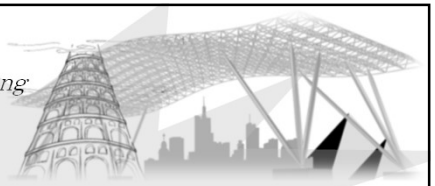
Hama University
Faculty of Civil Engineering
Department of Structural Engineering
Structural Mechanics 1

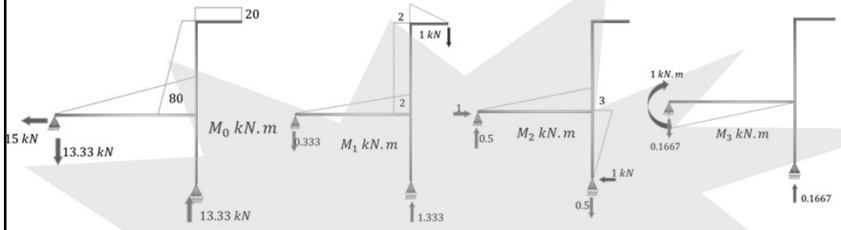


Lecture 3

Analysis of Indeterminate Structures
Virtual Work Method -3

طريقة العمل الوهمي في تحليل المنشآت الغير مقررة

By: Dr. Mhmoud SAUOD
Head of Structural Engineering Department

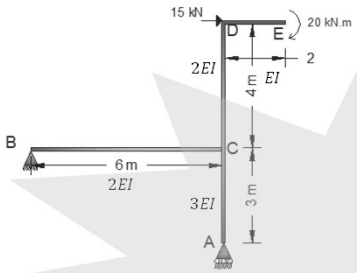


EXAMPLE

يُطلب وفق طريقة العمل الوهمي حساب مايلي:

- قيمة الانتقال الشاقولي في النقطة E؟
- قيمة الانتقال الأفقي في المسند A؟
- قيمة الدوران في المسند B؟

ANSWER



$$\delta_E^V = \int \frac{M_0 . M_1}{EI} dl = \frac{1}{EI}\left(\frac{2\times 2}{2}\times 20\right) + \frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{2}(20+80)\times 2\times 4\right) + \frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{3}\times 80\times 2\times 6\right) = \frac{400}{EI}\downarrow$$

$$\delta_A^H = \frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{3}\times 80\times 3\times 6\right) = \frac{240}{EI}\leftarrow$$

$$\theta_B = \int \frac{M_0 . M_3}{EI} dl = -\frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{6}\times 80\times 1\times 6\right) = -\frac{40}{EI}\circlearrowleft$$

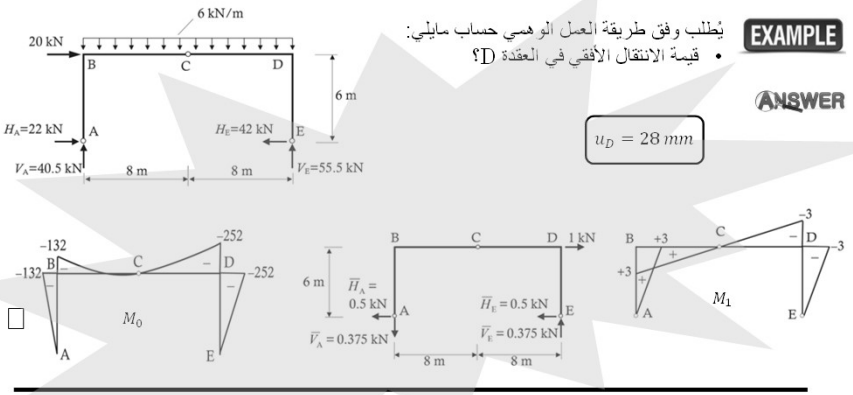
EXAMPLE

يُطلب وفق طريقة العمل الوهمي حساب مايلي:

- قيمة الانتقال الأفقي في العقدة D؟

ANSWER

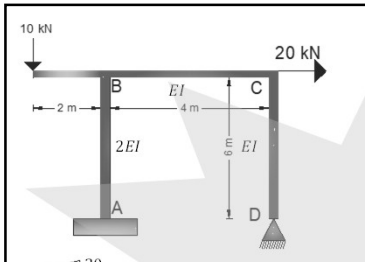
$u_D = 28\,mm$



دراسة الإطارات Frames

EXAMPLE

لإطار المجاور ،يُطلب رسم مخطط عزوم الانعطاف النهائية وفق طريقة العمل الوهمي؟

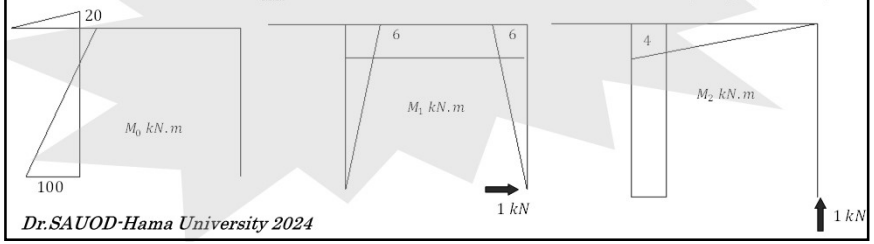


ANSWER

المنشأ غير مقرر من الدرجة الثانية، نقرره بإزالة المسند D.

نرسم مخطط M0 للإطار المقرر تحت تأثير الحمولات الخارجية.

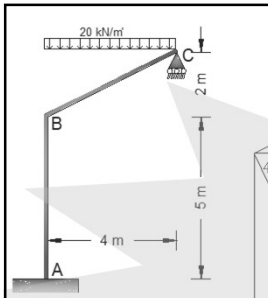
نرسم مخططات M_1, M_2 للإطار المقرر تحت تأثير الحمولات الواحدية.



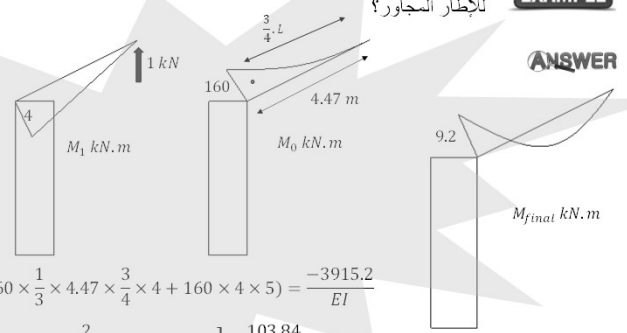
Dr.SAUOD-Hama University 2024

EXAMPLE

يُطلب وفق طريقة العمل الوهمي رسم مخطط العزوم النهائي للإطار المجاور؟



ANSWER



$$\delta_{01} = \int \frac{M_0.M_1}{EI}dl = -\frac{1}{EI}\left(160 \times \frac{1}{3} \times 4.47 \times \frac{3}{4} \times 4 + 160 \times 4 \times 5\right) = \frac{-3915.2}{EI}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1.M_1}{EI}dl = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2} \times 4 \times 4.47 \times \frac{2}{3} \times 4 + 4 \times 5 \times 4\right] = \frac{103.84}{EI}$$

- الانتقال عند المسند المزال صفر نظراً لوجود المسند فعلياً

$$\delta_{01} + x_1.\delta_{11} = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{\delta_{01}}{\delta_{11}} = 37.7\ kN \qquad M_{final} = M_0 + x_1.M_{11}$$

Dr.SAUOD-Hama University 2024

- نُرسم العزم من جهة الألياف المشدودة، جهة نمثل المردوجة.
- كل عقدة تتالية يجب أن تكون متوازنة، الألياف المشدودة الداخلية تبقى داخلية و الخارجية تبقى خارجية.
- لا يوجد عزوم على الأطفار في المخططات الواحدية.

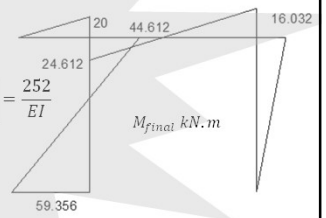
$$\delta_{01} = \int \frac{M_0.M_1}{EI}dl = \frac{1}{2EI}\left(\frac{20 \times 6 \times 6}{3} - \frac{100 \times 6 \times 6}{6}\right) = \frac{-180}{EI}$$

$$\delta_{02} = \int \frac{M_0.M_2}{EI}dl = \frac{1}{2EI}\left(\frac{20 \times 6}{2} \times 4 - \frac{100 \times 6}{2} \times 4\right) = \frac{-480}{EI}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1.M_1}{EI}dl = \frac{1}{2EI}\left(\frac{6 \times 6}{3} \times 6\right) + \frac{1}{EI}\left[6 \times 4 \times 6 + \left(\frac{6 \times 6}{3} \times 6\right)\right] = \frac{252}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{M_2.M_2}{EI}dl = \frac{1}{2EI}(4 \times 6 \times 4) + \frac{1}{EI}\left(\frac{4 \times 4}{3} \times 4\right) = \frac{69.333}{EI}$$

$$\delta_{12} = \int \frac{M_1.M_2}{EI}dl = \frac{1}{2EI}\left(\frac{6 \times 6}{2} \times 4\right) + \frac{1}{EI}\left(\frac{4 \times 4}{2} \times 6\right) = \frac{84}{EI}$$



$$\left.\begin{aligned}\delta_{01} + x_1.\delta_{11} + +x_2.\delta_{12} = 0\\ \delta_{02} + x_1.\delta_{21} + +x_2.\delta_{22} = 0\end{aligned}\right\} \begin{aligned}x_1 &= -2.672\ kN\\ x_2 &= 10.161\ kN\end{aligned}$$

$$M_{final} = M_0 + x_1.M_{11} + x_2.M_{22}$$

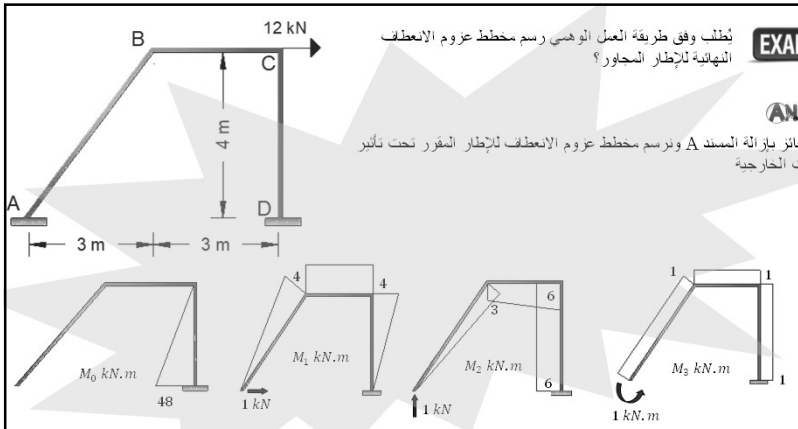
Dr.SAUOD-Hama University 2024

EXAMPLE

يُطلب وفق طريقة العمل الوهمي رسم مخطط عزوم الانعطاف النهائية للإطار المجاور؟

ANSWER

نقرر الجائز بإزالة المسند A ونرسم مخطط عزوم الانعطاف للإطار المقرر تحت تأثير الحمولات الخارجية



Dr.SAUOD-Hama University 2024

$$\delta_{01}=\int\frac{M_0.M_1}{EI}dl=-\frac{1}{EI}\times\frac{1}{6}\times4\times48\times4=\frac{-128}{EI}$$

$$\delta_{02}=\int\frac{M_0.M_2}{EI}dl=\frac{1}{EI}\times\frac{1}{2}\times4\times48\times6=\frac{576}{EI}$$

$$\delta_{03}=\int\frac{M_0.M_3}{EI}dl=-\frac{1}{EI}\times\frac{1}{2}\times4\times48\times1=\frac{-96}{EI}$$

$$\delta_{11}=\int\frac{M_1.M_1}{EI}dl=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\times4\times5\times4+4\times3\times4+\frac{1}{3}\times4\times4\times4\right]=\frac{96}{EI}$$

$$\delta_{22}=\int\frac{M_2.M_2}{EI}dl=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\times3\times5\times3+\frac{3}{6}\times3\times(2\times3+6)+\frac{3}{6}\times6\times(2\times6+3)+6\times4\times6\right]=\frac{222}{EI}$$

$$\delta_{33}=\int\frac{M_3.M_3}{EI}dl=\frac{1}{EI}[1\times5\times1+1\times3\times1+1\times4\times1]=\frac{12}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\int\frac{M_1.M_2}{EI}dl=-\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\times4\times5\times3+\frac{3}{2}\times4\times(3+6)+\frac{1}{2}\times4\times4\times6\right]=-\frac{122}{EI}$$

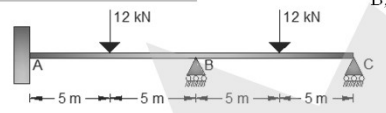
$$\delta_{13}=\delta_{31}=\int\frac{M_1.M_3}{EI}dl=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\times4\times5\times1+4\times1\times3+\frac{1}{2}\times4\times4\times1\right]=\frac{30}{EI}$$

$$\delta_{23}=\delta_{32}=\int\frac{M_2.M_3}{EI}dl=-\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\times3\times5\times1+\frac{3}{2}\times1\times(3+6)+6\times4\times1\right]=-\frac{45}{EI}$$

Supports Settlement

EXAMPLE

للجائز المجاور ، يُطلب حساب ردود الأفعال في المساند B,C تحت تأثير الأحمال المطبقة بالإضافة لحصول هبوطات بالمساند B,C كمايلي:

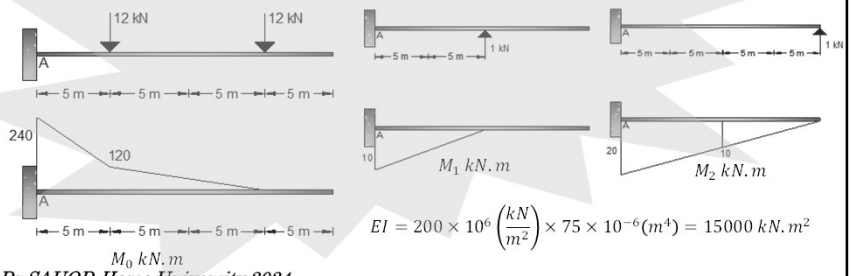


$\delta_B = 40\,mm\downarrow$ $\quad E = 200\,GPa$

$\delta_c = 25\,mm\downarrow$ $\quad I = 75\times10^6\,mm^4$

ANSWER

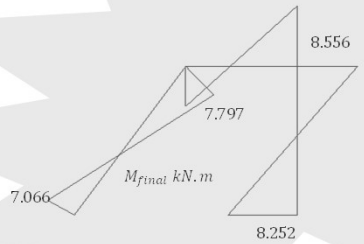
الجائز غير مقرر من الدرجة الثانية، نقرر المنشأ بإزالة المسندين B,C ونرسم مخططات عزوم الانعطاف الموافقة.



$$EI = 200\times10^6\left(\frac{kN}{m^2}\right)\times75\times10^{-6}(m^4)=15000\,kN.m^2$$

$$\left.\begin{aligned}\delta_{01}+x_1.\delta_{11}+x_2.\delta_{12}+x_3.\delta_{13}=0\\ \delta_{02}+x_1.\delta_{21}+x_2.\delta_{22}+x_3.\delta_{23}=0\\ \delta_{03}+x_1.\delta_{31}+x_2.\delta_{32}+x_3.\delta_{33}=0\end{aligned}\right\}\quad x_1=-7.797\,kN\;\; x_2=-5.447\,kN\;\; x_3=7.066\,kN$$

$$M_{final}=M_0+x_1.M_{11}+x_2.M_{22}+x_3.M_{33}$$



$$\delta_{01}=\int\frac{M_0.M_1}{EI}dl=-\frac{1}{EI}\left(\frac{5}{6}\times120(2\times5+0)+\frac{5}{6}\times60(0+5)+\frac{5}{6}\times240(2\times10+5)+\frac{5}{6}\times120(2\times5+10)\right)$$

$$\delta_{01}=-\frac{8250}{EI}=-0.55$$

$$\delta_{02}=\int\frac{M_0.M_2}{EI}dl=-\frac{1}{EI}(240\times15\times\frac{5}{2}+\frac{1}{3}\times240\times15\times15)=-\frac{23000}{EI}=-1.533$$

$$\delta_{12}=\int\frac{M_1.M_2}{EI}dl=\frac{1}{EI}\left(\frac{10\times10\times10}{2}+\frac{10\times10\times10}{3}\right)=\frac{833.333}{EI}=0.0555$$

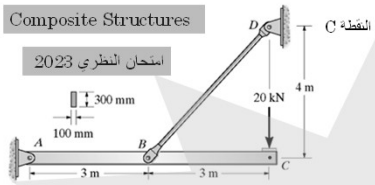
$$\delta_{11}=\int\frac{M_1.M_1}{EI}dl=\frac{1}{EI}\left(\frac{10\times10\times10}{3}\right)=\frac{333.333}{EI}=0.0222$$

$$\delta_{22}=\int\frac{M_2.M_2}{EI}dl=\frac{1}{EI}(\frac{20\times20\times20}{3})=\frac{2666.667}{EI}=0.1777$$

$$\left.\begin{aligned}-0.55+0.0222.x_1+0.0555.x_2=-0.04\\ -1.533+0.0555.x_1+0.1777.x_2=-0.025\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad\begin{aligned}x_1&=8.017\;\;kN\\ x_2&=5.982\;\;kN\end{aligned}$$

Composite Structures

امتحان النظري 2023



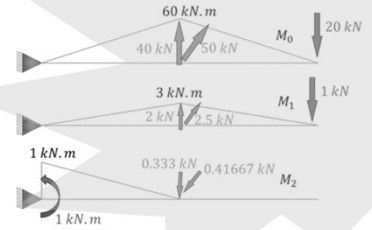
EXAMPLE

وفق طريقة العمل الوهمي، يُطلب حساب قيمة الانتقال الشاقولي في النقطة C وحساب قيمة الدوران في المسند A؟

$E = 200\ GPa$:BD قطر العنصر $d = 20\ mm$.

أبعاد مقطع العنصر AC: $100 \times 300\ mm$.

ANSWER



$$\delta_{C-V} = \int \frac{M_0.M_1}{EI}dl + \int \frac{N_0.N_1}{EA}L$$

$$\delta_{C-V} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3} \times 60 \times 3 \times 6\right) + \frac{1}{EA}(50 \times 2.5 \times 5)$$

$$\delta_{C-V} = \frac{360(kN.m^3)}{EI} + \frac{625(kN.m)}{EA}$$

$$\delta_{C-V} = \frac{360(kN.m^3)}{200 \times 10^9 \times (\frac{1}{12} \times 0.1 \times 0.3^3)} + \frac{625(kN.m)}{200 \times 10^9 \times \frac{\pi}{4}(0.02^2)}$$

$$\delta_{C-V} = 0.017947\ m = 17.9\ mm \downarrow$$

$$\theta_A = \int \frac{M_0.M_2}{EI}dl + \int \frac{N_0.N_2}{EA}L$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6} \times 60 \times 1 \times 3\right) - \frac{1}{EA}(50 \times 0.41667 \times 5)$$

$$\circlearrowleft \theta_A = -0.991 \times 10^{-3}\ rad$$

Dr.SAUOD-Hama University 2024

$$\delta_{01} = \int \frac{M_0.M_1}{EI}dl + \sum \frac{N_0.N_1}{EA}L = -\frac{1}{EI}(\frac{1}{3} \times 100 \times 2 \times 1 + 100 \times 1 \times 2 + \frac{1}{3} \times 100 \times 2 \times 1) + 0$$

$$\delta_{01} = -\frac{333.333}{EI} = -\frac{333.333}{200 \times 10^6 \times 20 \times 10^{-6}} = -0.08333\ m$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1.M_1}{EI}dl + \sum \frac{N_1.N_1}{EA}L$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3} \times 1 \times 2 \times 1 + 1 \times 1 \times 2 + \frac{1}{3} \times 1 \times 2 \times 1\right) + \frac{1}{EA}(2 \times 1.118^2 + 2 \times 0.5^2 + 0) = \frac{3.333}{EI} + \frac{2.999}{EA}$$

$$\delta_{11} = \frac{3.333}{EI} + \frac{2.999}{EA} = \frac{3.333}{200 \times 10^6 \times 20 \times 10^{-6}} + \frac{2.999}{200 \times 10^6 \times 400 \times 10^{-6}} = 0.8707 \times 10^{-3} m/kN$$

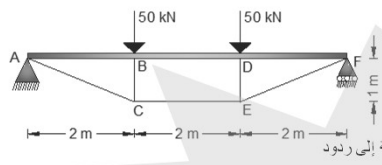
$$\delta_{01} + \delta_{11}.x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{0.08333}{0.8707 \times 10^{-3}} = 95.704\ kN$$

في حال عدم إهمال التشوهات المحورية في عناصر الشبكي:

$$\delta_{01} + \delta_{11}.x_1 = x_1.\boxed{\frac{L_{EC}}{EA}}$$

التشوه المحوري في العنصر المحذوف، نضيفه في السطر الموافق للمجهولة المحورية في الشبكي فقط.

Dr.SAUOD-Hama University 2024



EXAMPLE

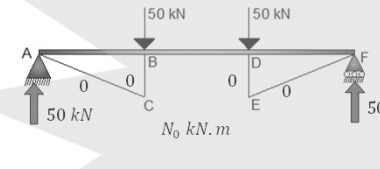
للمنشأ المختلط المجاور، يُطلب حساب القوة في العنصر EC بطريقة العمل الوهمي بإهمال التشوه المحوري في عناصر الشبكي؟

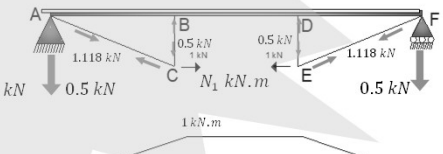
$E = 200\ GPa$ $I_{Beam} = 20 \times 10^6\ mm^4$

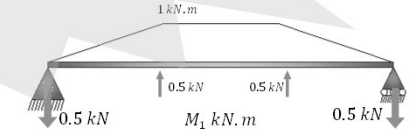
$A_{Truss} = 400\ mm^2$

ANSWER

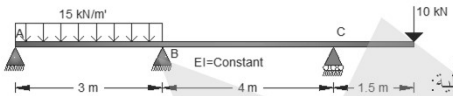
المنشأ غير مقرر من الدرجة الأولى، بسبب وجود الشبكي الذي يسبب قوة إضافية إلى ردود الأفعال في المساند. نقرر المنشأ بإزالة العنصر EC.







Dr.SAUOD-Hama University 2024

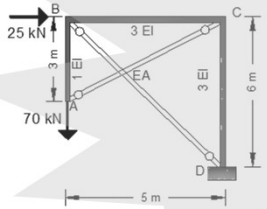


EXAMPLE

فئة أولى

للجائز المجاور، يُطلب رسم مخطط عزوم الانعطاف النهائية في كل من الحالات التالية:

- تحت تأثير الحمولات الخارجية فقط؟
- هبوط بالمسند C بمقدار 40mm؟
- ارتفاع بالمسند C بمقدار 20 mm؟



EXAMPLE

فئة ثانية

للإطار المجاور، يُطلب حساب القوة المحورية في كل من العناصر الشبكية في الحالتين التاليتين:

- إهمال التشوهات المحورية؟
- عدم إهمال التشوهات المحورية؟

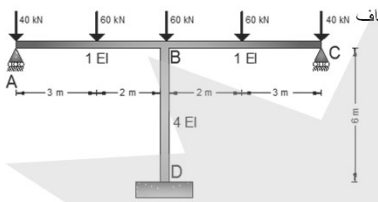
$E = 170\ GPa$ $I = 40 \times 10^6\ mm^4$

$A_{Truss} = 300\ mm^2$

Dr.SAUOD-Hama University 2024

EXAMPLE

فئة ثالثة



للإطار المجاور، يُطلب رسم مخطط عزوم الانعطاف النهائية بتأثير الحمولات الخارجية و هبوطات تفاضلية بالمسندين A,C؟

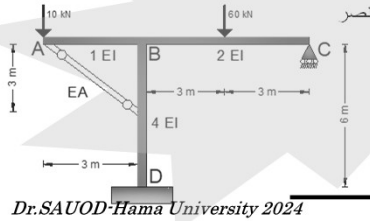
$\delta_A = 20\ mm \downarrow \qquad \delta_C = 45\ mm \downarrow$

$E = 200\ GPa$

$I = 57 \times 10^6\ mm^4$

EXAMPLE

فئة رابعة

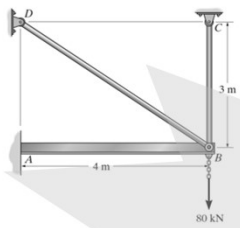


للإطار المجاور، يُطلب حساب القوة المحورية في العنصر الشبكي في الحالتين التاليتين:

- إهمال التشوهات المحورية؟
- عدم إهمال التشوهات المحورية؟

$E = 180\ GPa \qquad I = 120 \times 10^6\ mm^4$

$A_{Truss} = 400\ mm^2$



المسائل التالية غير محلولة للتدريب.

وفق طريقة العمل الوهمي، يُطلب حساب قيمة القوة المحورية في كل من العناصر الشبكية DB, BC؟

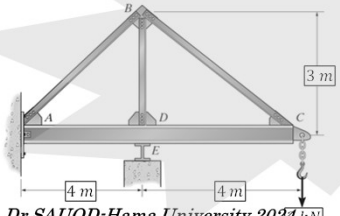
$E = 200\ GPa$. مقطع العنصرين الشبكيين : $A = 100\ mm^2$.

$I_b = 200 \times 10^6\ mm^4$.

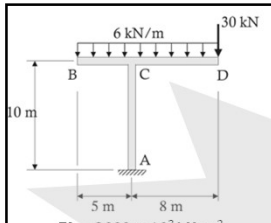
وفق طريقة العمل الوهمي، يُطلب حساب قيمة القوة المحورية في العنصر AB؟

$E = 200\ GPa$. مقطع العناصر الشبكية: $A = 260\ mm^2$.

$I_b = 400 \times 10^6\ mm^4$.

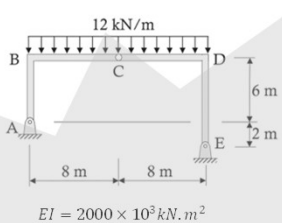


المسائل التالية غير محلولة للتدريب.



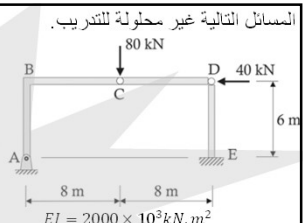
$EI = 2000 \times 10^3 kN.m^2$

يُطلب حساب قيمة الانتقال الشاقولي و الانتقال الأفقي عند النهاية D؟



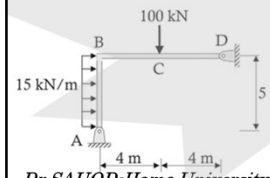
$EI = 2000 \times 10^3 kN.m^2$

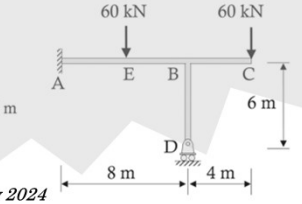
يُطلب حساب قيمة الانتقال الشاقولي عند C؟

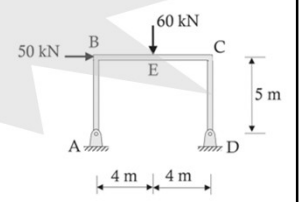


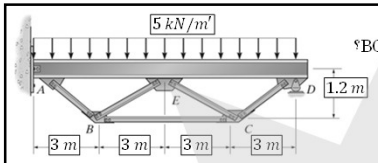
$EI = 2000 \times 10^3 kN.m^2$

يُطلب حساب قيمة الانتقال الشاقولي عند C؟









وفق طريقة العمل الوهمي، يُطلب حساب قيمة القوة المحورية في العنصر BC؟

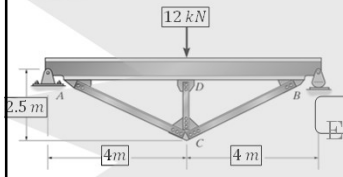
$E = 200\ GPa$. مقطع العناصر الشبكية: $A = 130\ mm^2$.

$I_b = 400 \times 10^6\ mm^4$. تعتبر المساند A,D مفصلة.

وفق طريقة العمل الوهمي، يُطلب رسم مخطط العزوم لكل من الجائزين DE, AB؟

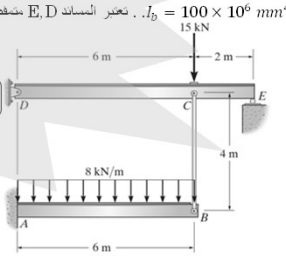
$E = 200\ GPa$. مقطع العنصر CB: $A = 200\ mm^2$.

$I_b = 100 \times 10^6\ mm^4$. . تعتبر المساند E,D مفصلة.



نهاية المحاضرة الثالثة

End of 3rd Lecture



وفق طريقة العمل الوهمي، يُطلب حساب قيمة القوة المحورية في العناصر الشبكية؟

$E = 200\ GPa$. مقطع العناصر الشبكية: $A = 324\ mm^2$.

$I_b = 400 \times 10^6\ mm^4$. . تعتبر المساند A,B مفصلة.