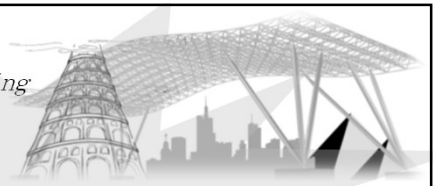
Hama University
Faculty of Civil Engineering
Department of Structural Engineering
Structural Mechanics 1



Lecture 1

Analysis of Indeterminate Structures
Virtual Work Method -1

طريقة العمل الوهمي في تحليل المنشآت الغير مقررة

By: Dr. Mhmoud SAUOD
Head of Structural Engineering Department

Introduction مقدمة

- تم مسبقاً تحليل المنشآت المقررة بالاعتماد على معادلات التوازن في المستوي. حيث أن عدد ردود الأفعال والقوى المجهولة في العناصر الداخلية يساوي عدد معادلات التوازن في المستوي /3/.
- في حال زيادة عدد العدد عن /3/ نلزم طرق إضافية تتعلق بالصلابة وقابلية التشوه للعناصر تساعد بتأمين عدد كاف من المعادلات لإيجاد قيم المجاهيل.
- الطرق التي سيتم استخدامها في تحليل المنشآت الغير مقررة، تُصنف لنوعين من الطرق وذلك تبعاً لنوع المجاهيل المتضمن في التحليل.
  - طرق القوى Force (Flexibility) Methods.
  - طرق الانتقالات Displacement (Stiffness) Methods.
- الطرق التي سيتم شرحها في المقرر:
  - طريقة العمل الوهمي Virtual Work Method
  - طريقة العزوم الثلاثة Three-Moment Equation
  - طريقة توزيع العزوم Moment-Distribution Method
- العلاقات الأساسية في التحليل الإنشائي للمنشآت المقررة والغير مقررة:
  - معادلات التوازن لضمان استقرار المنشأ.
  - شروط التوافق في التشوهات. مثلاً: العناصر المتصلة بنفس العقدة الصلدة يكون لها نفس الانتقالات و الدورانات. كما أن توزع القوى الداخلية و الانتقالات في المنشأ يتعلق بمساحة المقطع، عزم العطالة، معامل المرونة للعناصر.
  - علاقات القوة – التشوه.
- تعتبر طريقة العمل الوهمي أسلوب تحليلي يُستخدم لحساب القوى الداخلية و الانتقالات في المنشأ بالأخذ بعين الاعتبار للعمل المنفذ من الحمولات الخارجية و الانتقالات الوهمية.

- القوى الخارجية المطبقة على العنصر، تسبب قوى داخلية في مقطع ما للعنصر M,Q,N وذلك في حالة المستوي 2D.
- المنشأ سيغير شكله بسبب الانتقالات و التشوهات ε,Δ.
- القوى الخارجية F_R هي محصلة لمجوعة من القوى المطبقة على جزء صغير من العنصر F1,F2,F3....
- إذا تحرك هذا الجزء بمقدار Δ_R باتجاه المحصلة F_R فإن القوى ستقوم بعمل بسبب الانتقالات الجزئية لكل منها.
- إذا كان مقدار الانتقال Δ_R صغير فإن اتجاه وقيمة كل من القوى سيبقى دون تغيير، العمل الحاصل بأثير الانتقالات المرافقة:

$$F_R\Delta_R = F_1\Delta_1 + F_2\Delta_2 + \ldots\ldots + F_n\Delta_n$$

- بما أن المنشأ في حالة توازن:

$$F_R = 0 \rightarrow F_1\Delta_1 + F_2\Delta_2 + \ldots\ldots + F_n\Delta_n = 0$$

محصلة القوى الخارجية

$$\sum F_i\Delta_i = 0$$

العمل الحاصل في المنشأ المتوازن فيمثله صفر

- عندما يكون المنشأ في المرحلة المرنة وبحالة توازن:

$$W_E = W_i$$

العمل الحاصل بفعل القوى الخارجية و القوى الداخلية متساوي

- لنفترض أن نقاط من المنشأ تحركت بشكل افتراضي، حيث أن:

$\bar{\Delta}$: انتقالات

$\bar{e}$: تشوهات العناصر

$\bar{\varepsilon}$: تشوهات محددة

- تعتمد هذه الطريقة على مبدأ العمل الوهمي " العمل المنفذ من الحمولات الخارجية المطبقة على المنشأ يساوي العمل المنفذ من القوى الداخلية الناتجة عن تشوهات المنشأ"

" The work done by the external forces acting on a structure is equal to the work done by the internal forces resulting from the structure's deformation"

$$\sum (F_i.\delta_i) = \sum (Q_i.\delta_i)$$

قوة خارجية — الانتقال وهمي مفترض باتجاه القوة F1

قوة داخلية — الانتقال وهمي مفترض باتجاه القوة Qi

- يتم تطبيق انتقالات افتراضية في المنشأ بتأثير الحمولات الخارجية. تكون هذه الانتقالات صغيرة ومتوافقة مع الشروط المحيطية للمنشأ.
- تعتبر هذه الطريقة مناسبة لتحليل المنشآت الغير مقررة حيث أن عدد المجاهيل يزيد عن عدد معادلات التوازن. حيث يتم الحصول على معادلات إضافية لحساب المجاهيل من خلال الانتقالات الوهمية المفترضة.
- يمكن أن تطبق هذه الطريقة على العديد من حالات التحليل الإنشائي: التحليل الستاتيكي، التحليل الديناميكي، تحليل استقرار المنشآت.

❑ يوجد طريقتين في حل جداء المخططات للعزوم:

- جداء المخططات.

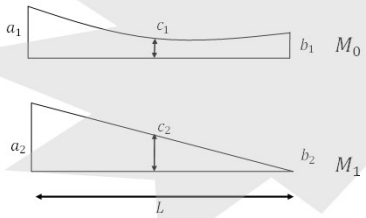
يوجد جدول مرفق بالمحاضرة

$$\delta_{0n} = y_n = \frac{1}{EI}\,(A.y_c)$$

مساحة مخطط العزم للحمولات الخارجية

قيمة العزم في مخطط عزوم القوى الواحدية عند نقطة مركز ثقل مخطط عزم الحمولات الخارجية

- جداء المخططات وفق تكاملات مور.



$$M_0.M_1 = \frac{L}{6}(a_1.a_2 + b_1.b_2 + 4.c_1.c_2)$$

- نستخدم طريقة تكاملات مور في حالة مخططات منحنية لـ M0.
- جداء المخططات الخطية تبادلي.

❑ العمل الحاصل بتأثير القوى: $F^T.\bar{\Delta} = F_N^T.\bar{e}$

القوى الداخلية والانتقالات المتوافقة

❑ مبدأ العمل الوهمي يتعلق بـ:

1) توازن القوى الداخلية و الخارجية.
2) توافق الانتقالات و التشوهات.

$$\sum F.\Delta = \int_V \sigma.\varepsilon.dV$$

❑ من أجل عنصر شبكي:

$$\int_V \sigma.\varepsilon.dV = \int_V \frac{N}{A}.\frac{\Delta L}{L} = \int N.\Delta L.\frac{dV}{A.L} = N.\Delta L.\int \frac{dV}{A.L} = N.\Delta L = N.e$$

❑ نظرية القوى الوهمية، نظرية القوى الواحدية

$$\sum(Virtual\ Extenal\ Forces) \times (Real\ Dispalcements) = \int (Virtual\ Stresses) \times (Real\ Strains).dV$$

القوى الخارجية الوهمية — الانتقالات الحقيقية — الإجهادات الوهمية — التشوهات الحقيقية

❑ نظرية الانتقالات الوهمية، نظرية الانتقالات الواحدية

$$\sum(Real\ Extenal\ Forces) \times (Virtual\ Dispalcements) = \int (Real\ Stresses) \times (Virtual\ Strains).dV$$

القوى الخارجية الحقيقية — الانتقالات الوهمية — الإجهادات الحقيقية — التشوهات الوهمية

خطوات الحل بطريقة العمل الوهمي

1) تحديد درجة عدم التقرير للمنشأ، وتقريره.
2) رسم مخطط M_0 و هو مخطط عزم الانعطاف في الجملة المقررة تحت تأثير الحمولات الخارجية فقط.
3) رسم المخططات الواحدية، بوضع واحدة القوى في موضع القيد المُزال كلٍ على حدا بدون الحمولات الخارجية.
4) حساب الانتقالات.
5) كتابة معادلات العمل الوهمي:

$$\delta_{01} + \delta_{11}.x_1 + \delta_{12}.x_2 + \delta_{13}.x_3 = 0$$
$$\delta_{02} + \delta_{21}.x_1 + \delta_{22}.x_2 + \delta_{23}.x_3 = 0$$
$$\delta_{03} + \delta_{31}.x_1 + \delta_{32}.x_2 + \delta_{33}.x_3 = 0$$

بحل جملة المعادلات نحدد المجاهيل: x_1, x_2, x_3

6) رسم مخطط العزم النهائي.

$$M_{Final} = M_0 + M_1.x_1 + M_2.x_2 + M_3.x_3$$

$$\delta_{01} = \int \frac{M_0.M_1}{EI}dl \qquad \delta_{02} = \int \frac{M_0.M_2}{EI}dl \qquad \dots\dots\dots \delta_{33} = \int \frac{M_3.M_3}{EI}dl$$

- يوجد نوعين من الحالات في طريقة العمل الوهمي: 1)-حساب الانتقالات/ الدورانات للمنشآت المقررة . 2)- رسم مخطط عزوم الانعطاف النهائية للمنشآت الغير مقررة

❑ العلاقة العامة في طريقة العمل الوهمي:

$$1 \times y_n = \int_0^L \frac{M_1.M_0}{EI}dl + \int_0^L \frac{N_1.N_0}{EA}dl + \int_0^L \frac{Q_1.Q_0}{GA}dl$$

❑ بالنسبة للجوائز المستمرة، نهمل تأثير N,Q فتصبح العلاقة:

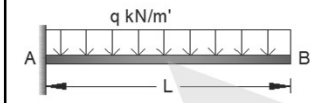
$$1 \times y_n = \int_0^L \frac{\overline{M_1}.M_0}{EI}dl$$

❑ بالنسبة للإطارات، نأخذ تأثير M. بالنسبة للإطارات مع عناصر شبكية M,N، ويهمل تأثير القص Q.
❑ بالنسبة للشبكيات، نأخذ تأثير N فقط.
❑ لحساب الانتقالات، نطبق واحدة القوى أو واحدة العزوم في النقطة المراد حساب الانتقال/ الدوران فيها. ثم نرسم مخطط M_0 للجائز بحمولاته الحقيقية، ومخطط M_1 للجائز بوجود الحمولة الوهمية المطبقة فقط.

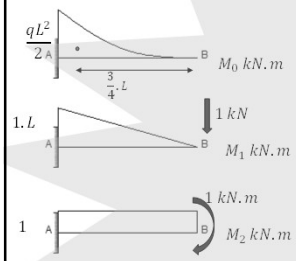
- تكون قيمة الانتقال/ الدوران موجبة إذا كانت المخططات بنفس الاتجاه وسالبة إذا كانت المخططات باتجاهين مختلفين.

EXAMPLE

يُطلب وفق طريقة العمل الوهمي حساب قيمة الانتقال الشاقولي و الدوران في النقطة B؟



ANSWER



$$\delta_B = \int \frac{M_0.M_1}{EI}dl = \frac{1}{EI}A.y_c = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}.\frac{qL^2}{2}.L.\frac{3}{4}.1.L\right] = \frac{qL^4}{8\,EI}$$

$$\theta_B = \int \frac{M_0.M_2}{EI}dl = \frac{1}{EI}A.y_c = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}.\frac{qL^2}{2}.L.1\right] = \frac{qL^3}{6\,EI}$$

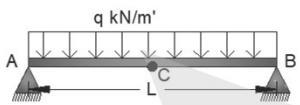
Dr.SAUOD-Hama University 2024

EXAMPLE

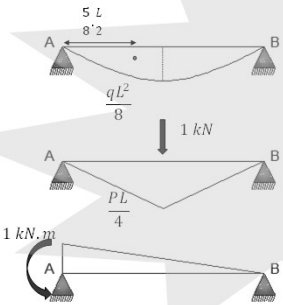
يُطلب وفق طريقة العمل الوهمي حساب مايلي:

- قيمة الانتقال الشاقولي في النقطة C؟
- قيمة الدوران في المسند A؟

ANSWER



- ❑ نرسم مخطط M_0 للجائز تحت تأثير الأحمال الخارجية.
- ❑ نطبق واحدة القوى في النقاط المراد حساب الانتقال/ الدوران فيها وبالاتجاه المفروض ونرسم مخطط عزوم الانعطاف M_1, M_2 الناتجة عن تطبيق واحدة القوى بعد إزالة الحمولات الخارجية.



- مخطط M_1 خط منكسر لذلك نقسم المخطط تبعاً لعدد الخطوط المنكسرة.

$$\delta_c = \int \frac{M_0.M_1}{EI}dl = \frac{1}{EI}2A.y_c$$

$$\delta_c = 2\left[\frac{2}{3}\frac{qL^2}{8}\frac{L}{2}.\frac{5}{8}\frac{(P=1)L}{4}\right]\frac{1}{EI} = \frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI}$$

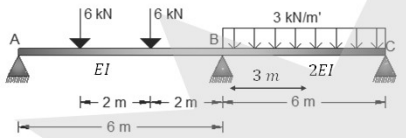
$$\theta_A = \int \frac{M_0.M_1}{EI}dl = \frac{1}{EI}A.y_c = -\frac{1}{EI}\left[\frac{2}{3}.\frac{qL^2}{8}.L.\frac{1}{2}(1)\right] = -\frac{qL^3}{24EI}$$

Dr.SAUOD-Hama University 2024

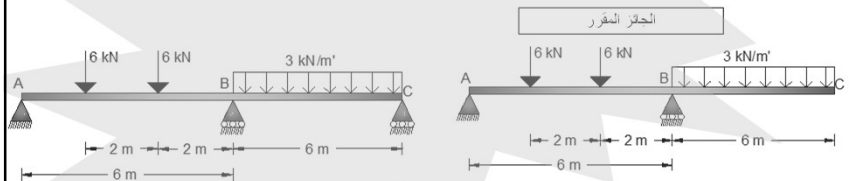
EXAMPLE

يُطلب وفق طريقة العمل الوهمي رسم مخطط عزوم الانعطاف النهائية للجائز المجاور؟

ANSWER



نقرر الجائز بإزالة المسند C ونرسم مخطط عزوم الانعطاف للجائز المقرر تحت تأثير الحمولات الخارجية.



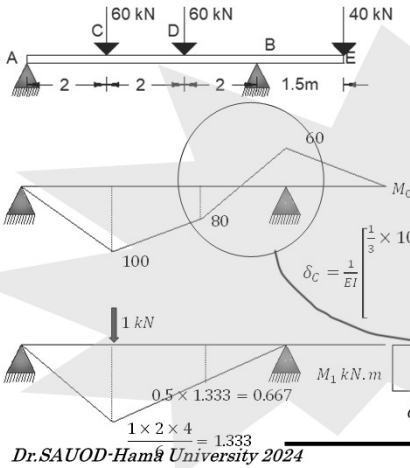
- في الجائز المستمر، يمكن تحويل جميع المساند المفصلية إلى مساند متدرجة باستثناء مسند ثابت واحد لتحقيق استقرار الجائز.

Dr.SAUOD-Hama University 2024

EXAMPLE

يُطلب وفق طريقة العمل الوهمي حساب قيمة الانتقال الشاقولي في النقطة C؟

ANSWER



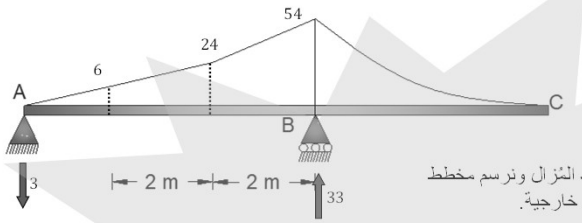
$$\delta_C = \int \frac{M_0.M_1}{EI}dl = \frac{1}{EI}\sum A.y_c$$

$$\delta_C = \frac{1}{EI}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{3}\times 100\times 2\times 1.333 + \frac{1}{6}\times 2\times 1.333\times(2\times 100+80)\\ +\frac{1}{6}\times 2\times 0.667\times(2\times 80+100)\\ +\frac{1}{3}\times 80\times 0.667\times 2 - \frac{1}{6}\times 60\times 0.667\times 2\end{array}\right]$$

- تمت تجزأة المخطط لمثلثين، الأول من الأسفل بقيمة 80 و الثاني من الأعلى بقيمة 60.

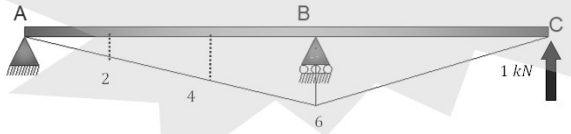
$$\delta_C = \frac{293.32}{EI}$$

Dr.SAUOD-Hama University 2024



$M_0\ kN.m$

نطبق واحدة القوى في موضع المسند النزال ونرسم مخطط عزوم الانعطاف الناتجة بدون أحمال خارجية.



$M_1\ kN.m$

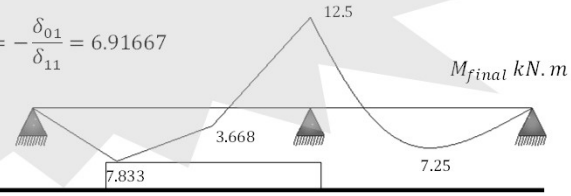
$$\delta_{01} = \int \frac{M_0.M_1}{EI}dl = -\frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{4}\times 54\times 6\times 6\right) - \frac{1}{EI}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{1}{6}\times 24\times 2\times(2\times 4+6)+\frac{1}{6}\times 54\times 2\times(2\times 6+4)\right)\\ +\left(\frac{1}{6}\times 6\times 2\times(2\times 2+4)+\frac{1}{6}\times 24\times 2\times(2\times 4+2)\right)\\ +\left(\frac{1}{3}\times 2\times 2\times 6\right)\end{array}\right]$$

$$\delta_{01} = -\frac{747}{EI}$$

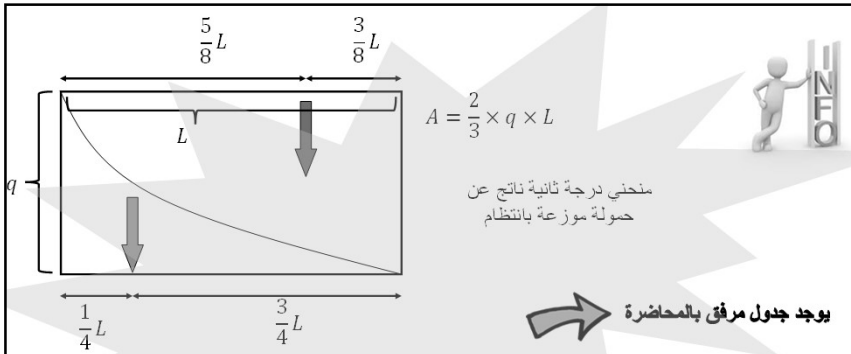
$$\delta_{11} = \int \frac{M_1.M_1}{EI}dl = \frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{3}\times 6\times 6\times 6\right) + \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}\times 6\times 6\times 6\right) = \frac{108}{EI}$$

$$\delta_{01} + x_1.\delta_{11} = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{\delta_{01}}{\delta_{11}} = 6.91667$$

$$M_{final} = M_0 + x_1.M_{11}$$



$M_{final}\ kN.m$



$$A = \frac{2}{3}\times q\times L$$

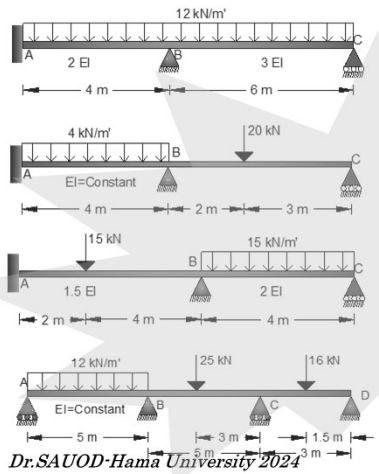
منحني درجة ثانية ناتج عن حمولة موزعة بانتظام

يوجد جدول مرفق بالمحاضرة

$$A = \frac{1}{3}\times q\times L$$

أسئلة العملي للمحاضرة الأولى

يُطلب رسم مخطط عزوم الانعطاف النهائية للجوائز التالية باعتماد طريقة العمل الوهمي؟



فئة أولى

فئة ثانية

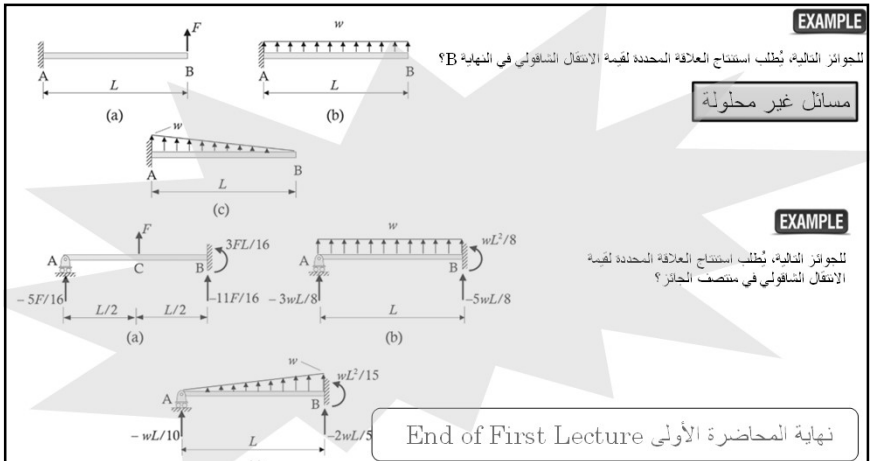
فئة ثالثة

فئة رابعة

EXAMPLE

للجوائز التالية، يُطلب استنتاج العلاقة المحددة لقيمة الانتقال الشاقولي في النهاية B؟

مسائل غير محلولة



EXAMPLE

للجوائز التالية، يُطلب استنتاج العلاقة المحددة لقيمة الانتقال الشاقولي في منتصف الجائز ؟

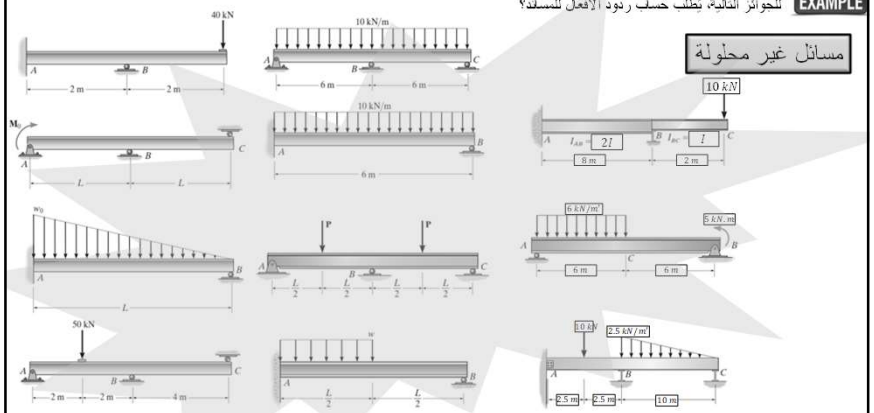
نهاية المحاضرة الأولى End of First Lecture

Dr.SAUOD-Hama University 2024

EXAMPLE

للجوائز التالية، يُطلب حساب ردود الأفعال للمساند؟

مسائل غير محلولة



Dr.SAUOD-Hama University 2024