المحاضرة السابعة

علم السكون

مقدمة:

يدرس علم الميكانيك الظواهر الفيزيائية، ويرتبط بشكل وثيق بعلم الرياضيات. والرياضيات والميكانيك هما ركنان أساسيان في كل العلوم الهندسية.

يطلق اسم الميكانيك النظري (العام) على العلم الذي يدرس حركة الأجسام وتوازنها والتأثيرات المتبادلة فيما بينها. ويتكون بشكل عام من ثلاث أقسام:

١-ميكانيك الأجسام الصلبة.

٢-ميكانيك الأجسام الصلبة القابلة للتشوّه.

٣-ميكانيك الموائع.

سيتم دراسة فقط القسم الأول ((ميكانيك الأجسام الصلبة)).

٥-١-ميكانيك الأجسام الصلبة:

يدرس هذا العلم الأجسام الصلبة غير القابلة للتشوّه، وهي الأجسام التي لا يتغير شكلها تحت تأثير الحمولات والقوى المؤثرة عليها. ولاحقاً سيتم استعمال مصطلح الأجسام الصلبة اختصاراً للتعبير عن هذه الأجسام. وينقسم هذا العلم بدوره إلى ثلاثة أقسام:

٥-١-١-علم السكون Statice:

وهو يبحث في شروط توازن الأجسام الصلبة تحت تأثير القوى المختلفة وهي في حالة السكون أو التي تتحرك بحركة منتظمة. (دراستنا ستقتصر على الأجسام الصلبة وهي في حالة السكون).

٥-١-٢-- علم الحركة :Kinematic

يدرس علم الحركة حركة الأجسام من الناحية الهندسية فقط، دون التعرض لمسببات الحركة (القوى المؤثرة عليها). فهو يدرس الخواص العامة للحركة (المسافة المقطوعة، السرعة، التسارع وعلاقتها مع الزمن).

٥-١-٣-- علم التحريك Dynamics :

يدرس علم التحريك الحركة ومسبباتها من خلال دراسة قوانين حركة الأجسام والقوى المؤثرة عليها والتي تسبب حركة تلك الأجسام.

ستقتصر دراسة المقرر على علم السكون (عدم الحركة). لذلك لابد من استعراض بعض المفاهيم والقوانين الأساسية التي تحكم علم السكون.

٥-٢-المفاهيم والقوانين الأساسية في علم السكون:

٥-٢-١-النقطة المادية:

وهي جسم يتمثل على شكل نقطة حجمها مُهمل وتتركز فيها كتلة الحجم. مثال على ذلك:

يمكن إهمال حجم الأرض بالمقارنة مع حجم الفضاء المحيط فيها، لذا يمكن أن نعامل الأرض على أنها نقطة مادية عند دراسة الحركة في الفضاء.

٥-٢-٢-الجسم الصلب:

وهو الجسم الذي يتكون من مجموعة كبيرة من النقاط المادية التي تبقى المسافة بينها ثابتة تحت تأثير الحمولات والقوى المطبقة عليها. أما الجسم الصلب القابل للتشوّه، فإن المسافة بين نقاطه المادية قد تتعرض للتغيير تحت تأثير القوى المطبقة عليها. (هذه الأجسام سندرسها في مقرري مقاومة المواد والإنشاءات).

٥-٢-٣-القوة:

وهي كل فعل يسعى لتغيير حالة الجسم الراهنة (سواء كانت سكون أو حركة) أو لتغيير شكله أو أبعاده (تشويهه).

٥-٢-٤-قانون متوازي الأضلاع:

وهو نفس القانون المطبق في المتجهات، حيث أن مجموع (حاصل جمع) قوتين غير متوازيتين مطبقتين على جسم في نقطة واحدة منه هو قوة تمثل قطر متوازي الأضلاع المنشأ على تلك القوانين.

٥-٢-٥-قانون التوازن:

إذا طبقت على جسم ما مجموعة قوى فإن هذا الجسم يكون في حالة توازن (سكون) فقط إذا كانت محصلة هذه القوى معدومة (تساوي الصفر)، والعكس صحيح. إذا طبقت على جسم ما مجموعة قوى وكان هذا الجسم في حالة توازن (سكون) فإن محصلة هذه القوى معدومة.

٥-٢-٦-قانون ضم الفعل (التأثير):

لا يتغير فعل (تأثير) جملة قوى مطبقة على جسم إذا أضفنا إليها أو حذفنا منها جملة قوى متوازنة (معدومة المحصلة). مثال: لعبة شد الحبال حيث تبقى في حالة توازن إذا أضفنا لكل طرف لاعب بنفس قوة اللاعب الآخر.

٥-٢-٧-قانون الانزلاقية:

إذا طبقت قوة على جسم ما، فإنه يمكن زلق هذه القوة على حاملها ولن يتغير تأثيرها على الجسم الصلب. هذا القانون غير قابل للتطبيق في حالة الأجسام الصلبة القابلة للتشوّه وذلك بسبب اختلاف تأثير القوة عند تعير نقطة تأثيرها.

٥-٢-٨-قانون الفعل ورد الفعل:

لكل فعل رد فعل يساويه بالقيمة ويعاكسه بالاتجاه.

٥-٣-القوى (جملة القوى) وخواصها:

كما ذكرنا سابقاً فإن القوة هي كل فعل يسعى لتغيير حالة الجسم أو شكله أو أبعاده. والقوة عبارة عن متجه يعين من خلال خواصه:

١-القيمة.

٢-الاتجاه (الحامل والمنحنى والجهة)

٣-نقطة التأثير.

إن قيمة القوة هو مقدراها ويعطى بالوحدات الدولية بواحدة النيوتن **/ N /**. أما اتجاه القوة فيحدد في المسائل ثنائية البعد (المستوية) بالزاوية التي يصنعها متجه القوة مع أحد المحاور الإحداثية المتعامدة، أو من خلال مساقط القوة على تلك المحاور Fx , Fy . أما في المسائل ثلاثية البعد (الفراغية) فيحدد اتجاه القوة من خلال الزوايا التي يصنعها متجه القوة مع المحاور الإحداثية المتعامدة (يكفي زاويتان). أو من خلال المساقط على المحاور.Fx , Fy, Fz

كما أن للقوة أنواع مختلفة فإن تصنيفها يخضع لمعايير مختلفة وسيتم عرض لمختلف أنواع القوى حسب معايير تصنيفها:

٥-٣-١-حسب وضعها بالنسبة إلى الجسم:

أ-قوى خارجية: وهي تؤثر على الجسم من خارجه.

ب-قوى داخلية: وهي تنشأ داخل الجسم بسبب تأثير القوى الخارجية.

عند دراسة توازن الجسم تؤخذ بعين الاعتبار فقط القوى الخارجية المؤثرة فيه. ولكن لدى دراسة تشوّه الجسم فتؤخذ بعين الاعتبار عند ذلك تأثير كل القوى الخارجية منها والداخلية.

٥-٣-٢-حسب مكان تأثيرها (تطبيقها) على الجسم:

أ-قوى مركزة: وهي قوى مطبقة على الجسم في نقطة منه، أي أن مجموعة القوى هذه تتلاقى حواملها في نقطة واحدة من الجسم وقد تكون جملة قوى مستوية أو فراغية.

ب-قوى موزعة: وهي قوى تؤثر في نقاط عديدة منه، أي أنها موزعة على نقاط الجسم وقد تكون موزعة بشكل منتظم أو بشكل غير منتظم (ضغط السائل جدران الخزان).

٥-٣-٣-حسب مدة تأثيرها:

أ-قوى دائمة (حمولة دائمة): وهي قوى مطبقة على الجسم طوال الوقت (فعل الوزن الذاتي للجسم).

ب-قوى مؤقتة (متغيرة): وهي قوى تتغير تبعاً للظروف وقد تظهر أو تختفي بتغير أسبابها (حركة وسائط النقل على الطرق أو الجسور، تأثير تغير درجة الحرارة...).

٥-٣-٤-حسب طبيعتها الحركية:

أ-قوى استاتيكية: وهي قوى ثابتة أو متغيرة خطياً بشكل طفيف وبسرعة بطيئة.

ب-قوى ديناميكية: وهي قوى متغيرة بشكل فجائي أو سريع (صالة متعددة الأغراض).

٥-٣-٥-حسب أهمية القوى بالنسبة للمنشأة:

أ-قوى رئيسية: وهي تمثل القوى الدائمة التي تؤثر على المنشأة (الوزن الذاتي، وزن الأثاث، وزن المعدات المستخدمة، المنشأة، وزن الأشخاص العاملين أو القاطنين...).

ب-قوى إضافية: و هي قوى متغيرة تؤثر باستمرار على المنشأة (تأثير شدة الرياح) أو هي قوى تحدث آنياً (إقلاع أو فرملة الآليات ، تأثير تغير درجات الحرارة...) .

ج – قوى خاصة: وهي قوى طارئة تحدث في حالات خاصة (اندفاع السيول، الزلازل...).

تركيب جملة قوى المتلاقية وتحليلها (تفريقها)

مقدمة:

كما عرفنا سابقا فإن القوة هي كل فعل يسعى لتغيير حالة الجسم أو شكله، وهي عبارة عن متجه له قيمة (طويلة) ونقطة تأثير واتجاه (حامل وجهة). ندعو أية مجموعة من القوى بجملة القوى، والتي يمكن أن تلتقي في نقطة واحدة وتدعى بجملة القوى المتلاقية وفي حال توازت القوى فيما بينها فتدعى بجملة القوى المتوازية وستتم دراسة جملة القوى المتلاقية في هذا الفصل والمتوازية في فصول لاحقة.

٦-١-المجموع الهندسي لجملة قوى:

لدينا جملة القوى $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ من نقطة ما و لتكن (o) يمكن أن نرسم المتجهات الموازية لمتجهات القوى بالتسلسل الذي نريده فنحصل على مضلع مفتوح ، يسمى مضلع القوى . يعد ضلع الإغلاق لهذا المضلع هو المتجه $\vec{R}$ الذي يمثل المجموع الهندسي لجملة القوى المفروضة .

هذا لا يعني أن المتجه $\vec{R}$ يمثل محصلة القوى المؤثرة لأن تأثيره قد لا يكون مكافئاً لتأثير جملة القوى معاً ، يحدث هذا التطابق فقط في حالة القوى المتلاقية في نقطة واحدة حيث المحصلة تساوي المجموع الهندسي ((لكل جملة قوى مجموع هندسي و لكن ليس لكل جملة محصلة وحيدة مكافئة له تماماً)) .

حالات خاصة:

١- إذا كان مضلع القوى مغلقاً (مبدأ أول متجه قوة منطبق على نهاية آخر متجه قوة) فإن المجموع الهندسي لهذه القوى معدوماً. ولكن هذا لا يعني أن جملة القوى متوازنة فقد يكون هناك عزوم لهذه القوى غير معدومة.

٢- إذا كانت جملة القوى مستوية فإن مضلع القوى لها يكون مستوياً حتماً وإذا كانت فراغية فمضلعها فراغياً.

٦-٢-جمع القوى المستوية:

٦-٢-١-محصلة قوتين متلاقيتين:

لإيجاد محصلة قوتين متلاقيتين في نقطة واحدة يمكن استخدام قاعدة متوازي الأضلاع لجمع المتجهات، أو يمكن استخدام طريقة مضلع القوى للحصول على المجموع الهندسي للقوتين والذي يكون في هذه الحالة مساوياً لمحصلة القوتين (كونها متلاقية)

وبما أن مضلع القوى هنا بشكل مثلث، فيمكن استخدام قوانين المثلثات لإيجاد محصلة القوتين تحليلياً.

في أي مثلث تتحقق العلاقات التالية:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a.c.\cos\beta$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$ (علاقة لامي)

بالتالي من مضلع القوى (مثلث القوى) يمكن إيجاد قيمة محصلة القوتين $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ التالية:

$$R^2 = {F_1}^2 + {F_2}^2 - 2F_1.F_2.\cos\gamma$$

أو العلاقة التالية:

$$R^2 = {F_1}^2 + {F_2}^2 + 2F_1.\mathrm{F_2}.\cos\theta \quad \text{حيث:} \quad \theta = \pi - \gamma$$

$$\cos\theta = \cos\pi - \gamma = -\cos\gamma$$

أو من علاقة لامي:

$$\frac{\mathrm{R}}{\sin\gamma} = \frac{\mathrm{F_1}}{\sin\alpha} = \frac{\mathrm{F_2}}{\sin\beta}$$

كما يمكن إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين اعتماداً على الإسقاط على المحاور الإحداثية المتعامدة (x,y) كما في الشكل:

حيث : $\mathrm{Rx} = \Sigma\mathrm{Fx}$, $\mathrm{Ry} = \Sigma\mathrm{Fy}$,

$$\vec{R} = R_x.\vec{\imath} + R_y.\vec{\jmath}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

أما الزوايا الموجهة لمتجه القوة $\vec{R}$ هي:

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} \quad , \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R}$$

٦-٢-٢-محصلة جملة قوى متلاقية في نقطة واحدة:

لإيجاد محصلة جملة قوى متلاقية في نقطة واحدة يمكن تطبيق قاعدة متوازي الأضلاع بين قوتين لإيجاد محصلتهما $\vec{R}_{1-2}$ ثم نطبق نفس القاعدة لإيجاد محصلة المحصلة $\vec{R}_{1-2}$ مع قوة ثالثة ونجد محصلتهما $\vec{R}_{1-2-3}$ ثم بعد ذلك نطبق نفس القاعدة لإيجاد محصلة القوة $\vec{R}_{1-2-3}$ مع قوة رابعة وهكذا حتى نحصل على المحصلة النهائية لجملة القوى.

كما يمكن استخدام طريقة مضلع القوى للحصول على المجموع الهندسي للقوى والذي يمثل في هذه الحالة محصلة القوى.

بالإضافة إلى الحلول التخطيطية يمكن إيجاد محصلة جملة قوى تحليلياً وفق العلاقات الواردة في الفقرة السابقة.

$$R_{1-2}^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1.F_2\cos\left(\widehat{F_1,F_2}\right)$$

$$R_{1-2-3}^2 = F_3^2 + R_{1-2}^2 + 2F_3R_{1-2}\cos\left(\widehat{F_3,R_{1-2}}\right)$$

حتى نحصل على قيمة المحصلة النهائية $\vec{R} = \sum\vec{F}$.

كذلك يمكن إيجاد محصلة جملة قوى متلاقية في نقطة واحدة باستخدام الإسقاط على المحاور الإحداثية(x.y)

فنجد أن: $\Sigma Fx = Rx$, $\Sigma Fy = Ry$,

$$\vec{R} = R_x.\vec{i} + R_y.\vec{j}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} \quad , \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R}$$

٦-٣-جملة القوى الفراغية:

إن إيجاد محصلة القوى الفراغية تخطيطياً أكثر تعقيدا من حالة جملة القوى المستوية. حيث في هذه الحالة يصعب استخدام قاعدة متوازي السطوح (هي نفس قاعدة متوازي الأضلاع بالحالة المستوية) أو طريقة مضلع القوى. لذلك يفضل في حالة جملة القوى الفراغية استخدام الإسقاط على المحاور الإحداثية المتعامد (x,y,z) ففي حالة جملة قوى فراغية متلاقية في نقطة واحدة نعتم تلك النقطة كمبدأ للإحداثيات (x,y,z) ثم نوجد مساقط كل القوى على تلك الإحداثيات وبعد ذلك نحصل على مساقط المحصلة ومن ثم قيمتها وبعد ذلك نحدد اتجاهها وفق العلاقات التالية :

$$R_x = \sum F_x \quad , \; R_y = \sum F_y \quad , \quad R_z = \sum F_z$$

$$\vec{R} = R_x.\vec{\imath} + R_y.\vec{\jmath} + R_z.\vec{k}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} \quad , \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{R_z}{R}$$

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$$

٦-٤-تحليل قوة مستوية إلى مركبتين:

لا يمكن تحليل (تفريق) قوة مستوية إلا إلى قوتين فقط تقعان معاً في نفس المستوي ويمكن أن يتم ذلك حسب المعلومات المتوفرة عن تلك المركبتين لهذه القوة.

٦-٤-١-حاملا المركبتين معلومين:

تخطيطياً يتم الحل كما يلي:

نرسم من نهاية القوة المراد تحليلها مستقيماً يوازي حامل القوة الأولى فيتقاطع مع حامل القوة الثانية في نقطة وكذلك نرسم مستقيماً يوازي حامل القوة الثالثة فيتقاطع مع حامل القوة الأولى في نقطة. وهكذا نحصل على متوازي الأضلاع المنشأ من مركبتي القوة التي تمثل قطر متوازي الأضلاع ويمثل ضلعا متوازي الأضلاع فيه مركبتي القوة المراد تحليلها.

رياضياً يتم الحل اعتماداً على علاقة لامي $\frac{\mathrm{R}}{\sin\gamma} = \frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{\mathrm{F_2}}{\sin\beta}$

و كذلك من العلاقة المثلثية: $R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1.F_2.\cos\gamma$

أو العلاقة: $R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1.F_2.\cos\theta$

كما يمكن إيجاد مركبتي القوة رياضياً من خلال الإسقاط مع المحاور الإحداثية.(x,y)

٦-٤-٢-إحدى المركبتين معلوم اتجاهها وقيمتها:

تخطيطياً يتم الحل كما يلي: (حسب طريقة مثلث القوى) من نهاية المركبة المعلومة نرسم خطاً يصل إلى نهاية القوة المراد تحليلها فنحصل على قيمة تمثل المركبة الثانية للقوة.

رياضياً يتم الحل كما يلي:

إذا كانت القوة المراد تحليلها هي $\vec{R}$ ومركبتها المعلومة هي $\overrightarrow{F_1}$ نستخدم العلاقة التالية:

$$F_2^2 = R^2 + F_1^2 - 2R.F_1.\cos\left(\widetilde{R,F_1}\right)$$

كما يمكن استخدام الإسقاط على المحاور الإحداثية (*x,y*) كما يلي :

$F_2x = Rx - F_1$ $\qquad$ $F_2\mathrm{y} = \mathrm{Ry} - \mathrm{F_1y}$

$\cos\alpha = \frac{\mathrm{F_2x}}{\mathrm{F_2}}$, $\cos\beta = \frac{\mathrm{F_2y}}{\mathrm{F_2}}$ $\qquad$ $F_2 = \sqrt{\mathrm{F_x^2} + \mathrm{F_y^2}}$

٦-٥-تحليل قوة فراغية إلى مركباتها:

لا يمكن تحليل قوة فراغية إلا إلى ثلاث مركبات فراغية فقط. الحل التخطيطي في هذه الحالة صعب لذا يفضل اللجوء إلى الحل الرياضي اعتماداً على الإسقاط على المحاور الإحداثية (*x,y,z*) و يتم استخدام نفس الأسلوب السابق في الحل الرياضي الذي يعتمد في الإسقاط على المحاور الإحداثية .

في هذه الحالة عند عدم توفر أية معلومات عن مركبات القوة الفراغية المراد تفريقها يتم تفريقها إلى مركباتها (مساقطها) على المحاور الإحداثية أي :

$$\vec{R} = R_x.\vec{\imath} + R_y.\vec{j} + R_z.\vec{k}$$

المحاضرة الثامنة

جملة القوى المتوازية

مقدمة:

يمكن اعتبار جملة القوى المتوازية بأنها متلاقية في نقطة اللانهاية، وبالتالي هي حالة خاصة من جملة القوى المتلاقية، ويمكن أن تكون مستوية أو فراغية.

٧-١- محصلة قوتين متوازيتين مختلفتين بالقيمة واقعتين في مستوي واحد:

قد يكون للقوتين اتجاه واحد أو قد يكون لهما اتجاهان متعاكسان

٧-١-١-القوتان لهما نفس الاتجاه:

الحل التخطيطي : يتم إيجاد الحل تخطيطيا حسب قانون ضم الفعل بإضافة القوتين المتساويتين والمتعاكستين $\overrightarrow{F_3}$, $-\overrightarrow{F_3}$ إلى القوتين $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ في نقطتي تأثيرهما A , B ثم نوجد محصلة القوتين $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_3}$ و $-\overrightarrow{F_3}$,$\overrightarrow{F_2}$حسب قاعدة متوازي الأضلاع فنحصل على القوتين $\vec{R}_{2-3}$ و $\vec{R}_{1-3}$ والتين تلتقيان في النقطة (O) وهما تكافئان تماما جملة القوتين المتوازيتين $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ ومحصلتهما $\vec{R}$ هي نفسها محصلة القوتين المتوازيتين ، والتي تشكل قطر متوازي الأضلاع المنشأ على القوتين $\vec{R}_{1-3},\vec{R}_{2-3}$ ، وهي معينة (قيمة ومنحى وجهة) أما نقطة تأثيرها C فهي واقعة على القطعة المستقيمة AB وهي تمثل تقاطع حامل المحصلة $\vec{R}$ مع القطعة المستقيمة AB ، ويكون حامل المحصلة $\vec{R}$ موازيا لحاملي القوتين المتوازيتين $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ وهو أقرب إلى القوة الأكبر قيمة ، أما قيمتها فتعطى بالعلاقة التالية :

$$R = F_1 + F_2 \qquad (66)$$

كما يمكن تحديد نقطة تأثير المحصلة بطريقة تخطيطية أسرع، وذلك برسم القوة $\overrightarrow{F_1}$ على امتداد حامل القوة $\overrightarrow{F_2}$ بحيث نهاية متجهها هي النقطة B ، ونرسم القوة $\overrightarrow{F_2}$ على حامل القوة $\overrightarrow{F_1}$ بحيث بداية متجهها هي النقطة A أو بالعكس (كما في الشكل) ، ثم نصل بين بداية القوة الأولى ونهاية القوة الثانية فيتقاطع المستقيمان L و AB في النقطة C التي تمثل نقطة تأثير محصلة القوتين التي حاملها يوازي حاملا القوتين واتجاهها بنفس اتجاه القوتين وقيمتها تعطى وفق العلاقة السابقة (66) .

الحل التحليلي (الرياضي): يمكن إيجاد الحل تحليليا من خلال العلاقة (66) التي تعطي قيمة محصلة القوتين و أما حامل المحصلة فيوازي حاملي القوتين واتجاهها بنفس اتجاه القوتين و أما نقطة تأثيرها C فيمكن تحديدها بتطبيق نظرية فارينيون حول العزوم " عزم المحصلة يساوي المجموع الجبري لعزوم مركباتها "

نعتبر النقطة C هي مركز العزوم ، وبالتالي فإن عزم المحصلة يساوي الصفر ،

أي أن المجموع الجبري لعزوم القوتين $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ يساوي الصفر أيضا وبالتالي :

$$F_1.ac - F_2.cb = 0 \rightarrow F_1.ac = F_2.cb \rightarrow \frac{ac}{cb} = \frac{F_2}{F_1}$$

وحسب نظرية تالس فإن:

$$\frac{\mathrm{ac}}{\mathrm{cb}} = \frac{AC}{CB} \rightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{F_2}{F_1}$$

$$\frac{AC+CB}{CB} = \frac{F_1+F_2}{F_1} \rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{R}{F_1} \rightarrow \qquad \left\{\frac{AB}{R} = \frac{CB}{F_1}\right\} \qquad (67)$$

$$\frac{AC}{AC+CB} = \frac{F_2}{F_1+F_2} \rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{F_2}{R} \rightarrow \qquad \left\{\frac{AB}{R} = \frac{AC}{F_2}\right\} \qquad (68)$$

من العلاقتين السابقتين يتم الحصول على العلاقة التالية:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{F_2}} = \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{F_1}} \qquad (69)$$

من هذه العلاقة يمكن تحديد نقطة تأثير المحصلة على المستقيم AB وهي النقطة C الواقعة بين النقطتين A و B وهي أقرب إلى القوة الأكبر قيمة.

٧-١-٢-القوتان متعاكستان بالاتجاه:

الحل التخطيطي : لإيجاد محصلة القوتين المتعاكستين $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ حيث $(F_2 > \mathrm{F_1})$ نتبع قاعدة ضم الفعل ، كما فعلنا سابقا ، حيث نضيف القوتين المتساويتين والمتعاكستين $\overrightarrow{F_3}, -\overrightarrow{\mathrm{F_3}}$ إلى القوتين $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ في نقطتي تأثيرهما A , B ثم نوجد محصلة القوتين $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_3}$ و $-\overrightarrow{F_3}$, $\overrightarrow{F_2}$حسب قاعدة متوازي الأضلاع فنحصل على القوتين $\vec{R}_{1-3}$ و $\vec{\mathrm{R}}_{2-3}$ ، والتين تلتقيان في النقطة (O) وهما تكافئان تماما جملة القوتين المتوازيتين $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ ومحصلتهما $\vec{R}$ هي نفسها محصلة القوتين المتوازيتين ، والتي تشكل قطر متوازي الأضلاع المنشأ على القوتين $\vec{\mathrm{R}}_{1-3}, \vec{R}_{2-3}$ ، وهي معينة (قيمة ومنحى وجهة) أما نقطة تأثيرها C فهي واقعة خارج القطعة المستقيمة AB وهي تمثل تقاطع حامل المحصلة $\vec{R}$ مع امتداد القطعة المستقيمة AB ، ويكون حامل المحصلة $\vec{R}$ موازيا لحاملي القوتين المتوازيتين $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ وهو أقرب إلى القوة الأكبر قيمة ،واتجاه المحصلة من اتجاه تلك القوة ، أما قيمتها فتساوي المجموع الجبري للقوتين حسب العلاقة التالية :

$$R = F_2 - F_1 \qquad (70)$$

كما يمكن تحديد نقطة تأثير المحصلة بطريقة تخطيطية أسرع، وذلك برسم القوة $\overrightarrow{F_1}$ على امتداد حامل القوة $\overrightarrow{F_2}$ بحيث بداية متجهها هي النقطة B ، ونرسم القوة $\overrightarrow{F_2}$ على حامل القوة $\overrightarrow{F_1}$ بحيث نهاية متجهها هي النقطة A أو بالعكس (كما في الشكل) ، ثم نصل بين بداية القوة $\overrightarrow{F_2}$ونهاية القوة $\overrightarrow{F_1}$ فيتقاطع المستقيمان L و AB في النقطة C التي تمثل نقطة تأثير محصلة القوتين التي حاملها يوازي حاملا القوتين واتجاهها بنفس اتجاه القوة الأكبر وقيمتها تعطى وفق العلاقة السابقة *(70)* .

الحل التحليلي (الرياضي): يمكن إيجاد الحل تحليليا من خلال العلاقة *(70)* التي تعطي قيمة محصلة القوتين و أما حامل المحصلة فيوازي حاملي القوتين واتجاهها بنفس اتجاه القوة الأكبر و أما نقطة تأثيرها C فيمكن تحديدها بتطبيق نظرية فارينيون حول العزوم " عزم المحصلة يساوي المجموع الجبري لعزوم مركباتها " نعتبر النقطة C هي مركز العزوم ، وبالتالي فإن عزم المحصلة يساوي الصفر ،

أي أن المجموع الجبري لعزوم القوتين $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ يساوي الصفر أيضا وبالتالي :

$$F_2.bc - F_1.ac = 0 \rightarrow F_1.ac = F_2.bc \rightarrow \frac{ac}{bc} = \frac{F_2}{F_1}$$

وحسب نظرية تالس فإن:

$$\frac{\mathrm{ac}}{\mathrm{bc}} = \frac{AC}{BC} \rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1} \rightarrow \frac{AC-BC}{BC} = \frac{F_2-F_1}{F_1} \rightarrow \qquad \left\{\frac{AB}{R} = \frac{CB}{F_1}\right\} \qquad (67)$$

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \frac{F_2}{F_1} \rightarrow \frac{AC}{AC-BC} = \frac{F_2}{F_2-F_1} \rightarrow \qquad \left\{\frac{AB}{R} = \frac{AC}{F_2}\right\} \qquad (68)$$

من العلاقتين السابقتين يتم الحصول على العلاقة السابقة *(69)* . من هذه العلاقة يمكن تحديد نقطة تأثير المحصلة على امتداد المستقيم *AB* وهي النقطة *C* الواقعة خارج *A* و *B* وهي أقرب إلى القوة الأكبر قيمة

٧-١-٣-القوتان متساويتان بالقيمة ومتعاكستان بالاتجاه وغير واقعتان على حامل واحد (المزدوجة):

في هذه الحالة تكون محصلة القوتين معدومة، ولكن تأثيرهما على الجسم غير معدوم، حيث تعمل القوتان معا على تدوير الجسم بتأثير عزمهما. تسمى هذه الجملة بالمزدوجة البسيطة " المزدوجة هي جملة غير متوازنة مكونة من قوتين متوازيتين متساويتين بالقيمة ومتعاكستين بالاتجاه وغير واقعتين على حامل واحد "، ويسمى المستوي الذي يشكله حوامل القوتين بمستوي تأثير المزدوجة، أما المسافة العمودية بين القوتين *(L)* فتسمى ذراع المزدوجة ، وتحسب قيمة عزم المزدوجة بضرب قيمة القوة بذراعها

$$M = F.L \qquad (71)$$

ويعتبر العزم موجبا إذا كان يحاول تدوير الجسم بعكس عقارب الساعة وسالبا في حالة الدوران مع عقارب الساعة.

نظرية فارينيون لجملة القوى المتوازية:

"عزم محصلة جملة قوى متوازية بالنسبة إلى نقطة ما في الفراغ يساوي مجموع عزوم القوى بالنسبة إلى النقطة ذاتها"

٧-٢- تحليل (تفريق) قوة إلى مركبتين موازيتين لها:

٧-٢-١-حاملا المركبتين معلومين:

ونميز هنا حالتين:

أ- **المركبتان لهما نفس الجهة:**

الحل التخطيطي هو حل تجريبي يعتمد على تدوير المستقيم *(L)* حول نقطة تأثير القوة $\vec{R}$ (النقطة C) حتى تتحقق العلاقة

$$R = F_1 + F_2 \qquad (66)$$

أما الحل التحليلي فيعتمد تطبيق العلاقة

$$\frac{AB}{R} = \frac{AC}{F_2} = \frac{CB}{F_1} \qquad (69)$$

ب- **المركبتان لهما جهتان متعاكستان:**

الحل التخطيطي هو حل تجريبي يعتمد على تدوير المستقيم *(L)* حول نقطة تأثير القوة $\vec{R}$ (النقطة C) حتى تتحقق العلاقة

$$R = F_2 - F_1 \qquad (70)$$

أما الحل التحليلي فيعتمد تطبيق العلاقة

$$\frac{AB}{R} = \frac{AC}{F_2} = \frac{CB}{F_1} \qquad (69)$$

٧-٢-٢-إحدى المركبتين معينة قيمتا واتجاها وحاملا:

أ- **المركبتان لهما نفس الجهة:**

الحل التخطيطي يعتمد على العلاقة *(66)* والتي من خلالها يمكن حساب قيمة المركبة الثانية. أما حاملها يمكن الحصول عليه من خلال الرسم.

أما الحل التحليلي فيعتمد تطبيق العلاقة

$$\frac{AB}{R} = \frac{AC}{F_2} = \frac{CB}{F_1} \qquad (69)$$

ب- **المركبتان لهما جهتان متعاكستان:**

الحل التخطيطي يعتمد على العلاقة *(70)* والتي من خلالها يمكن حساب قيمة المركبة الثانية. أما حاملها يمكن الحصول عليه من خلال الرسم.

أما الحل التحليلي فيعتمد تطبيق العلاقة

$$\frac{AB}{R} = \frac{AC}{F_2} = \frac{CB}{F_1} \qquad (69)$$

٨- تحليل (تفريق) قوة إلى قوة ومزدوجة:

تعرف هذه الحالة أيضا باسم النقل الموازي للقوة.

تؤثر القوة $\vec{F}$ على الجسم في النقطة A وحسب قانون ضم الفعل يمكن إضافة القوتين المتساويتين والمتعاكستين $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ في النقطة B وبفرض أن قيمة كل منها تساوي قيمة القوة $\vec{F}$ وحاملهما يوازي حاملها . يلاحظ هنا أن القوتين $\vec{F}$ و $\overrightarrow{F_2}$ تشكلان معا مزدوجة عزمها يساوي $M = F.L$ ، وبالتالي تم تفريق القوة $\vec{F}$ إلى القوة $\overrightarrow{F_1} = \vec{F}$ والمزدوجة M . إذا يمكن نقل حامل القوة بشكل موازي لنفسه شرط أن يؤخذ بعين الاعتبار وجود العزم $M = F.L$ حيث L يسمى ذراع النقل (المسافة العمودية بين حامل القوة والنقطة التي نقلت إليها) ويتم تحديد اتجاه العزم حسب ما اصطلح عليه.

جملة القوى المتوازية الموزعة في مستوي واحد

مقدمة:

في الحالات السابقة اعتبرنا أن جملة القوى المؤثرة على الجسم هي قوى مركزة على خط عملها وفي نقطة تأثيرها، وهذا سهل العمليات الحسابية على القوى، ولكن هذه الحالة عمليا غير موجودة فأغلب القوى المؤثرة على الجسم هي قوى موزعة، حتى لو كان على سطح تماس متناهي في الصغر. في حال كانت القوى المطبق على الجسم موزعة فلا يمكن إهمال أبعاد الجسم عند إيجاد محصلة هذه القوى ونقطة تأثيرها، ولا بد من إدخال مفهوم التكامل هنا لإيجاد تلك المحصلة ونقطة تأثيرها.

تختلف واحدة القوى الموزعة حسب نمط توزعها ونميز منها:

- عندما تكون القوة موزعة على محور (خط) فإن وحدتها هي: N / m
- عندما تكون القوة موزعة على سطح فإن وحدتها هي: N / m^2 (قوة الضغط، وزن البلاطة على السطح)
- عندما تكون القوة موزعة على حجم فإن وحدتها هي: N / m^3 (قوى الجاذبية التي تؤثر على كل الجسم)

٨-١-القوى الموزعة على محور (خط مستقيم):

من مخطط القوى الموزعة وكيفية تغير القوة $\vec{F}$ على طول المحور x المحمول على القطعة المستقيمة ab ، يمكن إيجاد محصلة هذه القوى الموزعة ونقطة تأثيرها كما يلي :

٨-١-١- إيجاد قيمة محصلة القوى الموزعة:

إن معادلة منحي توزع القوى الموزعة على المحور x هي من الشكل: F = f(x) حيث f(x) تمثل القوة في واحدة الطول ، نأخذ من طول المحور x العنصر التفاضلي dx تحسب محصلة القوى المؤثرة على المسافة dx بالعلاقة التالية :

$$dR = f(x).dx \qquad (72)$$

بما أن f(x) تمثل طول المستطيل العنصري و dx عرضه فإن العلاقة (72) تأخذ الشكل التالي

$$dR = f(x).dx = dA \qquad (73)$$

وبما أن dA تمثل مساحة المستطيل العنصري، فإن قيمة محصلة القوى الموزعة على طول القطعة المستقيمة ab يعبر عنها بتكامل العلاقة (73) أي أن :

$$R = \sum F = \int_a^b f(x).dx = \int dA = A \qquad (74)$$

أي أن قيمة محصلة القوى الموزعة على طول القطعة المستقيمة ab تمثل المساحة المحصورة بين مخطط توزع القوى F = f(x) والمحور x وحامله واتجاها معلومان لأنها توازي جملة القوى المتوازية والموزعة .

٨-١-٢- تعيين نقطة تأثير قوة المحصلة:

يمكن تعيين نقطة تأثير قوة المحصلة $\vec{R}$ من خلال بعدها عن النقطة a مثلا ، وذلك باستخدام نظرية فارينيون حول العزوم " عزم محصلة القوى حول نقطة ما يساوي المجموع الجبري لعزوم مركباتها حول ذات النقطة " $M_{R_a} = \sum M_{F_a}$

عزم القوة العنصرية dR حول النقطة a يساوي $x.dR = x.f(x).dx$ ، وبالتالي فإن المجموع الجبري لعزوم المركبات حول النقطة a يساوي :

$$\sum_a^b dM_a = \int_a^b f(x).x.dx \qquad (75)$$

إذا كان ذراع المحصلة بالنسبة للنقطة a هو $\bar{x}$ فإن عزمها حول النقطة a هو :

$$M_{R_a} = \bar{x}.R \qquad (76)$$

وبالتالي فإن بقطة تأثير المحصلة $\vec{R}$ تبعد عن النقطة a مسافة قدرها $\bar{x}$ المحددة بالعلاقة التالية :

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b f(x).x.dx}{R} = \frac{\int_a^b f(x).x.dx}{\int_a^b f(x).dx} \qquad (77)$$

من العلاقة السابقة نجد أن حامل قوة المحصلة يمر من مركز ثقل (المركز الهندسي) للمساحة المحصورة بين مخطط توزع القوى F = f(x) والمحور x (المساحة الواقعة أسفل مخطط توزع القوى) .

٨-٢-حالات خاصة:

أ- **F = f(x) = const :**

أي أن منحني القوى الموزعة ثابت ولا علاقة له ب x ، ومخطط توزع القوى يأخذ شكل مستطيل عرضه F وطوله L وبتطبيق العلاقة (74) نجد أن :

$$R = \int_a^b F.dx = F.\int_a^b dx = F.L \qquad (78)$$

أي أن محصلة القوى تساوي مساحة المستطيل المحصور بين مخطط توزع القوى والقطعة المستقيمة ab .أما بعد محصلة القوى عن النقطة a مثلا فتعطى بالعلاقة التالية :

$$\bar{x} = \frac{F.\int_a^b x.dx}{F.\int_a^b dx} = \frac{\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^L}{|x|_0^L} = \frac{\frac{L^2}{2}}{L} = \frac{L}{2} \qquad (79)$$

وهذا منطقي لأن مركز المستطيل يقع في وسطه تماما.

ب- $F = \frac{F_l}{L}.x$:

أي أن مخطط التحميل يمثل معادلة مثلث، نعوض معادلة مخطط التحميل بالعلاقة (74) :

$$R = \int_a^b F.dx = \int_a^b \frac{F_l}{L}.x.dx$$

ولكن F_L, L قيم ثابتة وبالتالي :

$$R = \frac{F_l}{L}\int_a^b x.dx = \frac{F_l}{L}\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^L = \frac{F_l}{L}.\frac{L^2}{2}$$

وبالتالي فإن قيمة المحصلة تعطى بالعلاقة:

$$R = \frac{F_l.L}{2} \qquad (80)$$

وهي تمثل مساحة المثلث الذي قاعدته هي Lوارتفاعه F. ولإيجاد بعد المحصلة عن النقطة aتستخدم العلاقة (77)

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b \frac{F_l}{L}.x.x.dx}{\int_a^b \frac{F_l}{L}.x.dx} = \frac{\frac{F_l}{L}.\int_a^b x^2.dx}{\frac{F_l}{L}.\int_a^b x.dx} = \frac{\int_a^b x^2.dx}{\int_a^b x.dx} = \frac{\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^L}{\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^L} = \frac{\frac{L^3}{3}}{\frac{L^2}{2}}$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3}L \qquad (81)$$

أي أن المحصلة تبعد عن رأس المثلث (النقطة a) بمقدار $\frac{2}{3}$ من طول مستقيم التحميل (القاعدة L) أي أن حامل القوة المحصلة يمر من مركز ثقل المثلث .

ملاحظة:

- إذا كان منحن التوزيع غير مستمر، يتم في البداية إيجاد محصلة كل قسم على حدا ثم بعد ذلك يتم إيجاد المحصلة النهائية لتلك المحصلتين حسب قواعد إيجاد محصلة قوتين متوازيتين.
- إذا كان منحني التوزيع بإشارتين مختلفتين، يتم إيجاد محصلة كل قسم على حدا، حتى لو كان المنحني مستمرا ثم بعد ذلك يتم إيجاد المحصلة النهائية لتلك المحصلتين حسب قواعد إيجاد محصلة قوتين متوازيتين.