المحاضرة 4

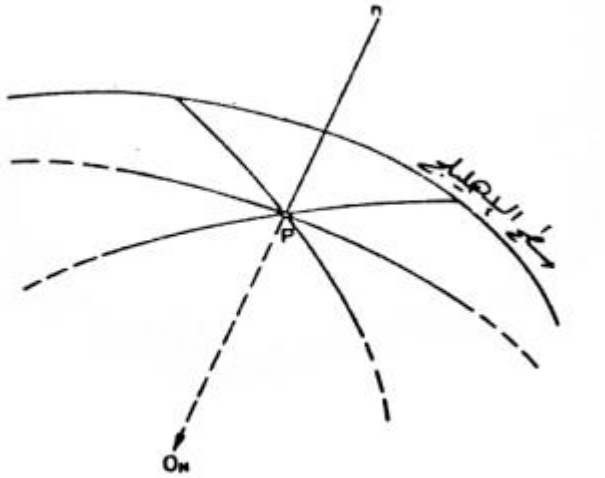
المسألتين الأساسيتين في الجيوديزيا

د.م. دارين جابر نوفل

18/11/2024/

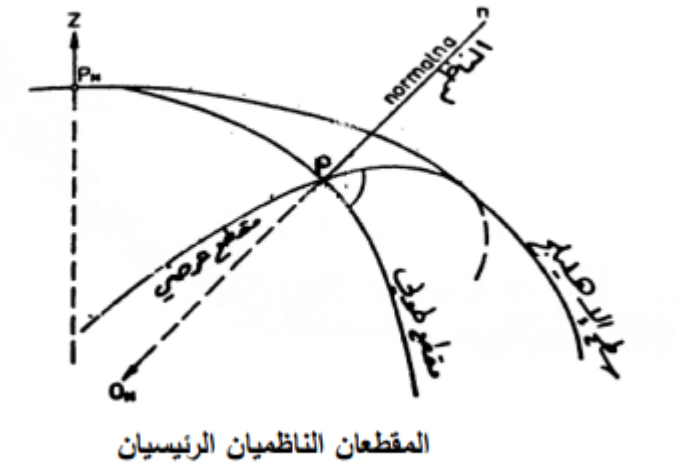
المقاطع الناظمية للإهليلج الدوراني

يمكن في كل نقطة من سطح الإهليلج إنشاء الناظم عليه، ومن هذا الناظم المار في النقطة يمر عدد لانهائي من المستويات التي يعطي تقاطعها مع السطح عدد غير محدد من المنحنيات المختلفة، تدعى هذه المستويات بالنواظم وتدعى المنحنيات الناتجة باسم **المقاطع الناظمية.** على **الكرة** تكون المقاطع الناظمية عبارة عن دوائر كبيرة، لأن الناظم في كل نقطة من السطح يمر من مركز الكرة.



المقاطع الناظمية المارة من النقطة P.

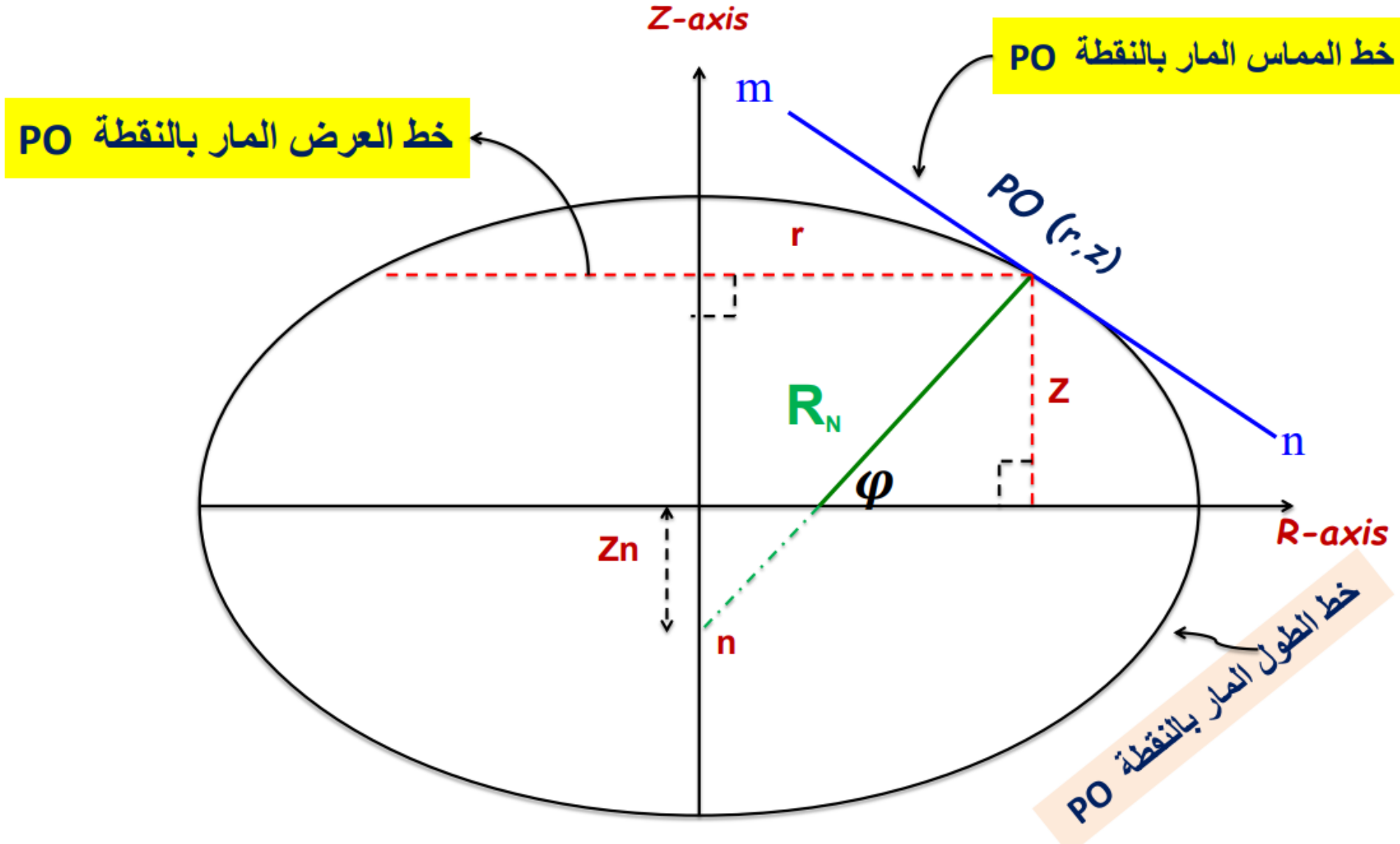
من بين المقاطع الناظمية للإهليلج نميز مقطعين رئيسين وهما المقطعان اللذان يتقاطع مستوياهما بزاوية قائمةٍ ، ويكون أحدهما هو الأكبر بين المقاطع والآخر هو الأصغر . المقطع الأكبر هو مقطع طولي ينتمي إلى مستوي خط الطول للنقطة، والمقطع الأصغر ينتمي إلى مستو متعامد مع مستوي خط طول النقطة. ويكون نصف قطر انحناء المقطع الأكبر هو الأصغر ونسميه **نصف قطر التقوس الثانوي** R_M ، بينما يكون نصف قطر انحناء المقطع الأصغر هو الأكبر ونسميه **نصف قطر التقوس الرئيسي** R_N ونسمي المقاطع الناظمية الموجودة بين المقطعين الرئيسيين **بالمقاطع الناظمية الحرة.** .

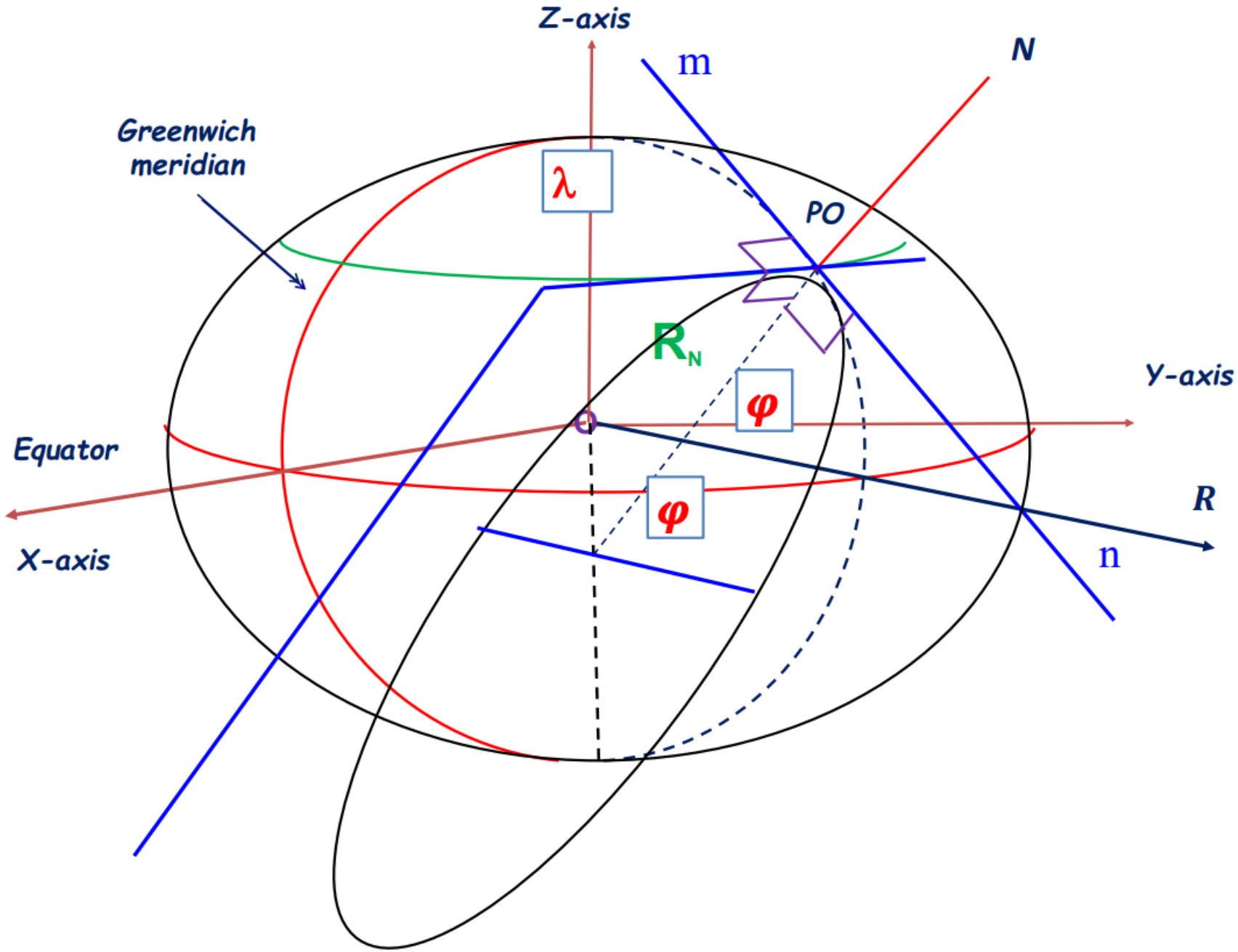


المقطعان الناظميان الرئيسيان

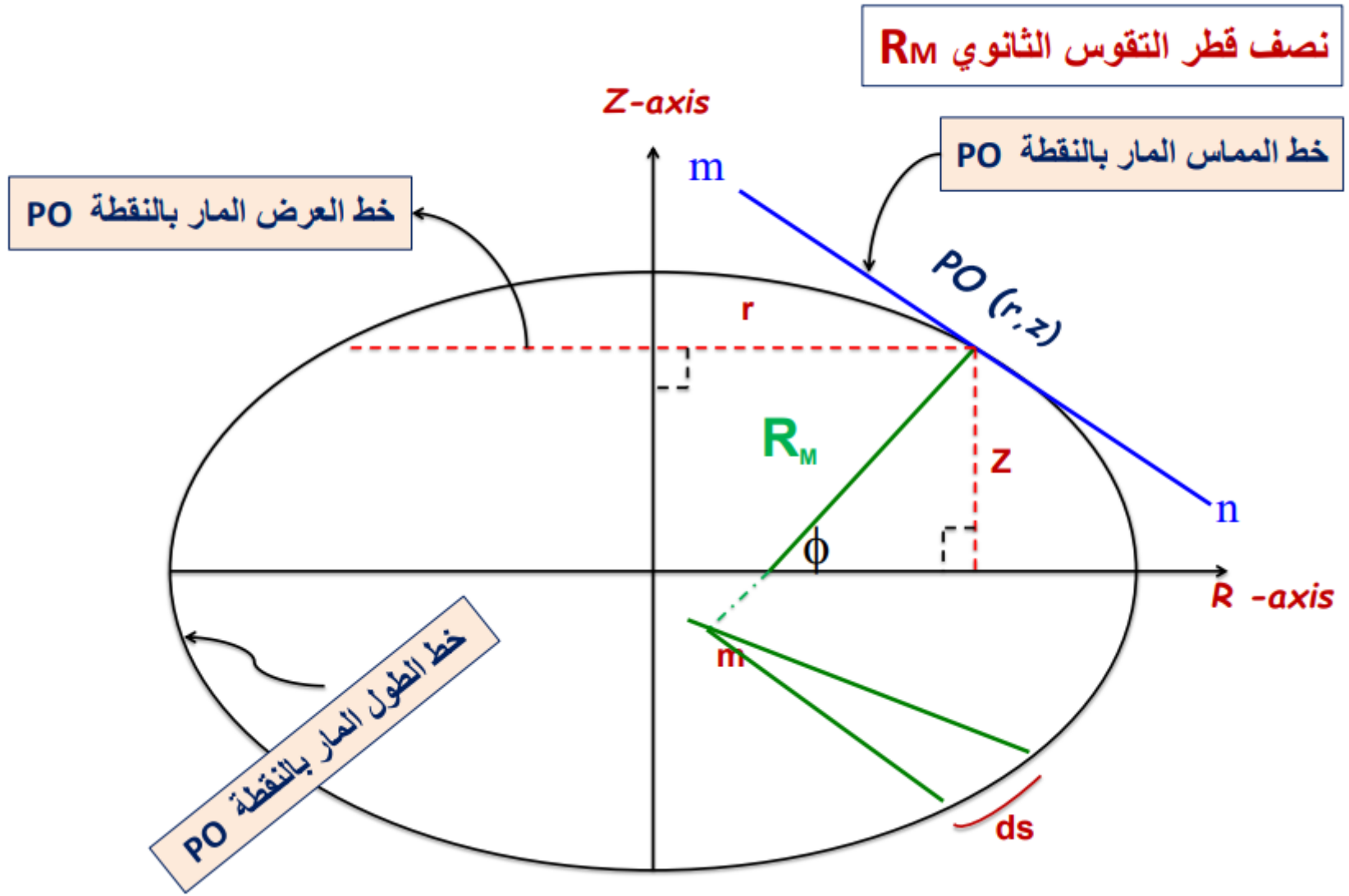
انصاف اقطار التقوس للمجسم الارضي

نصف قطر التقوس الرئيسي R_N

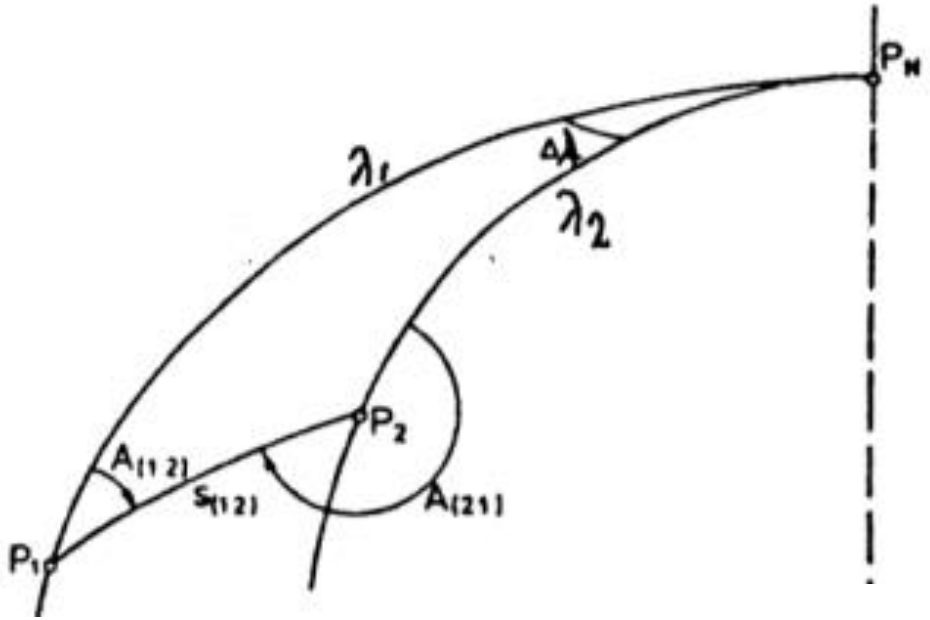



Z-axis
m
N
Greenwich
meridian
λ
PO
R_N
Y-axis
φ
Equator
O
φ
R
X-axis
n

انصاف اقطار التقوس للمجسم الارضي



نقل الإحداثيات



في الجيوديزيا العليا تدعى عملية إيجاد إحداثيات النقاط باسم نقل الإحداثيات من نقطة إلى أخرى. وضمن هذا المجال نقوم بحل المسألتين الأساسيتين في الجيوديزيا وهما:

أ . المسألة المباشرة (الأولى):

يتم حساب الإحداثيات الجيوديزية (φ_2, λ_2) والسمت $A_{(2-1)}$ بالاعتماد على الإحداثيات المعطية (φ_1, λ_1) والسمت $A_{(1-2)}$ والمسافة $S_{(1-2)}$.

ب . المسألة العكسية (الثانية):

يتم حساب السمتين الجيوديزيين $A_{(1-2)}$ و $A_{(2-1)}$ والمسافة $S_{(1-2)}$ بالاعتماد على المعطيات (φ_1, λ_1) و (φ_2, λ_2).

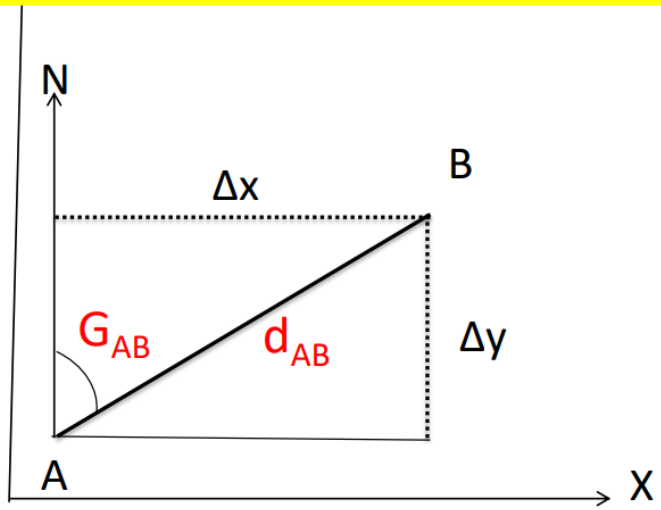
المسألتان الأساسيتان في المساحة الارضية

بفرض لدينا النقطتين A و B إحداثياتهما (X_A, Y_A) ، (X_B, Y_B) . و بفرض أن المسافة بينهما d_{AB} والسمت المباشر هو G_{AB} والسمت العكسي هو G_{BA} ، يمكننا أن نعرف المسألتين الأساسيتين في المساحة كما يلي :

المسألة الأولى

المعطيات: احداثيات النقطة A + السمت G_{AB} + المسافة الافقية .

المجاهيل: احداثيات النقطة B



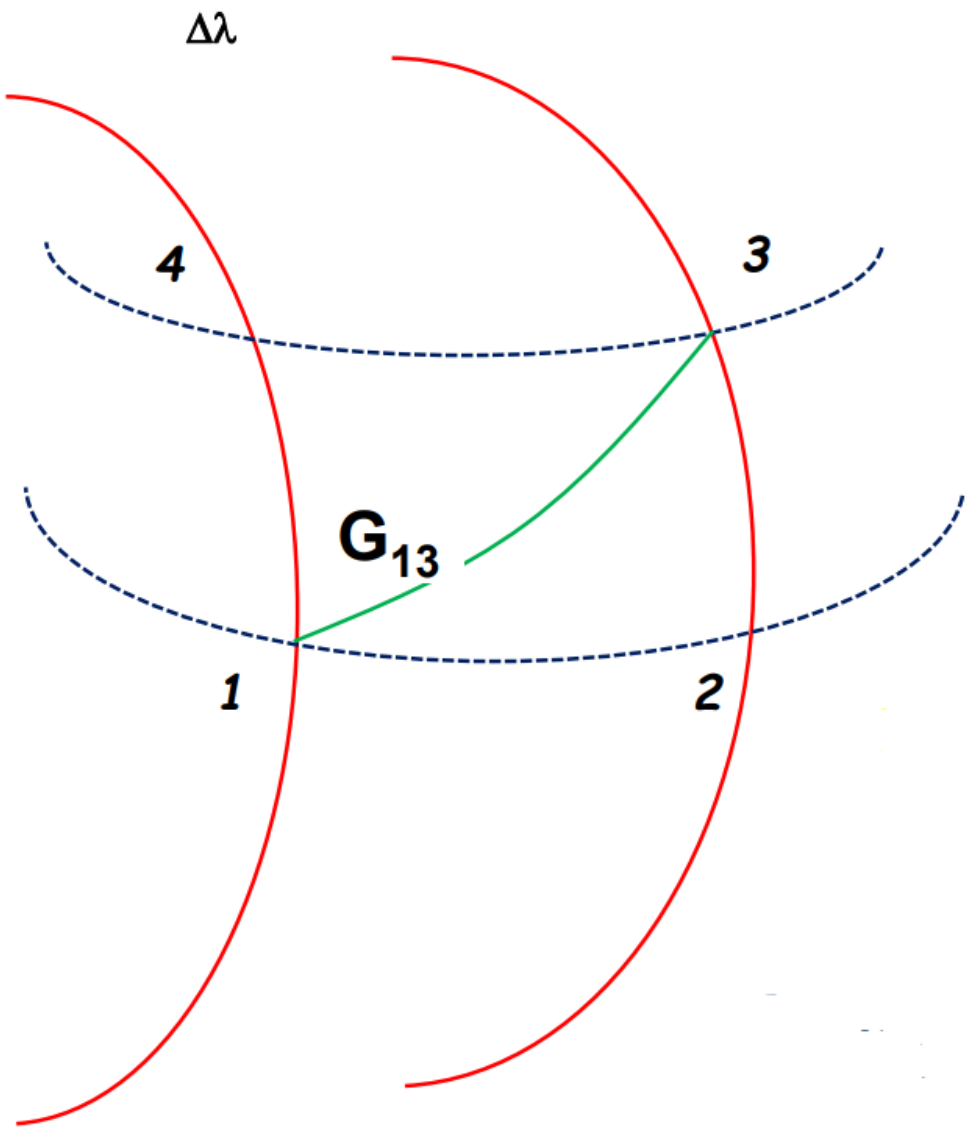
1- إيجاد إحداثيات النقطة B:

$$X_B = X_A + d_{AB} \sin G_{AB}$$

$$Y_B = Y_A + d_{AB} \cos G_{AB}$$

إن القانون السابق صالح أينما كان موقع النقطة B لأن السمت G_{AB} هو المسؤول عن تغيير الإشارة

حل المسألة المباشرة فى الجيوديزيا بالطريقة التقريبية



النقطة 1 معلومة الإحداثيات والمطلوب حساب إحداثيات النقطة 3 والسمت العكسي G_{31}

43 طول قوس خط العرض
14 طول قوس خط الطول

حالة الارض عبارة عن كرة:

$$43 = r * \Delta\lambda = R * \Delta\lambda * \cos\varphi$$
$$14 = R * \Delta\varphi$$

حيث r نصف قطر انحناء خط دائرة العرض للنقطتين 3و4 ويعطى العلاقة:

$$r = R \,.\, cos_{\varphi}$$

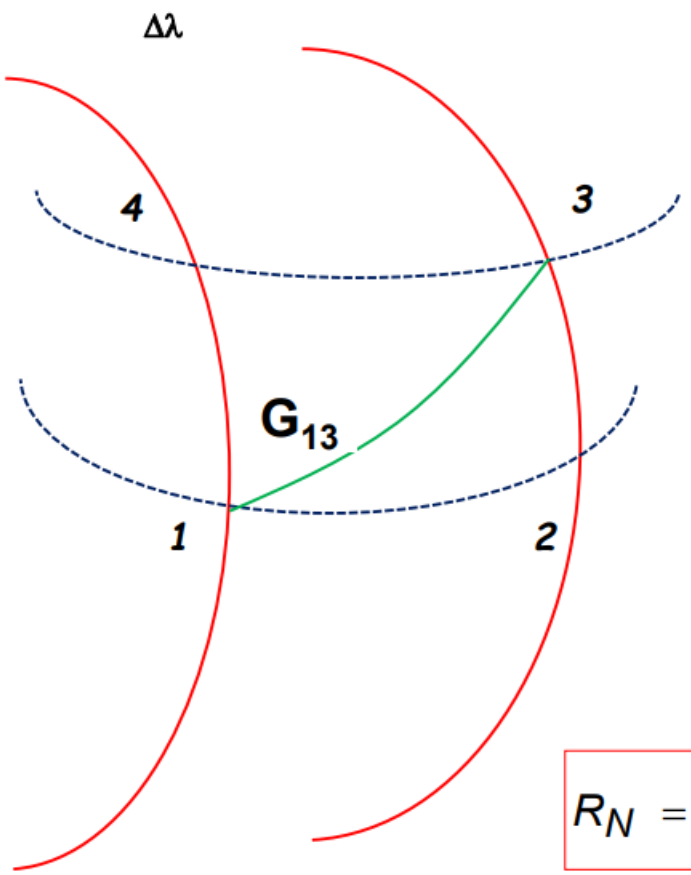
R نصف قطر الكرة

حالة الارض عبارة عن اهليلج:

$$43 = r * \Delta\lambda = R_N * \Delta\lambda * \cos\varphi$$
$$14 = R_M * \Delta\varphi$$

$N = R_N$ $\quad$ $r = N \cdot \cos\varphi$

حل المسألة المباشرة فى الجيوديزيا بالطريقة التقريبية



الحسابات على الاهليلج

$$R_N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$R_M = \frac{a*(1-e^2)}{\left[1-e^2\sin^2\varphi\right]^{3/2}}$$

لنفرض الرمز w لسهولة الحفظ و الحساب

$$w^2 = 1-e^2\sin^2\varphi$$

$$R_N = \frac{a}{w}$$

$$R_M = \frac{a*(1-e^2)}{w^3}$$

حل المسألة المباشرة فى الجيوديزيا بالطريقة التقريبية

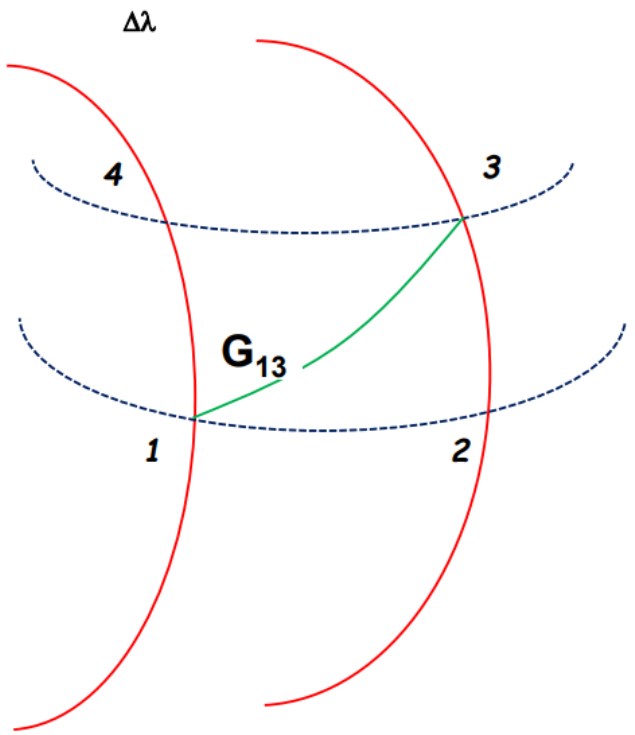
$$\Delta\varphi = \frac{D_{13} * \cos G_{13}}{R_M}$$

$$\Delta\lambda = \frac{D_{13} * \sin G_{13}}{R_N * \cos\varphi}$$

- $\varphi 3 = \varphi 1 + \Delta\varphi$
- $\lambda 3 = \lambda 1 + \Delta\lambda$
- $G_{31} = G_{13} + 180 + \Delta\alpha$

$$\varphi_m = \frac{\varphi 1 + \varphi 3}{2}$$

$\Delta\alpha = \Delta\lambda * \sin \varphi m$



حالة الارض عبارة عن اهليلج:

$$D_{43} = D_{13} * SIN\ G_{13}$$

$$D_{14} = D_{13} * COS\ G_{13}$$

$43 = R_N * \Delta\lambda * \cos\varphi$

$14 = R_M * \Delta\varphi$

$$D_{43} = 43$$

$$D_{14} = 14$$

تعتمد $\Delta\alpha$ على التشوه الزاوي بسبب الشكل الإهليلجي.

مثال على المسألة المباشرة

- ليكن لدينا المرجع الجيوديزي (المجسم الاهليليجي) ذات المعطيات التالية:

a = 6378.206 km e = 0.08227

- اوجد احداثيات الجيوديزية الجغرافية للنقطة 3 (المسالة المباشرة) اذا كان:

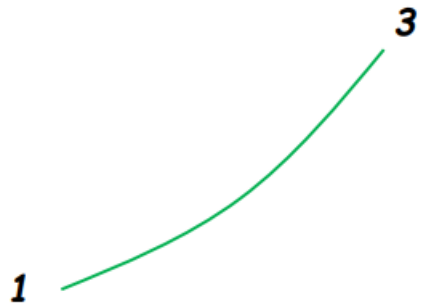
φ1 = 25.316 gr. λ1 = 43.921 gr. D13 = 86.399 km G13 = 66.013 gr.

$$w^2 = 1 - e^2 \sin^2 \varphi = 1 - (0.08227)^2 * \sin(25.316)^2 = 0.998984924$$

$$R_N = \frac{a}{w} = \frac{6378.206}{0.9994923332} = 6381.445648$$

$$R_M = \frac{a*(1-e^2)}{w^3} = \frac{6378.206*(1-(0.08227)^2)}{(0.9994923332)^3}$$

$$= \frac{6335.036051}{0.9984777725} = 6344.694119$$



$$\Delta\varphi = \frac{D_{13} * \cos G_{13}}{R_M} = \frac{86.399 * \cos(66.013)}{6344.694119} = 0.006929488086 \ rad.$$

$$\Delta\lambda = \frac{D_{13} * \sin G_{13}}{R_N * \cos\varphi} = \frac{86.399 * \sin(66.013)}{5883.49268} = 0.012643504731 \ rad$$

$$\varphi 3 = 25.316 + (0.006929488086 rad * \frac{200}{\pi}) = 25.75714491 \ gr.$$

$$\lambda 3 = 43.9210 + (0.012643504731 \ rad * \frac{200}{\pi}) = 44.7255866647 \ gr.$$

المسألتان الأساسيتان في المساحة الارضية

المسألة الثانية

المعطيات : احداثيات النقطة A + احداثيات النقطة B

المجاهيل: السمت G_{AB} + المسافة d_{AB}

$$HD_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

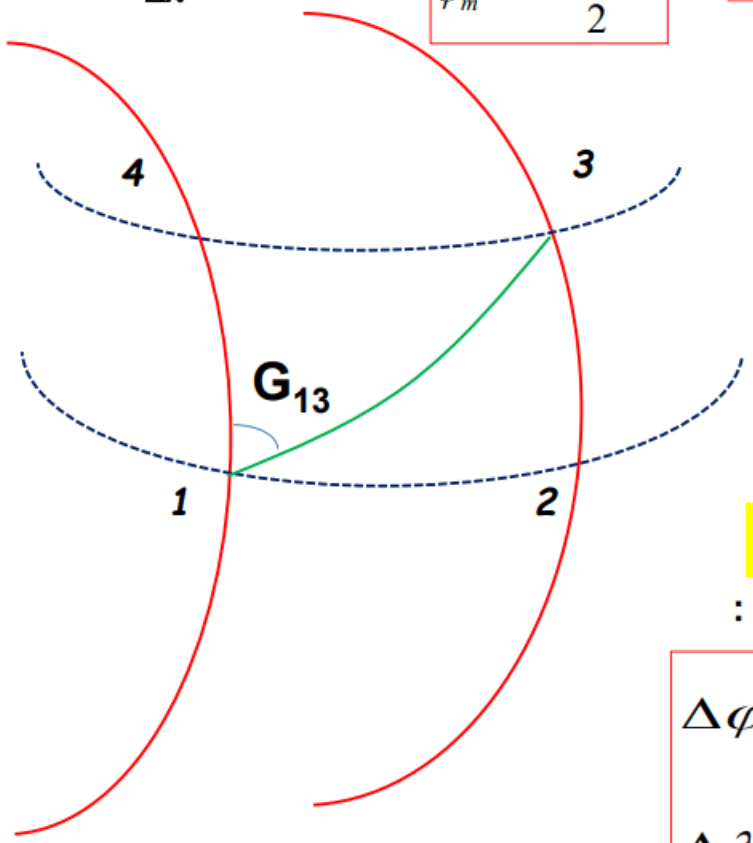
لحساب السمت المباشر G_{AB} نطبق العلاقة:

$$\tan \varphi_{AB} = \frac{|X_B - X_A|}{|Y_B - Y_A|} = \frac{|\Delta X|}{|\Delta Y|}$$

وتحسب قيمة السمت الاعتباري G_{AB} وفقاً للربع الذي يقع فيه الضلع AB ،
ومن ثم يحسب السمت العكسي من العلاقة ما بين السمتين

$$G_{BA} = G_{AB} \pm 200$$

حل المسألة العكسية فى الجيوديزيا بالطريقة التقريبية



$$\varphi_m = \frac{\varphi 1 + \varphi 3}{2}$$

G_{13} حساب السمت الجغرافي

$$43 = R_N * \Delta\lambda * \cos\varphi_m$$

$$14 = R_M * \Delta\varphi$$

==========

$$tgG_{13} = = \frac{43}{14} = \frac{R_N * \Delta\lambda * \cos\varphi_m}{R_M * \Delta\varphi}$$

$$\Delta\lambda = \lambda 3 - \lambda 1$$

$$\Delta\varphi = \varphi 3 - \varphi 1$$

حساب المسافة الجيوديزية

من خلال احدى العلاقات يمكن حساب المسافة :

$$\Delta\varphi = \frac{D_{13} * \cos G_{13}}{R_M}$$

$$\Delta\lambda = \frac{D_{13} * \sin G_{13}}{R_N * \cos\varphi_m}$$

مثال على المسألة العكسية

تتميز المحطتان الجيوديزيتان A و B بالإحداثيات التالية:

$$A(39^o\,45'\,N, 40^o\,15'\,E) \quad , \quad B(38^o\,30'\,N, 39^o\,15'\,E)$$

بالاستناد إلى مجسم هايفورد $(a=6378.388\ km\ ,\ f=\frac{1}{297.0})$ **يُطلَبُ مايلي:**

حساب المسافة الجيوديزية بين النقطتين AB وحساب السمت الجيوديزي G_{AB}

التفلطح: $f=\frac{a-b}{a}$

أخطاء القياسات

خطأ قياس ما هوانحراف نتيجة القياس عن القيمة الحقيقية للعنصر المقاس وتصنف الأخطاء من حيث طبيعتها وسلوكها إلى :

1- الأغلاط : الاخطاء الكبيرة الناجمة عن هفوات الراصد او عدم صلاحية الأجهزة المستخدمة أو عن تردي مفاجئ في شروط القياس

2- الأخطاء النظامية: هي كل خطأ ذي سبب معروف ويمكننا التنبؤ به وتقدير قيمته حتى قبل إجراء القياس وبالتالي حذف تأثيره على نتيجة القياس.

3-الأخطاء العرضية(العشوائية): لايمكن التنبؤ بها أو تحديد قيمتها بمعادلة أو علاقة تابعية وبالتالي يتعذر حذف تأثيرها على نتائج القياسات. تأخذ الأخطاء العرضية قيماً وإشارات مختلفة عند كل إعادة لعملية القياس وبالتالي تسلك سلوكاً عشوائياً وتتم دراستها بالاستناد إلى قواعد نظرية الاحتمالات وعلم الإحصاء.

مع التسليم من خلو القياسات من الأغلاط والأخطاء النظامية ، تطلق تسمية الخطأ الحقيقي على الخطأ العشوائي المعرف بالفرق بين نتيجة القياس وبين القيمة الحقيقية للعنصر المقاس.

$$\varepsilon_i = x_i - X$$

تعديل القياسات

هو إيجاد قيم للعناصر المرصودة في المسألة عن طريق إدخال تصحيحات على أرصادها بحيث تعطي جميع البدائل الممكنة التي تنتجها القياسات الفائضة حلولاً متطابقة تماماً للمسألة.

تقسم طرائق التعديل إلى:

1- طرائق تقريبية: تدخل التصحيحات بشكل متساو على القيم المرصودة (فرق مجموع الزوايا الداخلية في مثلث مستو عن 180 درجة يتم توزيعه بشكل متساو على القيم المرصودة لتلك الزوايا)

2- طرائق دقيقة: تعطي تصحيحات أفضلية تحسب باعتماد مبدأ الاحتمال الأعظمي متمثلاً بطريقة المربعات الصغرى، حيث يعطي إدخال تلك التصحيحات الأفضلية على الأرصاد قيماً أفضلية تمثل القيم الحقيقية للعناصر في المسألة المدروسة وتنتج بدائل متطابقة تماماً لحل تلك المسألة . تدعى هذه القيم الأفضلية لعناصر المسألة بالمقدرات الأفضلية.

النماذج الرياضية للقياسات:

يعرف النموذج الرياضي لمسألة بأنه جملة علاقات رياضية معرفة على هذه المسألة، تربط بين عناصرها وتكون صحيحة تماماً من اجل القيم الحقيقية لتلك العناصر.

1- نموذج القياسات المباشرة

القياس المباشر هو القياس الذي يتم بمقارنة العنصر المجهول مقارنة مباشرة بكمية من جنسه تعرف باسم واحدة القياس.
لدينا في هذا النموذج عنصر وحيد مجهول β نقوم بإجراء n قياس له حيث (n أكبر من الواحد)، وذلك بهدف اكتشاف الأرصاد المغلوطة واستبعادها من عملية المعالجة النهائية لنتائج القياسات، بالإضافة إلى تامين إيجاد القيمة الأفضلية (الأكثر احتمالاً) والأصدق تمثيلاً للقيمة الحقيقية للعنصر المجهول وتقييم سوية الدقة لها ولعملية القياس.

نفترض أجرينا n قياساً ($x_1 , x_{2,} , \ldots\ldots\ldots x_n$) للعنصر المجهول β تشكل هذه القياسات شعاعاً عشوائياً $X_{n,1}$ يتبع التوزيع الطبيعي في الفضاء ذي البعد النوني ولنرمز بـ ($y_1 , y_{2,} , \ldots\ldots\ldots y_n$) للقيم الحقيقية للقياسات ($x_1 , x_{2,} , \ldots\ldots\ldots x_n$)على الترتيب ، حيث تشكل هذه القيم شعاعاً حقيقياً في الفضاء ذي البعد النوني .
بإدخال الرموز المتريسية التالية:

$$\beta_{1,1}= [\beta] \quad , \quad B_{n,1}=\begin{bmatrix}1\\1\\.\\.\\.\\1\end{bmatrix} \quad , , Y_{n,1}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\.\\.\\.\\y_n\end{bmatrix}$$

يمكن كتابة **الصيغة المتريسية لنموذج القياسات المباشرة** بالشكل:

$$\mathbf{B_{n,1} \times \beta_{1,1} = Y_{n,1}}$$

2- نموذج القياسات غير المباشرة (نموذج الأرصاد)

القياسات غير المباشرة: هي القياسات التي تجري لتعيين عناصر في المسألة المدروسة مجهولة ولا يمكن قياسها قياساً مباشراً ، بل يتم إجراء القياس المباشر لعناصر أخرى في ذات المسألة يمكن قياسها قياساً مباشراً وترتبط بتلك العناصر التي لايمكن قياسها بشكل مباشر، وفق علاقات محددة مما يسمح بتعيين قيم العناصر المجهولة التي لايمكن قياسها بشكل مباشر.

مثال: من اجل تعيين الإحداثيات المستوية لنقطة يلزم قياس المسافات والزوايا قياساً مباشراً وترتبط بالإحداثيات المجهولة للنقطة وفق علاقات محددة.

لنفرض ان لدينا في مسألة ما n عنصراً مجهولاً $(y_1 , y_2, , \ldots\ldots\ldots y_n)$ تشكل شعاعاً حقيقياً مجهولاً $Y_{n,1}$ في الفضاء ذي البعد النوني ولنفرض أنه بإمكاننا قياس تلك العناصر قياساً مباشراً. تشكل القياسات المباشرة $(x_1 , x_2, , \ldots\ldots\ldots x_n)$ لمركبات الشعاع الحقيقي $Y_{n,1}$ شعاعاً عشوائياً $X_{n,1}$ يتبع التوزيع الطبيعي في الفضاء ذي البعد النوني. لنفرض أنه لدينا μ عنصراً إضافياً مجهولاً$(\beta_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \beta\mu)$ تشكل شعاعاً حقيقياً $\beta\mu,_1$ في الفضاء ذي البعد μ علماً انه لايمكننا قياس مركبات الشعاع $\beta\mu,_1$ قياساً مباشراً ولكن ترتبط بمركبات الشعاع $Y_{n,1}$ وفق العلاقات الخطية التالية:

$$b_{11}\ \beta_1 + b_{12}\ \beta_2 \ldots\ldots\ldots + b_{1\mu}\ \beta\mu = y_1 + l_1$$
$$b_{21}\ \beta_1 + b_{22}\ \beta_2 \ldots\ldots\ldots + b_{2\mu}\ \beta\mu = y_2 + l_2$$
$$\vdots$$
$$b_{n1}\ \beta_1 + b_{n2}\ \beta_2 \ldots\ldots\ldots + b_{n\mu}\ \beta\mu = y_n + l_n$$

$b_{n\mu} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_{11}$ و $l_1 \ldots\ldots l_n$ هي أمثال عددية ثابتة

عدد العلاقات الخطية n يساوي عدد العناصر التي يمكن قياسها قياساً مباشراً

2- نموذج القياسات غير المباشرة (نموذج الأرصاد)

بإدخال الرموز المتريسية التالية:

$$B_{n,\mu}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \cdot & b_{1\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & \cdot & b_{n\mu} \end{bmatrix}, L_{n,1}=\begin{bmatrix} l_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l_n \end{bmatrix}, Y_{n,1}=\begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}, \beta_{\mu,1}=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

يجب أن يكون $n \geq \mu$

يمكننا كتابة العلاقات الخطية بالصيغة المتريسية التالية:

$$B_{n,\mu} \times \beta_{\mu,1} = Y_{n,1} + L_{n,1}$$

وهذا يدعى **الصيغة المتريسية لنموذج القياسات بالواسطة(غير المباشرة) أو نموذج الأرصاد**

من منظور نظرية الأخطاء يجب أن يكون لدينا دائماً عدد القياسات (n) أكبر أو يساوي عدد الوسطاء المجهولة

3- نموذج القياسات الشرطية

تعرف **القياسات الشرطية** بأنها القياسات التي يجب أن تحقق شرطاً أو جملة شروط رياضية أو منطقية معينة(مثلاًمجموع الزوايا الداخلية في المثلث المستوي يجب أن تساوي 180 درجة)

لنفرض أنه لدينا في مسألة ما m عنصراً مجهولاً ($y_1 , y_2, , \ldots\ldots\ldots y_m$) يمكن قياسها قياساً مباشراً وتشكل هذه العناصر شعاعاً حقيقياً مجهولاً $Y_{m,1}$في الفضاء ميمي البعد قياس مركباته هي: ($x_1 , x_2, , \ldots\ldots\ldots x_m$) وتشكل هذه القياسات شعاعاً عشوائياً $X_{m,1}$ يتبع التوزيع الطبيعي في الفضاء ميمي البعد. لنفرض أن على العناصر المجهولة ($y_1 , y_2, , \ldots\ldots\ldots y_m$) أن تحقق (n) شرطاً خطياً (علاقة خطية) هي:

$$a_{11}\ y_1 + a_{12}\ y_2 \ldots\ldots\ldots + a_{1m}\ y_m + l_1 = 0$$
$$a_{21}\ y_1 + a_{22}\ y_2 \ldots\ldots\ldots + a_{2m}\ y_m + l_2 = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}\ y_1 + a_{n2}\ y_2 \ldots\ldots\ldots + a_{nm}\ y_m + l_n = 0$$

a_{11} ... ... a_{nm} و $l_1 \ldots\ldots\ldots l_n$ هي أمثال عددية ثابتة
عدد العلاقات الخطية n يساوي عدد الشروط التي يجب على عناصر المسألة تحقيقها ويساوي عدد القياسات الفائضة

3- نموذج القياسات الشرطية

بإدخال الرموز المتريسية التالية:

$$L_{n,1} = \begin{bmatrix} l_1 \\ . \\ . \\ . \\ l_n \end{bmatrix}, Y_{m,1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_m \end{bmatrix},$$

$$A_{n,m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots a_{1m} \\ . & \\ . & \\ a_{n1} & a_{n2} \quad \dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots a_{nm} \end{bmatrix}$$

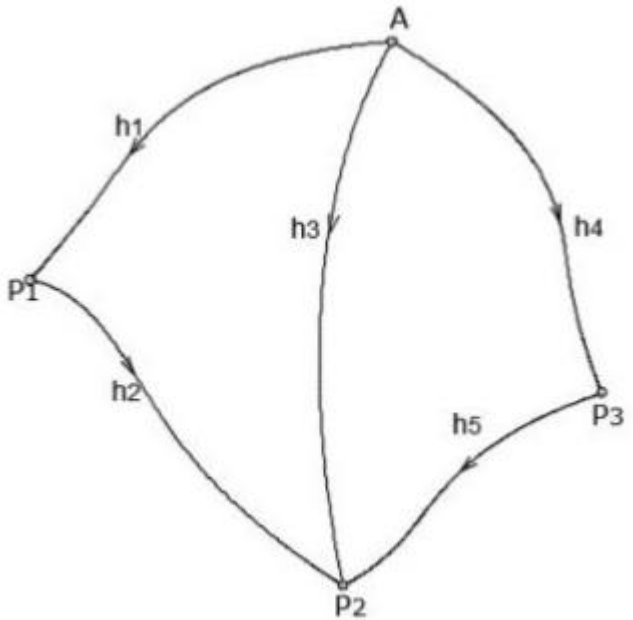
$$n < m$$

يمكن كتابة العلاقات الخطية بالصيغة المتريسية التالية:

$$A_{n,m} \times Y_{m,1} + L_{n,1} = 0$$

وهذا يدعى **الصيغة المتريسية لنموذج القياسات الشرطية**

مثال



شكل رقم (1)

رقم المسلك	قيمة فرق الارتفاع المقاسة (m)	طول المسلك (km)
1	5.376	1.000
2	7.463	1.000
3	12.859	2.000
4	4.731	0.500
5	8.113	1.000

لتعيين مناسيب النقاط المجهولة: (P_1, P_2, P_3) قيست فروق الارتفاعات وفق مسالك التسوية المبينة في الشكل رقم (1)، و ذلك بين النقطة (A) معلومة الارتفاع (H_A) و بين النقاط المجهولة.

إذا علمت أن $(H_A = 342.571m)$، و أن نتائج القياسات الحقلية ، (المستقلة و غير متساوية الدقة) جاءت على النحو المبين في الجدول أعلاه.

1. ضع كلاً من نموذج القياسات غير المباشرة و نموذج القياسات الشرطية للمسألة المعطاة بالصيغة المصفوفاتية معرفاً الرموز الموافقة لكل من النموذجين.

نموذج الأرصاد (القياسات غير المباشرة): $(B\beta = Y + L)$.

- إن العناصر التي لا يمكن قياسها قياساً مباشراً في هذه المسألة هي ارتفاعات النقاط (P_1, P_2, P_3) و نرمز لها بالرموز (H_1, H_2, H_3) . عدد هذه العناصر: $(\mu = 3)$.
- عدد المعادلات في نموذج الأرصاد يساوي عدد العناصر المقاسة في المسألة المدروسة: $(n = 5)$.
- المعادلة الواحدة في هذا النموذج تحتوي على عنصر واحد من العناصر المقاسة قياساً مباشراً و يكتب هذا العنصر بدلالة العناصر التي لا يمكن قياسها قياساً مباشراً (الوسطاء المجهولة).

معادلات نموذج القياسات غير المباشرة لهذه المسألة هي كما يلي:

$$
\begin{aligned}
h_1 = H_1 - H_A &\Rightarrow H_1 &&= h_1 + H_A \\
h_2 = H_2 - H_1 &\Rightarrow -H_1 + H_2 &&= h_2 \\
h_3 = H_2 - H_A &\Rightarrow H_2 &&= h_3 + H_A \\
h_4 = H_3 - H_A &\Rightarrow &H_3 &= h_4 + H_A \\
h_5 = H_2 - H_3 &\Rightarrow &H_2 - H_3 &= h_5
\end{aligned}
$$

باعتماد الرموز المصفوفاتية التالية:

$$
B_{5.3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad L_{5.1} = \begin{bmatrix} H_A \\ 0 \\ H_A \\ H_A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 342.571 \\ 0 \\ 342.571 \\ 342.571 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad Y_{5.1} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta_{3.1} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix}
$$

يؤول نموذج القياسات غير المباشرة في المسألة المدروسة إلى الصيغة المصفوفاتية التالية:

$$B_{5,3} \times \beta_{3,1} = Y_{5,1} + L_{5,1}$$

نموذج القياسات الشرطية: $(AY + L = 0)$.

- عدد العلاقات في نموذج القياسات الشرطية لهذه المسألة يساوي عدد القياسات الفائضة: $(n = 5 - 3 = 2)$.
- تربط كل علاقة من هذه العلاقات بين جميع العناصر (h) المقاسة في المسألة بشكل عام.
- يمكن اعتماد أي علاقتين شرطيتين صحيحتين تربطان بين عناصر المسألة المقاسة، و أي علاقة أخرى ستكون بالضرورة مرتبطة خطياً بهتين العلاقتين و هي بالتالي غير مناسبة.

يمكننا على سبيل المثال اعتماد العلاقتين الشرطيتين التاليتين:

$$h_1 + h_2 - h_3 = 0 \qquad (1)$$
$$h_3 - h_4 - h_5 = 0 \qquad (2)$$

بفرض أننا حاولنا اعتماد علاقة شرطية ثالثة في هذه المسألة و لتكن العلاقة:

$$h_1 + h_2 - h_4 - h_5 = 0 \qquad (3)$$

نلاحظ بسهولة أن المعادلة (3) ليست إلا عبارة عن مجموع العلاقتين: (1) و (2) أي أنها مترابطة خطياً مع هاتين العلاقتين و بالتالي لا يجوز اعتمادها. باعتماد الرموز المصفوفاتية التالية:

$$A_{2.5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad L_{2.1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad Y_{5.1} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{bmatrix} ,$$

تؤول علاقات نموذج القياسات الشرطية إلى الصيغة المصفوفاتية:

$$A_{2,5} \times y_{5,1} + L_{2,1} = 0$$