta_2}{L_2}\right]}$$

a_1 بعد مركز ثقل المخطط الأيسر عن المسند الأيسر

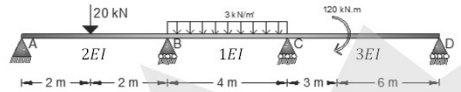
a_2 بعد مركز ثقل المخطط الأيمن عن المسند الأيمن

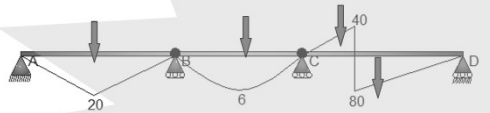
تم افتراض أن الجهة الموجبة للعزم من الأسفل و الجهة السالبة من الأعلى. ويجب أخذ جهة مخططات العزوم بعين الاعتبار في المعادلة من خلال الانتباه للإشارة.

EXAMPLE

يُطلب رسم مخطط عزوم الانعطاف النهائية للجائز المجاور وفق طريقة العزوم الثلاثة؟

ANSWER





$$A=\frac{20\times4}{2}=40 \qquad A=\frac{2\times6\times4}{3}=16 \qquad A=\frac{80\times6}{2}=240$$

$$A=\frac{40\times3}{2}=60$$

كتابة معادلة العزوم الثلاثة للجزء ABC.

$$M_1\left(\frac{L_1}{I_1}\right)+2M_B\left(\frac{4}{2I}+\frac{4}{I}\right)+M_C\left(\frac{4}{I}\right)=-6\left[\left(\frac{40\times2}{4\times2I}\right)+\left(\frac{16\times2}{4\times I}\right)\right]$$

$$12M_B+4M_C=-108\ \ldots\ldots\ldots(1)$$

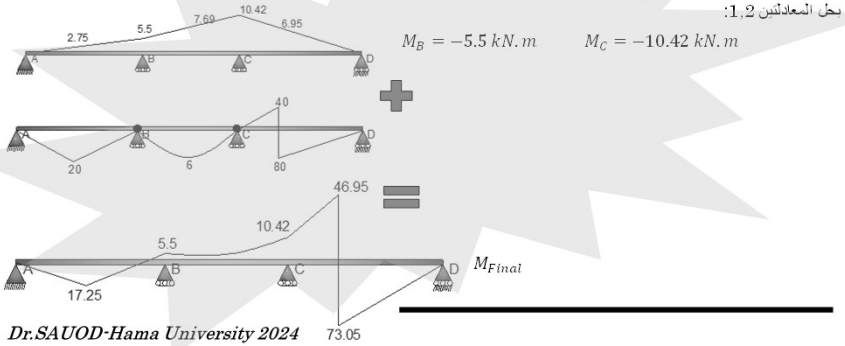
كتابة معادلة العزوم الثلاثة للجزء BCD.

$$M_B\left(\frac{4}{I}\right)+2M_C\left(\frac{4}{I}+\frac{9}{3I}\right)+M_3\left(\frac{L_3}{I_3}\right)=-6\left[\left(\frac{16\times2}{4\times I}\right)+\left(\frac{-60\times7+240\times4}{9\times3I}\right)\right]$$

$$4M_B+14M_C=-168\ \ldots\ldots\ldots(2)$$

بحل المعادلتين 1,2:

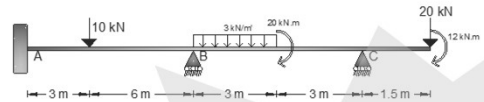
$$M_B=-5.5\ kN.m \qquad M_C=-10.42\ kN.m$$



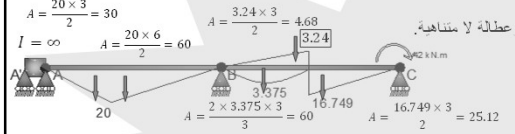
EXAMPLE

يُطلب رسم مخطط عزوم الانعطاف النهائية للجائز المجاور وفق طريقة العزوم الثلاثة؟

ANSWER



- نُحول الونافة إلى حائز بسيط قصير جداً وعطالة لا متناهية.
- نُنقل حمولات الطفر إلى المسند المجاور.



كتابة معادلة العزوم الثلاثة للجزء A'AB.

$$M_1\left(\frac{L_1}{I_1}\right)+2M_A\left(\frac{L}{\infty}+\frac{9}{I}\right)+M_B\left(\frac{9}{I}\right)=-6\left[0+\left(\frac{30\times7+60\times4}{9\times I}\right)\right]$$

$$18M_A+9M_B=-300\ \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$M_C=-42$$

كتابة معادلة العزوم الثلاثة للجزء ABC.

$$M_A\left(\frac{9}{I}\right)+2M_B\left(\frac{9}{I}+\frac{6}{I}\right)+M_C\left(\frac{6}{I}\right)=-6\left[\left(\frac{30\times2+60\times5}{9\times I}\right)+\left(\frac{25.12\times2+6.75\times4.5-4.68\times4}{6\times I}\right)\right]$$

$$9M_A+30M_B=-49.155\ \ldots\ldots\ldots(2)$$

يُطلب رسم مخطط عزوم الانعطاف النهائية للجائز المجاور، الناتج عن هبوط المسند B بمقدار 2Cm و المسند C بمقدار 1Cm؟

EXAMPLE

ANSWER

$EI = 10^4\ kN.m^2$

- نعتبر أن منسوب المسند الوسطي صفر، وبناءً عليه نقيس مناسيب المسندين الأيمن والأيسر.

كتابة معادلة العزوم الثلاثة للجزء ABC.

$$M_1\left(\frac{1}{I_1}\right) + 2M_B\left(\frac{8}{2I} + \frac{6}{3I}\right) + M_C\left(\frac{6}{3I}\right) = -6[0 + 0] + 6E\left[\frac{0.02}{8} + \frac{0.01}{6}\right]$$

$$12M_B + 2M_C = 0.025EI \ldots\ldots\ldots (1)$$

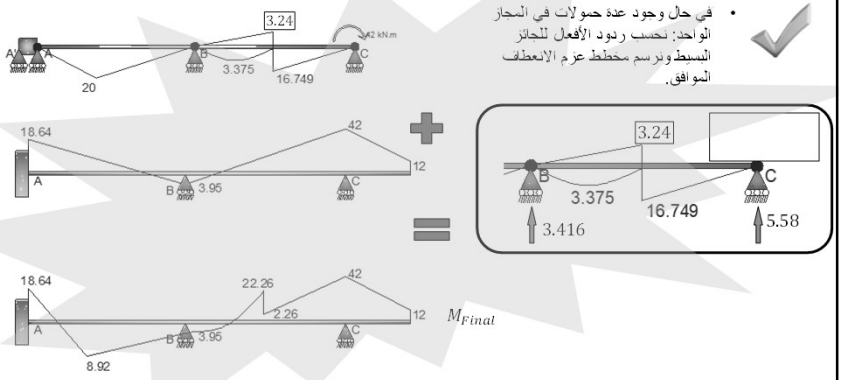
كتابة معادلة العزوم الثلاثة للجزء BCD .

$$M_B\left(\frac{6}{3I}\right) + 2M_C\left(\frac{6}{3I} + \frac{4}{I}\right) + M_D\left(\frac{4}{I}\right) = -6[0 + 0] + 6E\left[\frac{-0.01}{6} + \frac{0.01}{4}\right]$$

$$2M_B + 12M_C = 0.005EI \ldots\ldots\ldots (2)$$

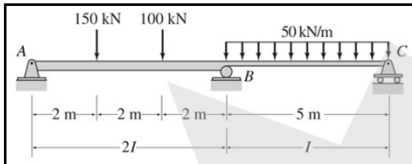
$M_A = -18.64\ kN.m$ $M_B = 3.95\ kN.m$ $M_C = -42\ kN.m$

- في حال وجود عدة حمولات في المجاز الواحد: نحسب ردود الأفعال للجائز البسيط ونرسم مخطط عزم الانعطاف الموافق.

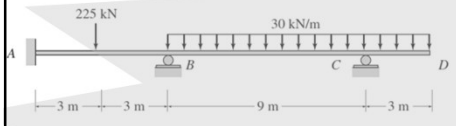


يُطلب رسم مخطط عزوم الانعطاف النهائية للجائز المجاور وفق طريقة العزوم الثلاثة؟

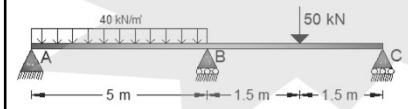
- نحت تأثير الحمولات الخارجية وهبوط المسند C بمقدار 15mm؟

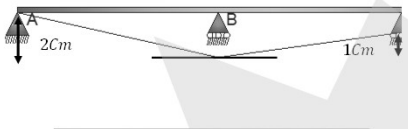


- نحت تأثير الحمولات الخارجية وهبوط المسند C بمقدار 50 mm؟



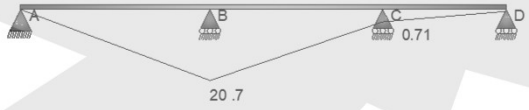
- نحت تأثير الحمولات الخارجية وهبوط المسند A بمقدار 10 mm وارتفاع بالمسند C بمقدار 5mm؟



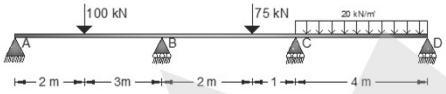


$M_B = 20.7\ kN.m$

$M_C = 0.71\ kN.m$



M_{Final}



- تحت تأثير الحمولات الخارجية وهبوط المسند B بمقدار 30 mm وهبوط بالمسند D بمقدار 7mm؟

End of 4^{th} Lecture نهاية المحاضرة الرابعة