الفصل الثاني
نظرية الأخطاء

1.2 مقدمة:

عند القيام بالقياسات المساحية كالقياسات الزاوية والقياسات الطولية للأبعاد الأفقية والشاقولية (الارتفاعات)، فإن هذه القياسات تتم بدقة معينة وبظروف وشروط محيطة محددة.

إن أي عملية قياس من هذه القياسات تحتوي على قدر معين من الأخطاء ومن النادر أو من المستحيل الحصول على قيم حقيقية للقياس، حيث لو قمنا بتكرار قياس ما بالدقة نفسها وبالظروف والشروط المحيطة نفسها لا نحصل على النتيجة نفسها، وسنحصل على نتائج متشابهة تختلف عن بعضها بمقادير صغيرة تسمى الأخطاء.

وبالآتي عند إجراء القياسات المساحية يجب أن يكون لدى المهندس معرفة جيدة لأنواع الأخطاء الممكن حدوثها أثناء عملية القياس وأسباب حدوثها، ومعرفة طرق القياس التي تؤدي إلى تخفيف أو حذف هذه الأخطاء.

إن كلمة خطأ وكلمة غلط لهما المعنى اللغوي نفسه ولكن جرت العادة في مجال قياساتنا المساحية أن نفرق بين مفهوم الخطأ ومفهوم الغلط، حيث يمكن تعريف الخطأ في أي عملية قياس بأنه فرق صغير بين القيمة المقاسة لأي مقدار والقيمة الحقيقية، ويمكن أن يكون هذا الفرق سالباً أو موجباً، وينتج عن عدم الضبط الكامل لأجهزة القياس وحواس الأنسان وتغير الشروط الجوية المحيطة.

أما الغلط فيعني الخطأ الكبير الواضح الناتج عن عدم الانتباه أو استعراض القياسات وتكون الأغلاط كبيرة ويمكن اكتشافها بسهولة بإعادة القياس أو الحساب وبالآتي يمكن حذفها.

مثلا إذا قيست مسافة بواسطة شريط طوله 20 مترا وكانت القياسات المتكررة لهذه المسافة هي 212,13 و212,17 و212,10 و232,15 و212,17 و212,19. فالقياس الرابع يختلف عن بقية القياسات بفرق كبير واضح هو 20 مترا مما يدل انه حدث غلط في عدد المرات التي استخدم فيها جهاز القياس وهو الشريط الذي طوله 20 مترا وذلك بزيادة قياس واحد أو استعمال الشريط مرة واحدة زيادة عما هو صحيح، هذا النوع من الخطأ يسمى غلط يمكن حذفه مباشرة من نتيجة القياس، أما بقية الفروق في القياسات فتسمى أخطاء ينطبق عليها عنوان الفصل وهي مجال البحث الآتي.

2.2 أنواع الأخطاء:

بصورة رئيسة تقسم الأخطاء إلى نوعين وذلك من حيث إمكانية تحديدها ومعرفتها قيمةً وكميةً واتجاهاً أو عدم إمكانية تحديدها، وتقسم إلى أخطاء نظامية وأخطاء عرضية.

1.2.2 الأخطاء النظامية:

هي الأخطاء أو الفروق ذات طابع نظامي حيث أنها تتبع قوانين رياضية وفيزيائية محددة وبالتالي تكون ذات سبب معروف نستطيع حذف تأثيره على القياسات سواء بطرق الحساب أو بطرق القياس وعادة تكون الأخطاء النظامية ثابتة كلما أعيدت القياسات بنفس الشروط أو تختلف اختلافاً بسيطاً أو قد تكون دورية، وهي دائماً باتجاه واحد فإما أن تكون سالبة أو إما أن تكون موجبة، ويمكن وضع أسباب الأخطاء النظامية ضمن ما يأتي:

أ – **أسباب أو عوامل طبيعية:** وهي عبارة عن تأثير العوامل الطبيعية كالحرارة أو انكسار الضوء أو غيرها بحيث تساعد على حساب وتحديد تأثيرها. مثلاً في قياس المسافة بواسطة شريط معدني فان طول الشريط يتمدد بالحرارة لذا يمكن تحديد طوله الحقيقي في درجة معينة من الحرارة وبالآتي حساب الخطأ النظامي المحدد والمعروف الإشارة في قياس مسافة ما.

ب – **أسباب تابعة لجهاز القياس نفسه:** وهو خطأ في الجهاز يمكن تحديده بمقارنته بجهاز أكثر دقة كأن تقاس مسافة بجهاز (شريط سجل عليه طول ما 20 م أو 50 م أو غيره ولدى مقارنته بشريط أكثر دقة أو بأي وسيلة أخرى إذا ما تبين انه يختلف بمقدار ما وليكن مثلا 2 سنتمتر ففي هذه الحالة يجرى القياس مع سابق علم بوجود خطأ نظامي محدد المقدار والإشارة.

جـ –**أسباب شخصية:** وهذه حالة معروفة أنه لدى بعـض الأشخاص أخطاء محددة الاتجاه والكمية يمكن تحديدها.

هذه الأخطاء الثلاث هي أخطاء نظامية يتم حسابها وتعيين مقدارها وإشارتها وحذفها من نتائج القياس أيضاً.

2.2.2 الأخطاء العرضية:

هي الفروق غير المعروفة المقدار ولا الإشارة ولا الأسباب المباشرة وقد يعزى سببها إلى أسباب خارجية أو شخصية أو للجهاز المستعمل القياس، تنطبق عليها قوانين علم الاحتمالات، وهذه الأخطاء تخضع للبحث والتحليل للوصول إلى الهدف النهائي وهو الحصول على أفضل قياس مقبول خاصة، حيث أن هذه الأخطاء لا يمكن حذف قيمتها غير المعروفة من نتائج القياس، إلا أنها تساعد في تعيين الدقة التي يتم بها القياس.

1.2.2.2 خواص الأخطاء العرضية:

عند تكرار قياس ما مقاسة عدد كبير من المرات، وبعد حذف الأخطاء النظامية والأغلاط من نتائج القياس ستبقى الفروق أو الأخطاء العرضية التي لها الصفات الآتية:

1 – إن الأخطاء العرضية تكون محصورة ضمن مجال يسمى القيمة العظمى للأخطاء العرضية ε ولا تتعداه.

2 – عدد الأخطاء العرضية الموجبة يساوي تقريباً عدد الأخطاء العرضية السالبة، أي انه إذا أخذت قيمة ما من القياسات المتكررة وعُدت القيمة الأكثر احتمالاً أنها القيمة الحقيقية، فإن الأخطاء العرضية أو الفروق بين هذه القيمة وبقية القيم تكون تارة موجبة وتارة أخرى سالبة وعدد الفروق الموجبة يساوي تقريباً عدد الفروق السالبة وكل فرق وليكن $+v$ يقابله فرق مقداره $-v$.

3 – إن الأخطاء العرضية صغيرة القيمة عموماً إلا أن عدد الأخطاء الصغيرة ضمن مجال الخطأ الذي قيمته العظمى ε يكون أكبر من عدد الأخطاء الكبيرة ضمن هذا المجال أي إذا وضعت الأخطاء العرضية في مجالات تبعا لقيمتها فإنه يلاحظ أن عدد الأخطاء في مجال ما هي أكبر منها في المجال الآتي، مثلاً:

لتكن المسافة المقاسة D بتكرار القياس n مرة ولتكن القيمة العظمى للخطأ العرضي لا يتجاوز $10\ cm$ عن القيمة المختارة D_0، وإذا وضعت هذه الأخطاء ضمن مجالات بحيث أن الأخطاء التي لا تتعدى $1\ cm$ تمثل مجال أول، والتي قيمتها بين $1\text{–}2\ cm$ في المجال الثاني وهكذا فيلاحظ مثلا أن عدد الأخطاء في المجال $5\text{–}6\ cm$ أكبر منها في المجال الآتي $6\text{–}7\ cm$.

4 – إن الخاصة / 2 / أعلاه تقود إلى نتيجة هي إنه عند تكرار القياس مرات كثيرة جداً تصل إلى اللانهاية فإن مجموع الفروق مقسماً على عددها يكون قيمته تساوي الصفر أي:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v1 + v2 + v3 + \ldots + vn}{n} = 0 \qquad (1-2)$$

حيث أن v تمثل الفروق أو الأخطاء العرضية.

3.2 الأخطاء الظاهرية والأخطاء الحقيقية:

قبل الخوض في موضوع نظرية التربيعات الصغرى وغيرها لا بد من توضيح فكرة توزيع الأخطاء إلى أخطاء حقيقية وأخطاء ظاهرية:

فالأخطاء الظاهرية هي الفروق أو الأخطاء الناتجة عن الفرق بين القيمة التي نعدها أقرب القيم للقيمة الحقيقية وقيمة القياسات، ففي مجموعة من القياسات المكررة إذا عُدت القيمة x_0 هي القيمة الأكثر احتمالاً، فان الأخطاء أو الفروق بينها وبين أي قياس x_i من القياسات هو الخطأ الظاهري v_i وقيمته:

$$v_i = x_0 - x_i \qquad (2-2)$$

هذه القيمة أو الخطأ أو الفرق هو خطأ ظاهري لأننا لا نعرف القيمة الحقيقة للكمية المقاسة x لكنه في بعض الحالات التي نعرف مسبقاً القيمة الحقيقية للكمية المقاسة x فان الفرق بينها وبين أي قياس يمثل الخطأ الحقيقي. وهذا الخطأ نادر ما يحدث إذ غالباً ما تكون القيمة الحقيقية للكميات المقاسة مجهولة القيمة إلا أنه أحيانا تكون معلومة مثلاً إذا قيست الزوايا الثلاث لمثلث فإن مجموع الزوايا معروف مسبقاً يساوي 180 درجة أو 200 غراد فإذا تكرر قياس الزوايا الثلاث وفي كل مرة جمعنا الزوايا الثلاث فإن فرق القيمة الناتجة عن القيمة الحقيقية يمثل خطأً حقيقياً.

4.2 نظرية التربيعات الصغرى:

تدل قوانين الاحتمالات وأبحاث الرياضيات أن الأخطاء الحاصلة عند إعادة القياسات عدداً من المرات يصل إلى اللانهاية، هي الأخطاء الحقيقية، رغم عدم معرفة القيمة الحقيقية للكمية المقاسة، ولكن ليس من المعقول إعادة القياسات عدداً لا متناهياً من المرات، والمطلوب حاليا الحصول على الخطأ الأكثر احتمالا لقياس ما وذلك بتكراره عدداً محدوداً من المرات من دون أن تكون قيمته الحقيقية معروفة، أي إن الهدف هو الوصول إلى أكثر القيم احتمالاً أي الأكثر قرباً للقيمة الحقيقية.

إذا كان العنصر المقاس x وبتكرار قياسه n مرة أي أن تكون قيم القياسات هـي:

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4\ ,\ x_4 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$$

ما هي القيمة x_0 التي يمكن أن تكون أكثر القيم قرباً من القيمة الحقيقية x ؟

إن نظرية التربيعات الصغرى تجيب على هذا السؤال وهو أن القيمة الأكثر قرباً من القيمة الحقيقية هي تلك القيمة التي تجعل مربع الأخطاء الرسوبية v أقل ما يمكن حيث إن الأخطاء الرسوبية هي:

$$v_i = x_0 - x_i \qquad (2-2)$$

أي:

$$v_1 = x_0 - x_1$$

$$v_2 = x_0 - x_2$$

....

$$v_n = x_0 - x_n$$

والرمز i هنا يعني إحدى القياسات من 1 إلى n.

لكي تأخذ هذه الأخطاء الرسوبية أقل قيمة أي قيمتها الحدية، يجب أن تكون ذات اتجاه واحد سالبة أو موجبة، ولكي تكون كذلك يؤخذ مربع قيم هذه الأخطاء بحيث تكون دوماً موجبة ومن ثم تحقق أقل قيمة وهذا ما يعرف باسم التربيعات الصغرى أي:

$$\sum v_i^2 = [\, v\, v\,] = mini \qquad (3-2)$$

بتربيع المعادلات (2-2) المذكورة أعلاه نجد:

$$v_1^2 = x_0^2 + x_1^2 - 2\, x_0 x_1$$

$$v_2^2 = x_0^2 + x_2^2 - 2\, x_0 x_2$$

....

$$v_n^2 = x_0^2 + x_n^2 - 2\, x_0 x_n$$

وبجمعها يكون لدينا:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = n x_0^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2x_0 \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (4-2)$$

لكي تكون قيمة هذه المعادلة أقل ما يمكن، أي حدية، بالنسبة للمتحول x_0 يجب أن يكون مشتقها بالنسبة لهذا المتحول مساوياً الصفر أي:

$$\frac{\partial \sum v_i^2}{\partial\, x_0} = 0 = n x_0 - \sum_{1}^{n} x_i \qquad (5-2)$$

وبالآتي:

$$x_0 = \frac{\sum xi}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 \ldots\ldots\ldots + x_n}{n} \qquad (6-2)$$

هذه القيمة هي **المتوسط الحسابية**، وهي القيمة الأكثر احتمالاً للكمية المقاسة x.

كما يلاحظ أنه إذا جمعنا قيم الأخطاء في المعادلات (2-2) السابقة يكون:

$$\sum_{i=1}^{n} vi = n\, x_0 - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

وهذه القيمة هي صفر حسب المعادلة (2–6) المذكورة أعلاه. وهذا تحقيق لصحة القياسات وحساب المتوسطة الحسابية.

5.2 تقييم القياسات (دقة القياسات):

إن المقصود بتقييم القياسات هو تحديد احتمال حدوث الخطأ وتعيين القيمة المميزة للخطأ الأعظمي الذي لا مجال للشك بأن الخطأ لن يتجاوزه. أي تعيين الخطأ الأعظمي وهو الحد الفاصل بين الخطأ والغلط. هناك عدة قيم تسمى تجاوزاً بالأخطاء تقوم بإعطاء مؤشرات لتقييم القياسات هي:

1.5.2 الخطأ المتوسط التربيع

إن قانون الاحتمالات المذكورة سابقاً يقف عند حد لا يتجاوزه، ولكي يتم تعدي حدود اليقين تؤخذ فرضية جاوس التي افترض بها أن كافة الأخطاء الممكنة موجبة أي ذات اتجاه واحد، الأخطاء الرسوبية تؤخذ بمربع قيمها لتحقق أعظم خطأ ممكن أي:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^2 = w_1^2 + w_2^2 + \ldots\ldots + w_n^2 \qquad (7-2)$$

والتي نتيجتها قانون احتمال حدوث كافة الأخطاء هو:

$$V = \frac{h^n}{\sqrt{\pi}^n} e^{-h^2 \sum w^2} d\, w^n \qquad (8-2)$$

القيمة التي تجعل مشتق هذه المعادلة مساوياً للصفر أي:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = n - 2\, h^2 \sum w^2 = 0 \qquad (9-2)$$

أو :

$$h = \sqrt{\frac{n}{2 \sum w^2}} \qquad (10-2)$$

ومنه تكون قيمة الخطأ المتوسط التربيع لدى جاوس:

$$m^2 = \frac{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + \ldots\ w_n^2}{n}$$

أو

$$m = \sqrt{\frac{\sum wi^2}{n}}$$

حيث تمثل w_i قيم الفروق أو الأخطاء الحقيقية، أي الفرق بين القيمة الحقيقية والكمية المقاسة.

$$w_i = x - x_i \qquad (11-2)$$

غالبا ليس بالإمكان معرفة القيمة الحقيقة للعنصر المقاس إذن لا بد من استخدام القيمة الظاهرية أو القيمة الأكثر احتمالا أو القيمة المتوسط الحسابية x_0 حيث الخطأ الرسوبي الظاهري هو

$$v_i = x_0 - x_i$$

فيكون الخطأ الحقيقي هو:

$$w_i = v_i + (x - x_0) \qquad (12-2)$$

ويجمع هذه المعادلات يكون:

$$\sum w_i = \sum v_i + n\,(x - x_0)$$

وبما أن $nx_0 = \sum x_i$ و $x_0 = \frac{\sum xi}{n}$

وبما أن $\sum vi = 0$ يكون:

$$M = \frac{\sum w_i}{n} = x - x_0 \qquad (13-2)$$

بتربيع وجمع معادلات الأخطاء الحقيقية Wالسابقة يكون:

$$\sum w_i^2 = \sum v_i^2 + 2\sum vi\,(x - x_0) - n\,(x - x_0)^2$$

$$\frac{\sum w_i^2}{n} = \frac{\sum v_i^2}{n} + M^2 = \frac{\sum v_i^2}{n} + \frac{m^2}{n} = m^2$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{\sum vv}{n-1}} \qquad (14-2)$$

هذا الخطأ المتوسط التربيع للأخطاء الظاهرية

ملاحظة: ذكرت المعادلات (2–8) و (2–9) و (2–10) في هذه الفقرة من دون استنتاج لأنها تابعة لأبحاث نظريات الاحتمالات وهذا ليس موضوع البحث هنا لذا لا لزوم لحفظها ولذلك يمكن تفسير العلاقة بين الخطأ المتوسط التربيع المحسوب من الأخطاء الحقيقية والمحسوب من الأخطاء الظاهرية بالأسلوب الآتي، وهو التفسير المنطقي لاختلاف العلاقتين.

بفرض أن عدد القياسات للعنصر هو قياس واحد فقط، فتكون هذه القيمة هي المتوسطة الحسابية أي:

$$v_1 = x_0 - x_1 = 0$$

وبالآتي فالخطأ المتوسط التربيع:

$$m = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n}} = 0$$

أي أن الدقة في ذروتها وهذا غير منطقي لذا إذا طبقت علاقة الخطأ المتوسط التربيع المحسوب من الأخطاء الظاهرية يكون عدم تعيين:

$$m = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n}} = \frac{0}{0}$$

وهذا منطقي، بينما إذا علمت القيمة الحقيقية x فيكون الخطأ الحقيقي

$$w_1 = x - x_1$$

والخطأ المتوسط التربيع من الخطأ الحقيقي هو:

$$m = \sqrt{\frac{\sum w^2}{n}} = \sqrt{\frac{{w_1}^2}{1}} = w_1$$

وهذه قيمة ما تدل على دقة القياس.

2.5.2 الخطأ المطلق

يتم تقييم القياسات بالخطأ المطلق وهو القيمة المتوسطة الحسابية للأخطاء أو الفروق بقيمتها المطلق (بغض النظر عن إشارتها) أي:

$$t = \frac{|w_1|+|w_2|+|w_3|+\cdots+|w_n|}{n} = \left[\frac{|v_1|+|v_2|+|v_3|+\cdots+|v_n|}{n}\right]\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

وعمليا عندما يكون عدد القياسات n كبيراً نسبيا تؤخذ القيمة الظاهرية للأخطاء بدلاً من القيم الحقيقية أي:

$$t = \frac{|w_1| + |w_2| + |w_3| + \cdots + |w_n|}{n} = t$$

$$= \frac{\sum |v_i|}{n} \qquad (15-2)$$

3.5.2 الخطأ المحتمل

يتم تقييم القياسات بواسطة الخطأ المحتمل وهو أن توضع الأخطاء بقيمها المطلقة بتسلسل كبرها أي:

$$|v_1| < |v_2| < \dots\dots < |P| < \cdots |v_{n-1}| < |v_n|$$

ثم تؤخذ القيمة التي تحل في وسط المتراجحة السابقة بحيث يكون عدد الأخطاء إلى يمينها مساوياً لعدد الأخطاء الواقعة إلى يسارها كما يمكن حسابها من العلاقة الآتية:

$$\mu = \left(\frac{\Sigma\sqrt{|w_i|}}{n}\right)^2 = \left(\frac{\Sigma\sqrt{|v_i|}}{n}\right)^2 \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

مثال عددي: جرى قياس عنصر على مرحلتين وفي كل مرحلة تكرر القياس عشر مرات وكانت الفروق (الأخطاء) الظاهرية الآتية:

1) − 8, +10, −9, +3, +5, −5, +6, +2, −7, +3

2) +2, −1, −10, +0, +0, +18, −3, +9, −14, −1

بتطبيق علاقات تقييم القياسات الثلاث المذكورة أعلاه تكون النتائج الآتية

من المجموعة الأولى:

$$1)\ \sum v_i^2 = 402 \sum |vi| = 58$$

من المجموعة الثانية:

$$2)\ \sum v_i^2 = 716 \sum |vi| = 58$$

يلاحظ أن الأخطاء هي الآتية:

1) $m_1 = 6.7$	$t_1 = 5.8$	$p_1 = 5.5$
2) $m_2 = 8.9$	$t_2 = 5.8$	$p_2 = 2.5$

هذا يدل على أن أهمية الخطأ المتوسط التربيع الذي يظهر تشتت الخطأ لدى المجموعة الثانية أكبر منه لدى المجموعة الأولى، ولذا يُعد الخطأ المتوسط التربيع أفضل طريق لتقييم القياسات.