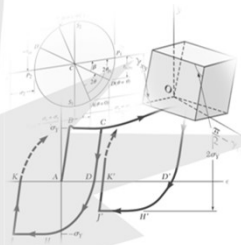
Hama University
Faculty of Civil Engineering
Department of Structural Engineering
Strength of Materials 1



Lecture 5

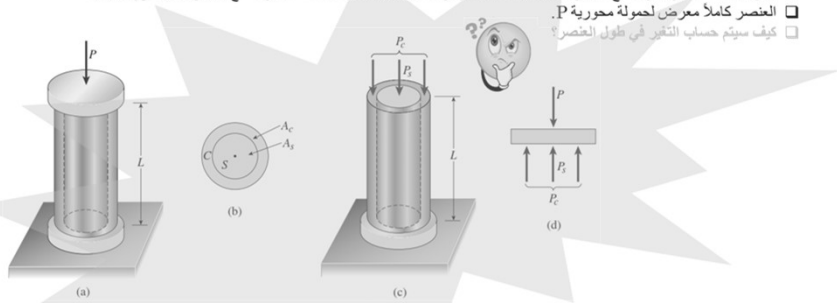
Axially Loaded Members-2

العناصر المعرضة لأحمال محورية

By: Dr. Mhmoud SAUOD
Head of Structural Engineering Department

حالة وجود عنصر مكون من مادتين Case 2:

- ليكن لدينا عنصر أول ذو مقطع A1 ومعامل مرونة E1 موجود ضمن انبوب من مادة مختلفة ذو مقطع A2 ومعامل مرونة E2.
- العنصر كاملاً معرض لحمولة محورية P.
- كيف سيتم حساب التغير في طول العنصر؟



$$P = P_C + P_S$$

$\delta_C = \delta_S$ مقدار التغير في طول العنصر متساوي بين المادتين المشكلتين للعنصر.

$$\left.\begin{aligned}\delta_C &= \frac{P_C L}{E_C A_C}\\ \delta_S &= \frac{P_S L}{E_S A_S}\end{aligned}\right\} \quad \frac{P_C L}{E_C A_C} = \frac{P_S L}{E_S A_S} \Rightarrow P_s = P\left(\frac{E_s A_s}{E_s A_s + E_c A_c}\right) \qquad P_c = P\left(\frac{E_c A_c}{E_s A_s + E_c A_c}\right)$$

لحساب الإجهادات في كل من المادتين:

$$\sigma_s = \frac{P_s}{A_s} = \frac{P E_s}{E_s A_s + E_c A_c} \qquad \sigma_c = \frac{P_c}{A_c} = \frac{P E_c}{E_s A_s + E_c A_c}$$

مقدار التغير في طول العنصر:

$$\delta = \frac{P_s L}{E_s A_s} = \frac{P_c L}{E_c A_c} = \frac{PL}{E_s A_s + E_c A_c}$$

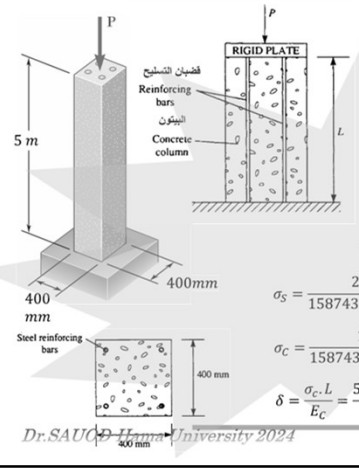
$$P_s = \frac{E_s A_s}{L}\delta_s \qquad P_c = \frac{E_c A_c}{L}\delta_c$$

$$P = P_C + P_S \Rightarrow \frac{E_s A_s}{L}\delta_s + \frac{E_c A_c}{L}\delta_c = P \xrightarrow{\delta_C = \delta_S} \delta_s = \delta_c = \frac{PL}{E_s A_s + E_c A_c}$$

EXAMPLE

من أجل عمود من البيتون المسلح بارتفاع 5m. بأبعاد مقطع كما في الشكل.
مسلح بأربع قضبان بقطر 20 mm. حمولة العمود P=1000 kN، يُطلب
حساب قيمة الإجهادات في كل من البيتون و التسليح؟ وحساب مقدار القِصر في العمود؟

$E_C = 15 \times 10^3 MPa$
$E_S = 2 \times 10^5 MPa$



ANSWER

مساحة مقطع التسليح كاملاً: $A_S = 4 \times \frac{\pi}{4} \times 20^2 = 1257\ mm^2$

مساحة مقطع البيتون كاملاً: $A_C = 400^2 - 1257 = 158743\ mm^2$

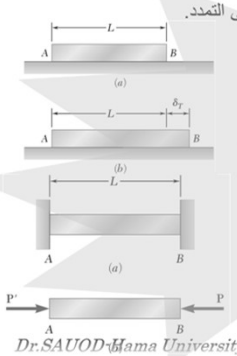
حساب الإجهاد في التسليح: $\sigma_S = \frac{2 \times 10^5 \times 1000 \times 10^3}{158743 \times 15000 + 1257 \times 2 \times 10^5} = 76\ MPa$

$$\sigma_C = \frac{15000 \times 1000 \times 10^3}{158743 \times 15000 + 1257 \times 2 \times 10^5} = 5.7\ MPa$$

حساب مقدار القِصر في العمود: $\delta = \frac{\sigma_c . L}{E_C} = \frac{5.7 \times 5 \times 10^3}{15000} = 1.9\ mm$

تغيرات درجة الحرارة Temperature Changes:

- تحت تأثير التغيرات الحرارية، يتعرض العنصر الإنشائي لتغيرفي الطول، لذلك يتم عادة تنفيذ فواصل تمدد ضمن المنشآت لتجنب التأثير السلبي للتغيرات الحرارية بحيث يحصل تمدد للعناصر الإنشائية بأقل قدر ممكن من الضرر مقارنة مع العناصر المقيدة والتي يتشكل فيها إجهادات حرارية بسبب عدم إمكانية العنصر على التمدد.
- يتم حساب التغير في طول العنصر بسبب تغير درجة الحرارة كمايلي:



$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

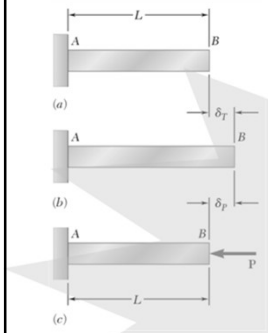
التشوه الحراري Thermal Strain $\epsilon_T = \alpha\Delta T$

طول العنصر — معامل التغير الحراري — مقدار التغير في درجة الحرارة

- لنفترض أن العنصر مثبت من نهايتيه، ثم تعرض لتغير في درجة الحرارة:

$$\delta_T = \alpha.\Delta T.L$$

$$\delta_P = \frac{PL}{EA}$$



$$\delta = \delta_T + \delta_P = 0$$

$$\delta = \alpha.\Delta T.L + \frac{PL}{EA} = 0$$

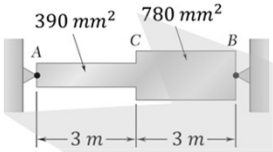
$$P = -\alpha.\Delta T.EA$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{-\alpha.\Delta T.EA}{A} = -\alpha.\Delta T.E$$

EXAMPLE

يُطلب تحديد قيم الاجهادات في الأجزاء AC, BC بسبب نقصان درجة الحرارة لتصبح 10- درجة مئوية علماً بان العنصر تم تثبيته بمساند عند نهايتيه بدرجة حرارة 24 درجة مئوية ؟

ANSWER



$$\alpha = \frac{1}{75000}\ 1/C^{\circ} \qquad E = 200\ GPa$$

$$\delta_T = \alpha.\Delta T.L = \frac{1}{75000}.(-34).6 = -0.00272\ m$$

$$\delta_R = \frac{R_B.L_1}{E.A_1} + \frac{R_B.L_2}{E.A_2} = \frac{R_B}{200\times10^6}\left[\frac{3}{390\times10^{-6}} + \frac{3}{780\times10^{-6}}\right] = 0.057\times10^{-3}R_B$$

$$\delta_{tot} = \delta_T + \delta_R = 0 \rightarrow R_B = 47.719\ kN \leftarrow, \qquad R_A = 47.719\ kN \rightarrow$$

حساب الإجهادات في أجزاء العنصر:

$$\sigma_{AC} = \frac{P_{AC}}{A_{AC}} = 122.356\ MPa \qquad \sigma_{BC} = \frac{P_{BC}}{A_{BC}} = 61.178\ MPa$$

سنقوم بحساب التشوهات النسبية في الأجزاء AC,BC:

$$\varepsilon_{AC} = \varepsilon_{TAC} + \varepsilon_{RAC}$$

$$\varepsilon_{AC} = \frac{1}{75000}.(-34) + \left(\frac{\sigma_{AC}}{E} = \frac{122.356}{200000}\right) = 0.158\times10^{-3}$$

$$\varepsilon_{BC} = \varepsilon_{TBC} + \varepsilon_{RBC}$$

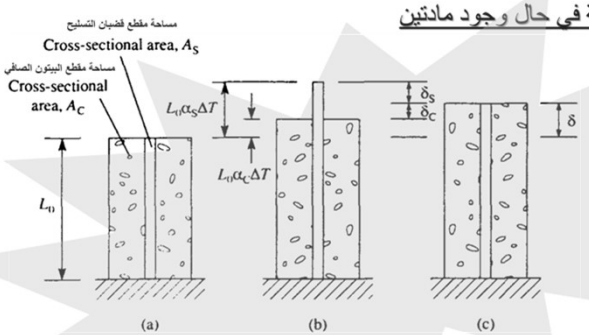
$$\varepsilon_{BC} = \frac{1}{75000}.(-34) + \left(\frac{\sigma_{BC}}{E} = \frac{61.178}{200000}\right) = -0.147\times10^{-3}$$

$$\delta_{AC} = \varepsilon_{AC}\times L_{AC}$$

$$\delta_{BC} = \varepsilon_{BC}\times L_{BC}$$

$$\varepsilon_{AC} + \varepsilon_{BC} = 0.011\times10^{-3} \cong 0$$

تأثير التغيرات الحرارية في حال وجود مادتين



بسبب التماسك بين المادتين، فإن البيتون سيمنع التسليح من التطاول بينما التسليح سيسبب تطاول في البيتون بشكل أكبر من التشوه في البيتون لوحده.
وبالتالي، بعد التشوه النهائي فإن البيتون سيكون تعرض للشد المحوري و التسليح سيتعرض للضغط المحوري.
وبسبب عدم وجود قوى محورية خارجية مطبقة على العنصر، فلا يوجد قوى محورية في أي مقطع من العمود.

$$P_{S-Compression} = P_{C-Tension}$$ قوة الشد في البيتون = قوة الضغط في التسليح

Dr.SAUOD-Hama University 2024

نلاحظ من الشكلين b,c:

$$\delta_C + \delta_S = L_O.\alpha_S\Delta T - L_O.\alpha_C\Delta T$$

$$\delta_C + \delta_S = L_O.\Delta T(\alpha_S - \alpha_C)$$

$$\frac{P_C L_O}{E_C A_C} + \frac{P_S L_O}{E_S A_S} = L_O.\Delta T(\alpha_S - \alpha_C)$$

ولدينا مسبقاً: $\delta_C = \frac{P_C L_O}{E_C A_C}$ ، $\delta_S = \frac{P_S L_O}{E_S A_S}$

$$P_{S-Compression} = P_{C-Tension}$$

$$P_{S-Compression} = P_{C-Tension} = \frac{\Delta T.(\alpha_S - \alpha_C)}{\left(\frac{1}{A_C.E_C} + \frac{1}{A_S.E_S}\right)}$$

$$P_{S-Compression} = P_{C-Tension} = \frac{\Delta T.(\alpha_S - \alpha_C).A_C.E_C.A_S.E_S}{A_C.E_C + A_S.E_S}$$

Dr.SAUOD-Hama University 2024

حساب الإجهاد في التسليح والبيتون:

$$\sigma_C = \frac{P_C}{A_C} = \frac{\Delta T.(\alpha_S - \alpha_C).E_C.A_S.E_S}{A_C.E_C + A_S.E_S}$$

$$\sigma_S = \frac{P_S}{A_S} = \frac{\Delta T.(\alpha_S - \alpha_C).E_C.A_C.E_S}{A_C.E_C + A_S.E_S}$$

حساب مقدار الاستطالة في العمود:

$$\delta = L_O.\alpha_C\Delta T + \delta_C \qquad \delta = L_O.\alpha_S\Delta T - \delta_S$$

$$\delta = L_O.\alpha_C\Delta T + \frac{\Delta T.(\alpha_S - \alpha_C).A_C.E_C.A_S.E_S.L_O}{A_C.E_C(A_C.E_C + A_S.E_S)}$$

$$\delta = L_O.\Delta T\left(\frac{\alpha_C.A_C.E_C + \alpha_S.A_S.E_S}{A_C.E_C + A_S.E_S}\right)$$

المادة ذات معامل التغير الحراري الأقل تتعرض لإجهادات شد.

ولدينا مسبقاً:

$$P_{S-Compression} = P_{C-Tension} \Rightarrow \sigma_C.A_C = \sigma_S.A_S$$

$$\delta_C + \delta_S = L_O.\Delta T(\alpha_S - \alpha_C) \Rightarrow \frac{\sigma_C.L_O}{E_C} + \frac{\sigma_S.L_O}{E_S} = L_O.\Delta T(\alpha_S - \alpha_C)$$

Dr.SAUOD-Hama University 2024

EXAMPLE

من أجل جائز صلد بوزن إجمالي 100 kN مع حمولته، يستندعلى ثلاث أعمدة بارتفاع 4 m مساحة مقطع كل منها $300\ mm^2$. عمودين محيطيين منها من مادة 1. والعمود الثالث وسطي من مادة 2.

$E_1 = 80 \times 10^3 MPa$ $\alpha_1 = 1.85 \times 10^{-5} 1/C^\circ$

$E_2 = 2 \times 10^5 MPa$ $\alpha_2 = 1.2 \times 10^{-5} 1/C^\circ$

يُطلب حساب الإجهادات في الأعمدة؟ ومقدار الانزياح الشاقولي في الجائز؟ تحت تأثير ارتفاع درجة الحرارة بمقدار $100\ C^\circ$ والحمولة المحورية المطبقة؟

ANSWER

$$\delta_{1-Load} = \frac{E_1}{A_1.E_1 + A_2.E_2}P \qquad \delta_{2-Load} = \frac{E_2}{A_1.E_1 + A_2.E_2}P$$

$$A_1.E_1 + A_2.E_2 = 2 \times 300 \times 80000 + 300 \times 200000 = 108 \times 10^6$$

حساب التغير في الطول بسبب الحمولة:

$$\delta_{1-Load} = \frac{80000 \times 100 \times 10^3}{108 \times 10^6} = 74.1\ MPa\ (Compression)$$

$$\delta_{2-Load} = \frac{200000 \times 100 \times 10^3}{108 \times 10^6} = 185.2\ MPa\ (Compression)$$

حساب التغير في الطول بسبب تغير درجة الحرارة:

$$\delta_{1-Temp} = \frac{\Delta T.|\alpha_2 - \alpha_1|.A_2.E_1.E_2}{A_1.E_1 + A_2.E_2} \qquad \delta_{2-Temp} = \frac{\Delta T.|\alpha_2 - \alpha_1|.A_1.E_1.E_2}{A_1.E_1 + A_2.E_2}$$

Dr.SAUOD-Hama University 2024

$$\delta_{1-Temp} = \frac{100 \times |1.2 - 1.85| \times 10^{-5} \times 80000 \times 300 \times 200000}{108 \times 10^6} = 28.9\ MPa(Compression)$$

$$\delta_{2-Temp} = \frac{100 \times |1.2 - 1.85| \times 10^{-5} \times 80000 \times 2 \times 300 \times 200000}{108 \times 10^6} = 57.8\ MPa(Tension)$$

حساب التغير في الطول بسبب الحمولة وتغير درجة الحرارة:

$$\delta_{1-Load} + \delta_{1-Temp} = 74.1 + 28.9 = 103\ MPa\ \ (Compression)$$

$$\delta_{2-Load} + \delta_{2-Temp} = 185.2 - 57.8 = 127.4\ MPa\ \ (Compression)$$

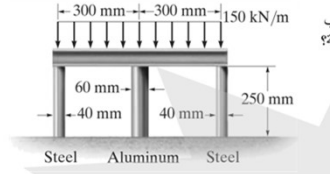
حساب مقدار الانزياح الشاقولي في الجانز تحت تأثير الحمولة و التغير الحرارة:

$$\delta_{-Load} = \frac{100 \times 10^3 \times 4 \times 10^3}{108 \times 10^6} = 3.7\ mm\ \ (Contraction) \downarrow$$

$$\delta_{-Temp} = 4 \times 10^3 \times 100 \times \left(\frac{1.85 \times 10 - 5 \times 2 \times 300 \times 80000 + 1.2 \times 10^{-5} \times 300 \times 200000}{108 \times 10^6}\right)$$

$$= 6\ mm(Elongation) \uparrow$$

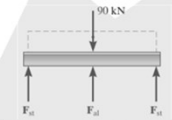
$$\boxed{\delta_{beam} = 6 - 3.7 = 2.3\ mm \uparrow}$$

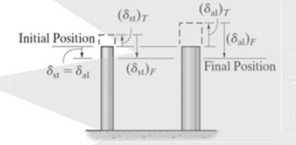


من أجل المنشأ المجاور، يُطلب تحديد القوى في كل من القضبان بسبب الحمولة الخارجية وتغير درجة الحرارة من 25 درجة إلى 80 درجة؟

EXAMPLE

ANSWER





$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 2F_{st} + F_{al} - 90(10^3)\ \text{N} = 0 \qquad (1)$$

$$\delta_{st} = \delta_{al} \qquad (2)$$

$$\delta_{st} = -(\delta_{st})_T + (\delta_{st})_F$$

$$\delta_{al} = -(\delta_{al})_T + (\delta_{al})_F$$

$$-(\delta_{st})_T + (\delta_{st})_F = -(\delta_{al})_T + (\delta_{al})_F$$

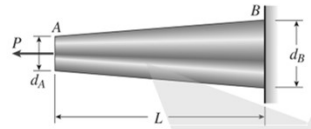
$$-[12(10^{-6})/°\text{C}](80°\text{C} - 20°\text{C})(0.250\ \text{m}) + \frac{F_{st}(0.250\ \text{m})}{\pi(0.020\ \text{m})^2[200(10^9)\ \text{N/m}^2]}$$

$$= -[23(10^{-6})/°\text{C}](80°\text{C} - 20°\text{C})(0.250\ \text{m}) + \frac{F_{al}(0.250\ \text{m})}{\pi(0.030\ \text{m})^2[73.1(10^9)\ \text{N/m}^2]}$$

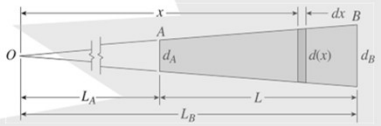
$$F_{st} = 1.216F_{al} - 165.9(10^3) \qquad (3)$$

$F_{st} = -16.4\ \text{kN}$ $F_{al} = 123\ \text{kN}$

العناصر متغيرة العطالة Tapered Members:



- من أجل عنصر ذو مقطع دائري متغير العطالة مع طوله.
- لدينا كل مماثلي ذو قيمة ثابتة: E معامل المرونة، L طول العنصر، P الحمولة المحورية. ويتوجب تحديد مقطع العنصر المتغير Ax.
- من تشابه المثلثات التي نحصل عليها بإتمام محيط العنصر للوصول إلى النقطة O.



$$\frac{L_A}{D_A} = \frac{L_B}{D_B} \Rightarrow \frac{D_x}{D_A} = \frac{x}{L_A} \rightarrow D_x = \frac{D_A.x}{L_A}$$

$$\Rightarrow A_x = \frac{\pi.D_x^2}{4} = \frac{\pi.L_B^2.x^2}{4.D_A^2}$$

$$\delta = \int \frac{N(x)dx}{EA(x)} = \int_{L_A}^{L_B} \frac{Pdx(4L_A^2)}{E(\pi d_A^2 x^2)} = \frac{4PL_A^2}{\pi E d_A^2} \int_{L_A}^{L_B} \frac{dx}{x^2}$$

$$\delta = \frac{4PL_A^2}{\pi E d_A^2}\left[-\frac{1}{x}\right]_{L_A}^{L_B} = \frac{4PL_A^2}{\pi E d_A^2}\left(\frac{1}{L_A} - \frac{1}{L_B}\right) \qquad \frac{1}{L_A} - \frac{1}{L_B} = \frac{L_B - L_A}{L_A L_B} = \frac{L}{L_A L_B}$$

$$\delta = \frac{4PL}{\pi E d_A^2}\left(\frac{L_A}{L_B}\right)$$

$$\frac{L_A}{L_B} = \frac{D_A}{D_B}$$

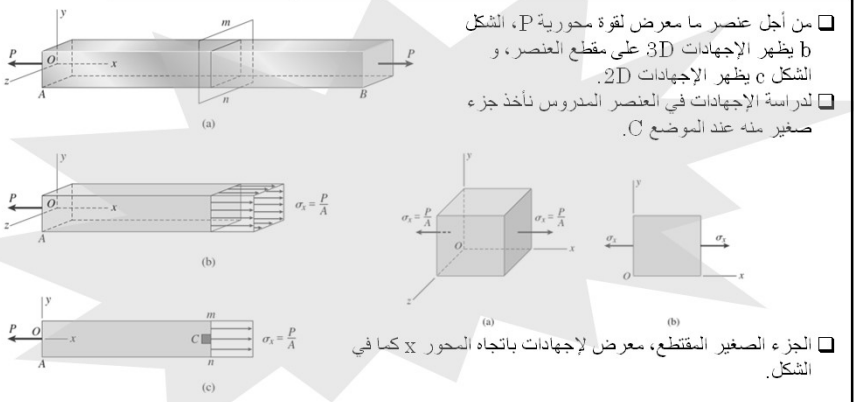
$$\delta = \frac{4PL}{\pi E d_A d_B}$$

$$\delta = \frac{4PL}{\pi E d^2} = \frac{PL}{EA}$$

في حال أن المقطع ذو قطر ثابت، $D_A = D_B = d$:

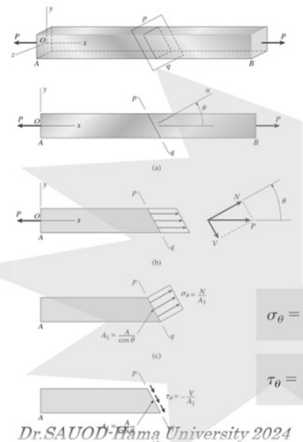
الإجهادات في العناصر المحملة محورياً Stresses in Axially Loaded Members:

- من أجل عنصر ما معرض لقوة محورية P، الشكل b يظهر الإجهادات 3D على مقطع العنصر، و الشكل c يظهر الإجهادات 2D.
- لدراسة الإجهادات في العنصر المدروس نأخذ جزء صغير منه عند الموضع C.



- الجزء الصغير المقتطع، معرض لإجهادات باتجاه المحور x كما في الشكل.

- لدراسة الإجهادات في مستوي مائل من العنصر المدروس، نأخذ مقطع مائل كما في الشكل.



$$N = P.\cos\theta \qquad V = P.\sin\theta$$

$$\sigma = \frac{N}{A_\theta} \qquad \tau = \frac{V}{A_\theta} \qquad A_\theta = \frac{A}{\cos\theta}$$

$$\sigma_\theta = \frac{N}{A_\theta} = P.\cos^2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{V}{A_\theta} = P.\cos\theta.\sin\theta$$

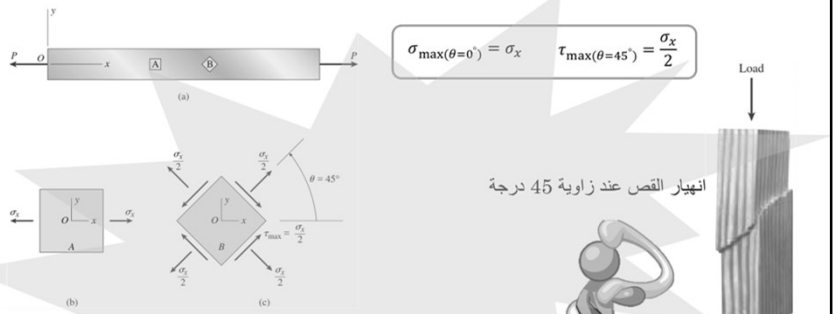
ولدينا من قوانين المثلثات:

$$\cos\theta.\sin\theta = \frac{1}{2}(\sin 2\theta)$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta = \frac{\sigma_x}{2}(1+\cos 2\theta)$$

$$\tau_\theta = -\sigma_x \sin\theta\cos\theta = -\frac{\sigma_x}{2}(\sin 2\theta)$$

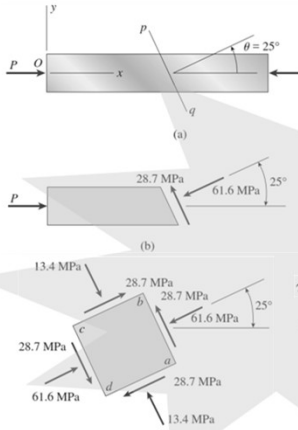


$$\sigma_{max(\theta=0^\circ)} = \sigma_x \qquad \tau_{max(\theta=45^\circ)} = \frac{\sigma_x}{2}$$

انهيار القص عند زاوية 45 درجة

EXAMPLE

من أجل عنصر معرض لحمولة محورية ضاغطة كما في الشكل، يُطلب تحديد قيم الإجهادات الناظمية وإجهادات القص عند مستو يميل بزاوية 25 درجة عكس عقارب الساعة؟ علماً بأن مساحة مقطع العنصر $A = 1200\ mm^2$

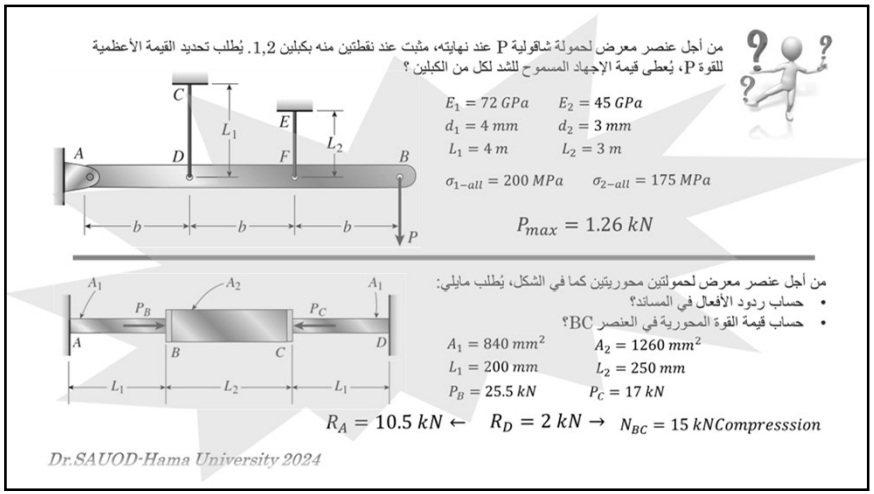


ANSWER

$$\sigma_x = -\frac{P}{A} = -\frac{90\,\text{kN}}{1200\,\text{mm}^2} = -75\ \text{MPa}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta = (-75\ \text{MPa})(\cos 25^\circ)^2 = -61.6\ \text{MPa}$$

$$\tau_\theta = -\sigma_x \sin\theta\cos\theta = (75\ \text{MPa})(\sin 25^\circ)(\cos 25^\circ) = 28.7\ \text{MPa}$$


من أجل عنصر معرض لحمولة شاقولية P عند نهايته، مثبت عند نقطتين منه بكبلين 1,2. يُطلب تحديد القيمة الأعظمية للقوة P، يُعطى قيمة الإجهاد المسموح للشد لكل من الكبلين ؟
$E_1 = 72\ GPa$ $E_2 = 45\ GPa$
$d_1 = 4\ mm$ $d_2 = 3\ mm$
$L_1 = 4\ m$ $L_2 = 3\ m$
$\sigma_{1-all} = 200\ MPa$ $\sigma_{2-all} = 175\ MPa$
$P_{max} = 1.26\ kN$
من أجل عنصر معرض لحمولتين محوريتين كما في الشكل، يُطلب مايلي:
• حساب ردود الأفعال في المساند؟
• حساب قيمة القوة المحورية في العنصر BC؟
$A_1 = 840\ mm^2$ $A_2 = 1260\ mm^2$
$L_1 = 200\ mm$ $L_2 = 250\ mm$
$P_B = 25.5\ kN$ $P_C = 17\ kN$
$R_A = 10.5\ kN \leftarrow$ $R_D = 2\ kN \rightarrow$ $N_{BC} = 15\ kN Compresssion$
Dr.SAUOD-Hama University 2024

المسائل التالية غير محلولة للتدريب.
من أجل عمود من البيتون المسلح بالأبعاد المبينة بالشكل المجاور، مسلح بـ ست قضبان فولاذية بقطر 20 mm. يُطلب حساب الإجهادات في كل من البيتون وقضبان التسليح؟
$E_s = 200\ GPa$ $E_c = 25\ GPa$
900 kN
250 mm
375 mm
280 kN
40 Cm
20 Cm
400 Cm
من أجل عمود مختلط من البيتون وعنصر معدني ذو مقطع I. بالأبعاد المبينة بالشكل المجاور،
• يُطلب حساب الإجهادات في كل من البيتون و العنصر المعدني؟
• حساب القصر في طول العمود؟
$A_s = 4800\ mm^2$
$E_s = 200\ GPa$ $E_c = 25\ GPa$
من أجل العنصر المجاور، ذو مقطع متغير على كامل طوله كما في الشكل، يُطلب استنتاج العلاقة المحددة للقصر الحاصل في طول العنصر تحت تأثير الحمولة المحورية المطبقة P؟.
نهاية المحاضرة الخامسة
End of 5th Lecture
Dr.SAUOD-Hama University 2024