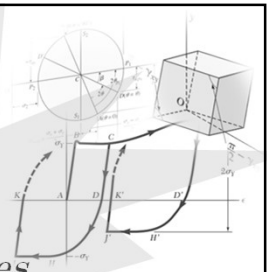
Hama University
Faculty of Civil Engineering
Department of Structural Engineering
Strength of Materials 1

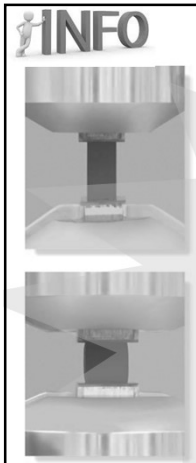


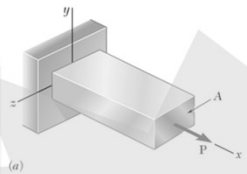
Lecture 3
General Case of Stresses
Stains

الحالة العامة للإجهادات - التشوهات

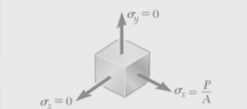
By: Dr. Mhmoud SAUOD
Head of Structural Engineering Department

INFO



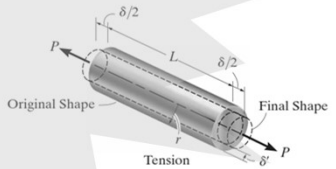


$$0 \le \nu \le 0.5$$



$$\epsilon_{long} = \frac{\delta}{L} \quad \text{and} \quad \epsilon_{lat} = \frac{\delta'}{r}$$

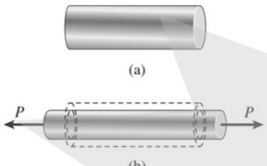
$$\nu = -\frac{\epsilon_{lat}}{\epsilon_{long}}$$



INFO

مُعامل التشوه العرضي (مُعامل بواسون) Poisson's Ratio

- من أجل عنصر معدني موشوري المقطع معرض لحمولة شادة محورية، فإن العنصر سيتعرض للتطاول والذي يترافق مع نقصان في المقطع. هذا النقصان يُدعى بالتشوه العرضي للعنصر .
- التشوه العرضي يكون باتجاه معامد للتشوه المحوري وذلك في المرحلة المرنة الخطية.
- النسبة بين التشوه العرضي و التشوه المحوري تُدعى معامل بواسون:



$$\nu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -\frac{Lateral\ strain}{Axial\ Strain} \quad \begin{matrix}\text{التشوه العرضي}\\ \text{التشوه المحوري}\end{matrix}$$

- الإشارة السالبة للدلالة على أن التشوهين المحوري و العرضي متعاكسين بالإشارة.
- من أجل عنصر مشدود، فإن التشوه المحوري موجب(استطالة) و التشوه العرضي سالب(نقصان في المقطع العرضي).
- من أجل عنصر مضغوط فإن التشوه المحوري سالب(قصر) و التشوه العرضي سالب(زيادة في المقطع العرضي).
- بمعرفة قيمة معامل بواسون لمادة العنصر، يمكن تحديد التشوه العرضي للعنصر :

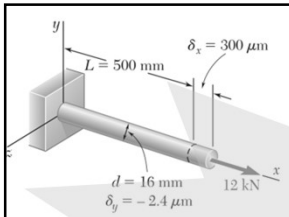
$$\varepsilon' = -\nu . \varepsilon$$

- يتم تطبيق العلاقة السابقة في حالة الإجهادات المحورية من جهة واحدة فقط Uniaxial Stress.
- عادةً، تُؤخذ قيمة معامل بواسون بالشد نفسها بالضغط للمادة نفسها.

يوجد شروط لتطبيق علاقة معامل بواسون، أن تكون المادة متجانسة بكافة الإتجاهات Isotropic كالفولاذ، على نقيض الخشب (مادة غير متجانسة Anisotropic) حيث أن سلوك المادة باتجاه الألياف الطولية مختلف عن سلوكها بالاتجاه العرضي المعامد للألياف .

EXAMPLE

من أجل العنصر المجاور ، معرض لحمولة شد محورية بقيمة 12 kN.
يُطلب حساب معامل المرونة ومعامل بواسون لمادة العنصر؟



ANSWER

$$A = \pi r^2 = \pi(8 \times 10^{-3}\,\text{m})^2 = 201 \times 10^{-6}\,\text{m}^2$$

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{12 \times 10^3\,\text{N}}{201 \times 10^{-6}\,\text{m}^2} = 59.7\,\text{MPa}$$

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{L} = \frac{300\,\mu\text{m}}{500\,\text{mm}} = 600 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = \frac{\delta_y}{d} = \frac{-2.4\,\mu\text{m}}{16\,\text{mm}} = -150 \times 10^{-6}$$

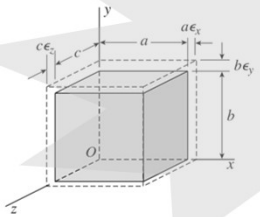
From Hooke's law, $\sigma_x = E\epsilon_x$, we obtain

$$E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{59.7\,\text{MPa}}{600 \times 10^{-6}} = 99.5\,\text{GPa}$$

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{-150 \times 10^{-6}}{600 \times 10^{-6}} = 0.25$$

قانون هوك للإجهادات المستوية Hooke's Law for Plane Stresses

- تم سابقاً، تحديد الإجهادات على مستويات مائلة، وتحديد قيم الإجهادات الرئيسية وإجهادات القص الرئيسية دون الحاجة لمعرفة خصائص المادة للعنصر المدروس.
- في هذه المحاضرة سندرس التشوهات في المادة، وبالتالي فمن الضروري معرفة خصائص المادة للعنصر المدروس.
- سنتم دراسة العلاقة بين الإجهادات و التشوهات وفق الشرطين التاليين:
  1) المادة متجانسة في كافة الاتجاهات (المحاور الرئيسية الثلاث).
  2) المادة تخضع لقانون هوك (المادة تعمل في المجال المرن الخطي).
- لدراسة التشوهات الناظمية، نفترض تعرض الجزء المدروس من العنصر إلى تشوهات محورية بالاتجاهات الثلاثة.
- قيم هذه التشوهات موجبة، باعتبارها زيادة في طول العنصر بالاتجاهات الثلاثة.
- يتم تحديد التشوهات بدلالة الإجهادات وفق قانون هوك كمايلي:



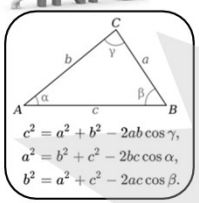
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_y}{E}$$

معامل المرونة للمادة — معامل التشوه العرضي معامل بواسون

العلاقة بين معامل المرونة ومعامل القص

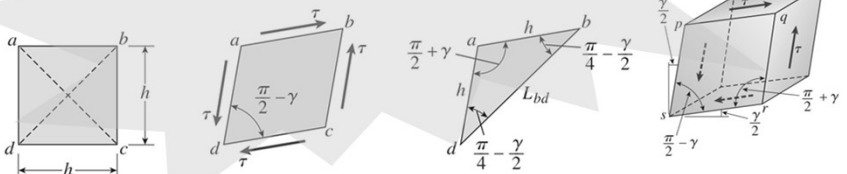
Relation between Young's Modulus E and Rigidity Modulus G

- يوجد علاقة هامة بين معامل المرونة E ومعامل الصلابة G. لإيجاد هذه العلاقة نقوم بدراسة العنصر abcd المربع الشكل بطول ضلع h.
- تحت تأثير إجهادات القص المطبقة، فإن العنصر سيتغير شكله ليصبح متوازي أضلاع.مقدار تشوه القص $\gamma = \tau/G$.
- القطر bd سيتطاول و القطر ac سيقصر .



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

$$L_{bd} = L_{bd} + \Delta L = L_{bd} + \varepsilon_{max}.L_{bd}$$
$$L_{bd} = \sqrt{2}.h.(1 + \varepsilon_{max})$$



$$L_{bd}^2 = h^2 + h^2 - 2h^2\cos(\frac{\pi}{2} + \gamma)$$
$$(1 + \varepsilon_{max}^2) = 1 - \cos(\frac{\pi}{2} + \gamma)$$
$$1 + 2\varepsilon_{max} + \varepsilon_{max}^2 = 1 + sin\,\gamma$$
$$1 + 2\varepsilon_{max} + \varepsilon_{max}^2 = 1 + sin\,\gamma$$

بسبب صغر التشوهات ε, γ:

$\varepsilon_{max}^2 \to 0$, $sin\,\gamma \to \gamma$

$$\varepsilon_{max} = \frac{\gamma}{2} \longrightarrow \gamma = \frac{\tau}{G}$$
$$\frac{\tau}{E}(1+\nu) \longleftarrow \varepsilon_{max} = \frac{\gamma}{2}$$

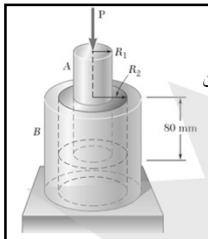
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

EXAMPLE

الشكل المجاور ، يبين مسند مع عازل للاهتزاز ، مؤلف من عنصر مصمت داخلي بقطر R_1 وعنصر خارجي ذو مقطع مفرغ، يفصل بينهما مادة عازلة، يُطلب مايلي:

- حساب أكبر قيمة للحمولة الضاغطة P علماً بأن التشوه العرضي للعنصر الداخلي لا يتمكن أن يتجاوز 2.5 mm؟

$R_1 = 10\ mm, R_2 = 25\ mm,$

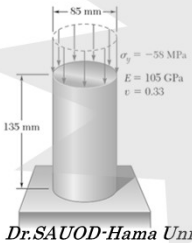


EXAMPLE

الشكل المجاور ، يبين أسطوانة معدنية معرضة لإجهاد شاقولي. يُطلب مايلي:

- حساب القصر في طول الأسطوانة؟
- حساب النقير في حجم الأسطوانة؟
- إعادة حل الطلبين من أجل ضغط مطبق على الأسطوانة من ثلاث جهات :

$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -70\ MPa$



❑ التشوهات الناظمية باتجاه المحور x : $\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$

❑ وبنفس الطريقة، التشوهات الناظمية باتجاه المحورين y,z :

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

❑ من العلاقات السابقة، يمكن تحديد الإجهادات:

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu.\varepsilon_x) \qquad \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu.\varepsilon_y) \qquad \sigma_z = 0$$

❑ ولدينا علاقة إجهاد القص: $\tau_{xy} = G.\gamma_{xy}$

❑ ولدينا العلاقة بين معامل المرونة ومعامل الصلابة: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

EXAMPLE

من أجل العنصر المجاور، نُعطى قيم التشوهات نتيجة حالة إجهادية معينة كما يلي:

$$\epsilon_x = 500\times10^{-6}, \epsilon_y = -300\times10^{-6}, \gamma_{xy} = 200\times10^{-6}$$

يُطلب تحديد قيم التشوهات في حال تدوير العنصر بمقدار 30 درجة مع عقارب الساعة؟

ANSWER

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$= \left[\frac{500+(-300)}{2}\right](10^{-6}) + \left[\frac{500-(-300)}{2}\right](10^{-6})\cos(2(-30°)) + \left[\frac{200(10^{-6})}{2}\right]\sin(2(-30°))$$

$$\epsilon_{x'} = 213(10^{-6})$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\right)\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

$$= -\left[\frac{500-(-300)}{2}\right](10^{-6})\sin(2(-30°)) + \frac{200(10^{-6})}{2}\cos(2(-30°))$$

$$\gamma_{x'y'} = 793(10^{-6})$$

العلاقات المستخدمة لحساب التشوهات

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\right)\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

التشوهات الرئيسية Principal Strains

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x-\epsilon_y}$$

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

تشوهات القص الأعظمية Maximum In-Plane Shear Strains

$$\tan 2\theta_s = -\left(\frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{\gamma_{xy}}\right)$$

$$\frac{\gamma^{\max}_{\text{in-plane}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\epsilon_{avg} = \frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{2}$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$= \left[\frac{500+(-300)}{2}\right](10^{-6}) + \left[\frac{500-(-300)}{2}\right](10^{-6})\cos(2(60°)) + \frac{200(10^{-6})}{2}\sin(2(60°))$$

$$\epsilon_{y'} = -13.4(10^{-6})$$

EXAMPLE

من أجل العنصر المجاور، نُعطى قيم التشوهات نتيجة حالة إجهادية معينة كما يلي:

$$\epsilon_x = -350\times10^{-6}, \epsilon_y = 200\times10^{-6}, \gamma_{xy} = 80\times10^{-6}$$

يُطلب تحديد قيم التشوهات الرئيسية وتشوهات القص الأعظمية؟

ANSWER

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x-\epsilon_y}$$

$$= \frac{80(10^{-6})}{(-350-200)(10^{-6})}$$

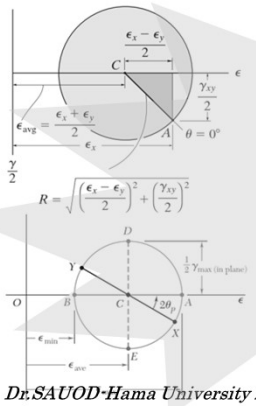
$2\theta_p = -8.28°$ and $-8.28° + 180° = 171.72°$, so that

$\theta_p = -4.14°$ and $85.9°$

دائرة مور للتشوهات المستوية MOHR's Circle for Plane Strains

❑ بما أن معادلات التشوهات المستوية مشابهة لمعادلات الإجهادات المستوية، يمكن بنفس الإجراءات السابقة تحديد دائرة مور للتشوهات المستوية.

$$\epsilon_{ave} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \quad \text{and} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

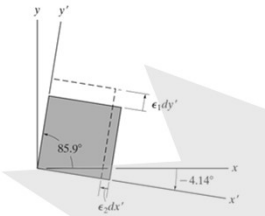


❑ النقطتين A,B تمثلان حالتي التشوهات الرئيسية $\varepsilon_{max}, \varepsilon_{min}$.

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_{min} + R \qquad \varepsilon_{min} = \varepsilon_{max} - R$$

$$\gamma_{x'y'} = 0 \rightarrow \tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

$$\gamma_{max} = 2R = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$



$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{(-350 + 200)(10^{-6})}{2} \pm \left[\sqrt{\left(\frac{-350 - 200}{2}\right)^2 + \left(\frac{80}{2}\right)^2}\right](10^{-6})$$

$$= -75.0(10^{-6}) \pm 277.9(10^{-6})$$

$$\epsilon_1 = 203(10^{-6}) \qquad \epsilon_2 = -353(10^{-6})$$

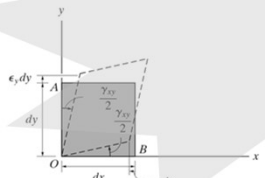
طريقة ثانية:

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$= \left(\frac{-350 + 200}{2}\right)(10^{-6}) + \left(\frac{-350 - 200}{2}\right)(10^{-6})\cos 2(-4.14°)$$

$$+ \frac{80(10^{-6})}{2}\sin 2(-4.14°)$$

$$\epsilon_{x'} = -353(10^{-6})$$

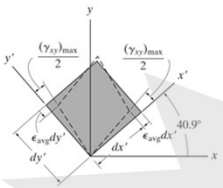


حساب تشوهات القص الأعظمية:

$$\tan 2\theta_s = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}}\right) = -\frac{(-350 - 200)(10^{-6})}{80(10^{-6})}$$

$2\theta_s = 81.72°$ and $81.72° + 180° = 261.72°$, so that

$\theta_s = 40.9°$ and $131°$



$$\frac{\gamma_{in\text{-}plane}^{max}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$= \left[\sqrt{\left(\frac{-350 - 200}{2}\right)^2 + \left(\frac{80}{2}\right)^2}\right](10^{-6})$$

$$\gamma_{in\text{-}plane}^{max} = 556(10^{-6})$$

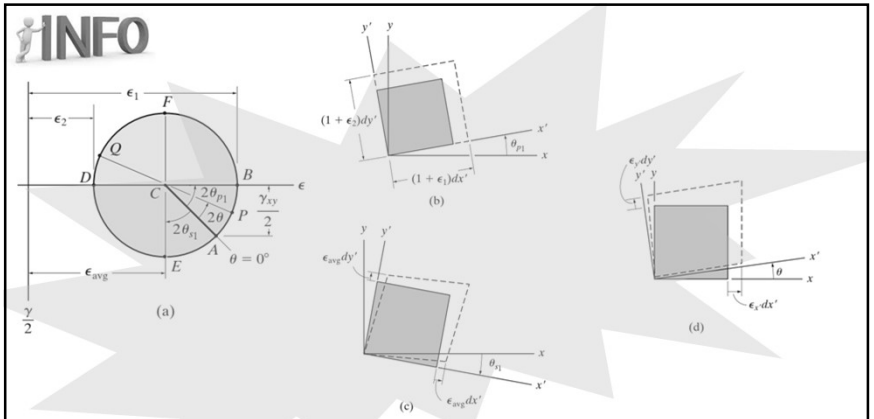
طريقة ثانية:

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

$$= -\left(\frac{-350 - 200}{2}\right)(10^{-6})\sin 2(40.9°) + \frac{80(10^{-6})}{2}\cos 2(40.9°)$$

$$\gamma_{x'y'} = 556(10^{-6})$$

$$\epsilon_{avg} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = \frac{-350 + 200}{2}(10^{-6}) = -75(10^{-6})$$



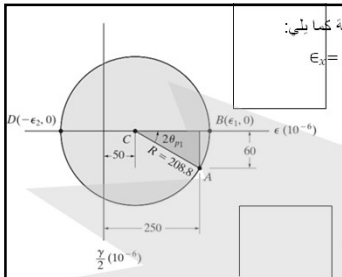
EXAMPLE

من أجل العنصر المجاور، تُعطى قيم التشوهات نتيجة حالة إجهادية معينة كما يلي:

$$\epsilon_x = 250 \times 10^{-6}, \epsilon_y = -150 \times 10^{-6}, \gamma_{xy} = 120 \times 10^{-6}$$

يُطلب تحديد قيم التشوهات الرئيسية ومستوياتها وتشوهات القص الأعظمية ومستوياتها؟

ANSWER



مركز دائرة مور:

$$\epsilon_{avg} = \frac{250 + (-150)}{2}(10^{-6}) = 50(10^{-6})$$

نصف قطر دائرة مور:

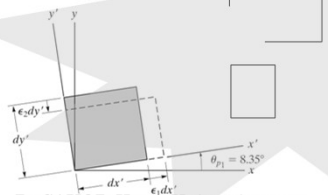
$$R = \left[\sqrt{(250 - 50)^2 + (60)^2}\right](10^{-6}) = 208.8(10^{-6})$$

التشوهات الرئيسية:

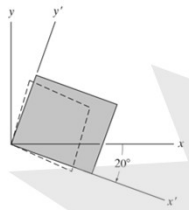
$$\epsilon_1 = (50 + 208.8)(10^{-6}) = 259(10^{-6})$$
$$\epsilon_2 = (50 - 208.8)(10^{-6}) = -159(10^{-6})$$

زاوية مستويات التشوهات الرئيسية:

$$\tan 2\theta_{p_1} = \frac{60}{(250 - 50)}$$
$$\theta_{p_1} = 8.35°$$



Dr.SAUOD-Hama University 2024



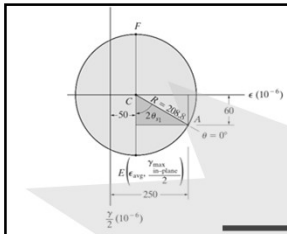
$$\epsilon_{x'} = -(200 + 111.8\cos 13.43°)(10^{-6})$$
$$= -309(10^{-6})$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -(111.8\sin 13.43°)(10^{-6})$$

$$\gamma_{x'y'} = -52.0(10^{-6})$$

$$\epsilon_{y'} = -(200 - 111.8\cos 13.43°)(10^{-6}) = -91.3(10^{-6})$$

Dr.SAUOD-Hama University 2024



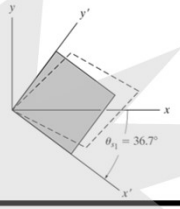
$$\frac{(\gamma_{x'y'})^{max}_{in\text{-}plane}}{2} = 208.8(10^{-6})$$

$$(\gamma_{x'y'})^{min}_{in\text{-}plane} = 418(10^{-6})$$

$$\epsilon_{avg} = 50(10^{-6})$$

$$2\theta_{s_1} = 90° - 2(8.35°)$$

$$\theta_{s_1} = 36.7°$$



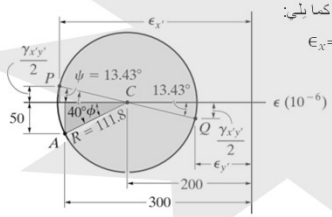
EXAMPLE

من أجل العنصر المجاور، تُعطى قيم التشوهات نتيجة حالة إجهادية معينة كما يلي:

$$\epsilon_x = -300 \times 10^{-6}, \epsilon_y = -100 \times 10^{-6}, \gamma_{xy} = 100 \times 10^{-6}$$

يُطلب تحديد قيم التشوهات عند تدوير العنصر بزاوية 20 درجة مع عقارب الساعة؟

ANSWER



$$\epsilon_{avg} = \left(\frac{-300 - 100}{2}\right)(10^{-6}) = -200(10^{-6})$$

$$R = \left[\sqrt{(300 - 200)^2 + (50)^2}\right](10^{-6}) = 111.8(10^{-6})$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{50}{(300 - 200)}\right) = 26.57°, \qquad \psi = 40° - 26.57° = 13.43°$$

Dr.SAUOD-Hama University 2024

قانون هوك في حالة الإجهادات العامة Hooke's Law for Triaxial Stresses

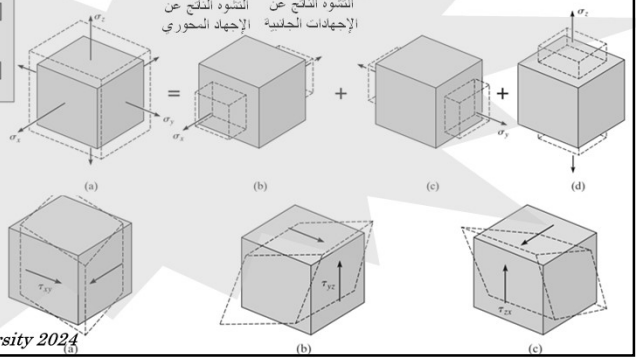
$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\epsilon_a = \underbrace{\frac{\sigma_a}{E}}_{\text{التشوه الناتج عن الإجهاد المحوري}} - \underbrace{\frac{\nu.\sigma_b}{E} - \frac{\nu.\sigma_c}{E}}_{\text{التشوه الناتج عن الإجهادات الجانبية}}$$

إشارة السالب: باعتبار الإجهادات المطبقة على الأوجه إجهادات شادة، فهي ستسبب نقصان بالمقطع

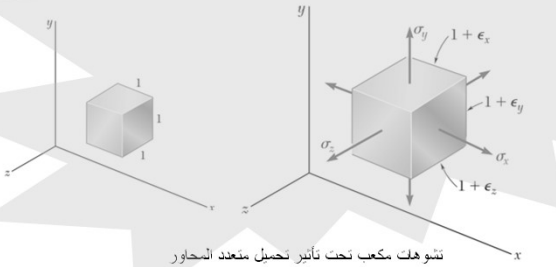


Dr.SAUOD-Hama University 2024

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x)$$
$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

INFO

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right]$$
$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_x)\right]$$
$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right]$$

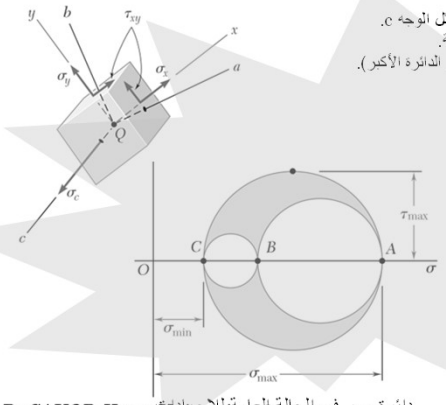


تشوهات مكعب تحت تأثير تحميل متعدد المحاور

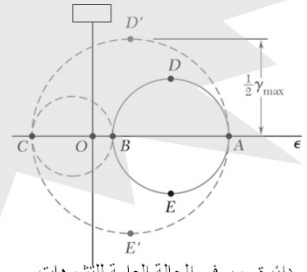
MOHR's Circle at Three Dimensional Analysis of Stresses دائرة مور في الحالة العامة

- النقطة A تمثل الوجه a، النقطة B تمثل الوجه b، النقطة C تمثل الوجه c.
- أي حالة إجهادية ستكون متضمنة ضمن دائرة مور بالحالة العامة.
- الدائرة الأكبر تحدد قيمة إجهادات القص الأعظمية (نصف قطر الدائرة الأكبر).

$$\tau_{max} = \tfrac{1}{2}|\sigma_{max} - \sigma_{min}|$$

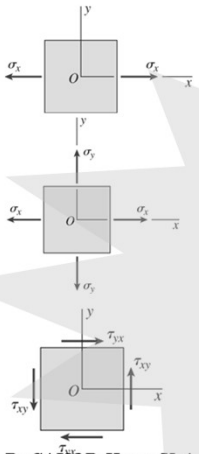


دائرة مور في الحالة العامة للإجهادات



دائرة مور في الحالة العامة للتشوهات

Special Cases of Hooke's Law حالات خاصة لقانون هوك



Uniaxial Stress الحالة الأولى

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x) \qquad \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x) \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu.\varepsilon_x)$$

Biaxial Stress الحالة الثانية

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu.\varepsilon_y)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu.\varepsilon_x)$$

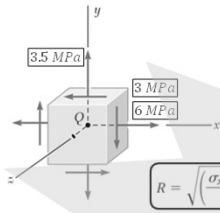
Pure Shear Stress الحالة الثالثة

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0 \qquad \tau_{xy} = G.\gamma_{xy}$$
$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

EXAMPLE

للحالة الإجهادية المجاورة، تُطلب تحديد:
- الإجهادات الرئيسية العامة ومستوياتها؟
- إجهادات القص الأعظمية؟

ANSWER

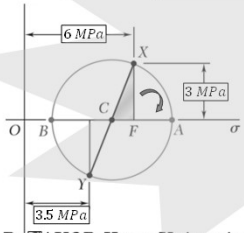


$$\sigma_{aver} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{6+3.5}{2} = 4.75\ MPa$$

إحداثيات النقطة X: $(6,-3)$

إحداثيات النقطة Y: $(3.5,3)$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad R = 3.25\ MPa$$



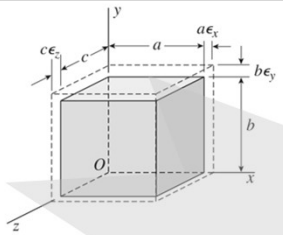
الإجهادات الرئيسية:

$$\sigma_a = OA = OC + CA = 4.75 + 3.25 = 8\ MPa$$
$$\sigma_b = OB = OC - BC = 4.75 - 3.25 = 1.5\ MPa$$
$$\sigma_z = 0$$
$$tan2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{3}{1.25} \qquad 2\theta_p = 67.4^\circ \curvearrowleft$$ اتجاه سالب

إجهادات القص الأعظمية:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sigma_a = 4\ MPa$$

التغيرات الحجمية Volume Changes



- تتغير أبعاد العنصر تحت تأثير التشوهات الناتجة عن الإجهادات الخارجية.
- يمكن تحديد التغيرات الحجمية بمعرفة قيم الإجهادات الناظمية المطبقة عليه.

$$V_0 = a.b.c$$

$$V_1 = (a + a.\varepsilon_x).(b + b.\varepsilon_y).(c + c.\varepsilon_z)$$

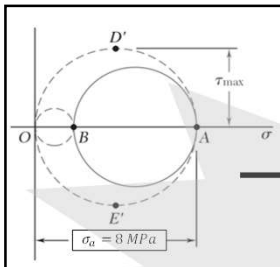
$$V_1 = a.b.c.(1 + \varepsilon_x).(1 + \varepsilon_y).(1 + \varepsilon_z)$$

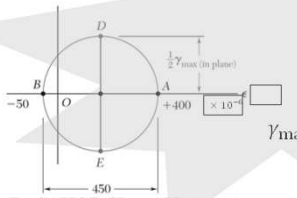
$$V_1 = V_0.(1 + \varepsilon_x).(1 + \varepsilon_y).(1 + \varepsilon_z)$$

بسبب صغر التشوهات $V_1 = V_0.(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z)$

$$V_1 = V_0.(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

- مقدار التغير في الحجم: $\Delta V = V_1 - V_0 = V_0(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$
- التغير الواحدي في الحجم: $e = \frac{\Delta V}{V_0} = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$





EXAMPLE

من أجل حالة إجهادية معينة، تم تحديد قيمة التشوهات الرئيسية المستوية، وقيمة معامل بواسون 0.3.

يُطلب: تحديد قيمة تشوه القص الأعظمي في المستوي؟

تحديد قيمة تشوه القص الأعظمي العام؟

$\varepsilon_{a=} 400 \times 10^{-6}$

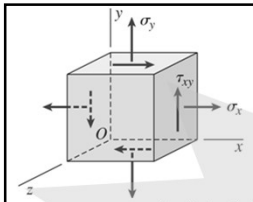
$\varepsilon_{b=} -50 \times 10^{-6}$

ANSWER

$$\gamma_{max(In\ Plane)} = 400 \times 10^{-6} + 50 \times 10^{-6} = 450 \times 10^{-6}\ rad$$

نقوم بحساب التشوهات باتجاه المحور الثالث:

$$\varepsilon_c = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_a + \varepsilon_b)$$

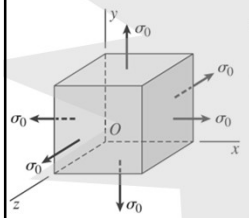


- من أجل الحالة الإجهادية المجاورة، بتطبيق قانون هوك:

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

- من أجل إجهادات ناظمية باتجاه واحد فقط: $e = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x)$

من أجل معامل بواسون 0.5 لا يوجد تغير بالحجم بغض النظر عن قيمة الإجهاد المطبق وهذا غير منطقي لذلك أكبر قيمة لمعامل بواسون 0.5.

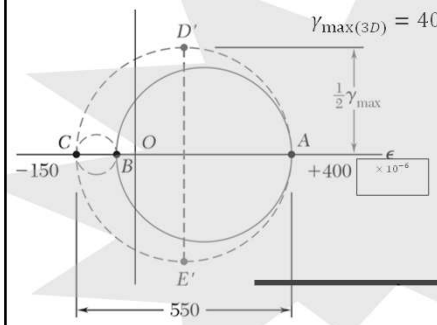


- يمكن استخدام علاقة التغير في واحدة الحجم لأي مادة $e = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$
- وبتعويض قانون هوك: $e = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

$$\varepsilon_c = -\frac{0.3}{0.7}(400 \times 10^{-6} - 50 \times 10^{-6}) = -150 \times 10^{-6}$$

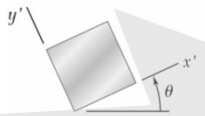
من دائرة مور بالحالة العامة يتم تحديد تشوهات القص الأعظمية:

$$\gamma_{max(3D)} = 400 \times 10^{-6} + 150 \times 10^{-6} = 550 \times 10^{-6}\ rad$$



EXAMPLE

من أجل حالة إجهادية معينة، تم تحديد قيمة التشوهات الموضحة بالجدول،
يُطلب رسم دائرة مور لكل من الحالات التالية؟



ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}	θ
-500μ	$+250\mu$	0	15° ↰
$+240\mu$	$+160\mu$	$+150\mu$	60° ↲
-800μ	$+450\mu$	$+200\mu$	25° ↲
0	$+320\mu$	-100μ	30° ↰

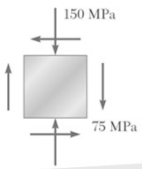
EXAMPLE

من أجل حالة إجهادية معينة، تم تحديد قيمة التشوهات الموضحة بالجدول، قيمة معامل بواسون 0.3.
يُطلب لكل حالة تحديد قيمة واتجاه التشوهات الرئيسية؟ قيمة تشوه القص الأعظمي المستوي و العام؟

ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}
-260μ	-60μ	$+480\mu$
-600μ	-400μ	$+350\mu$
$+160\mu$	-480μ	-600μ
$+30\mu$	$+570\mu$	$+720\mu$

EXAMPLE

من أجل الحالة الإجهادية المجاورة،
يُطلب تحديد قيمة واتجاه التشوهات الرئيسية العامة؟ باستخدام العلاقات و دائرة مور.



$$E = 200\ GPa, \qquad G = 77.2\ GPa$$

EXAMPLE

من أجل حالة إجهادية معينة، تم تحديد قيمة التشوهات التالية:
يُطلب تحديد قيمة الإجهادات الموافقة؟
باستخدام دائرة مور، يُطلب قيمة واتجاه التشوهات الرئيسية و الإجهادات الموافقة؟

$$\varepsilon_x = -720\mu, \qquad \varepsilon_y = -400\mu, \qquad \gamma_{xy} = 660\mu$$
$$E = 69\ GPa, \qquad G = 28\ GPa$$

End of 3^{rd} Lecture نهاية المحاضرة الثالثة