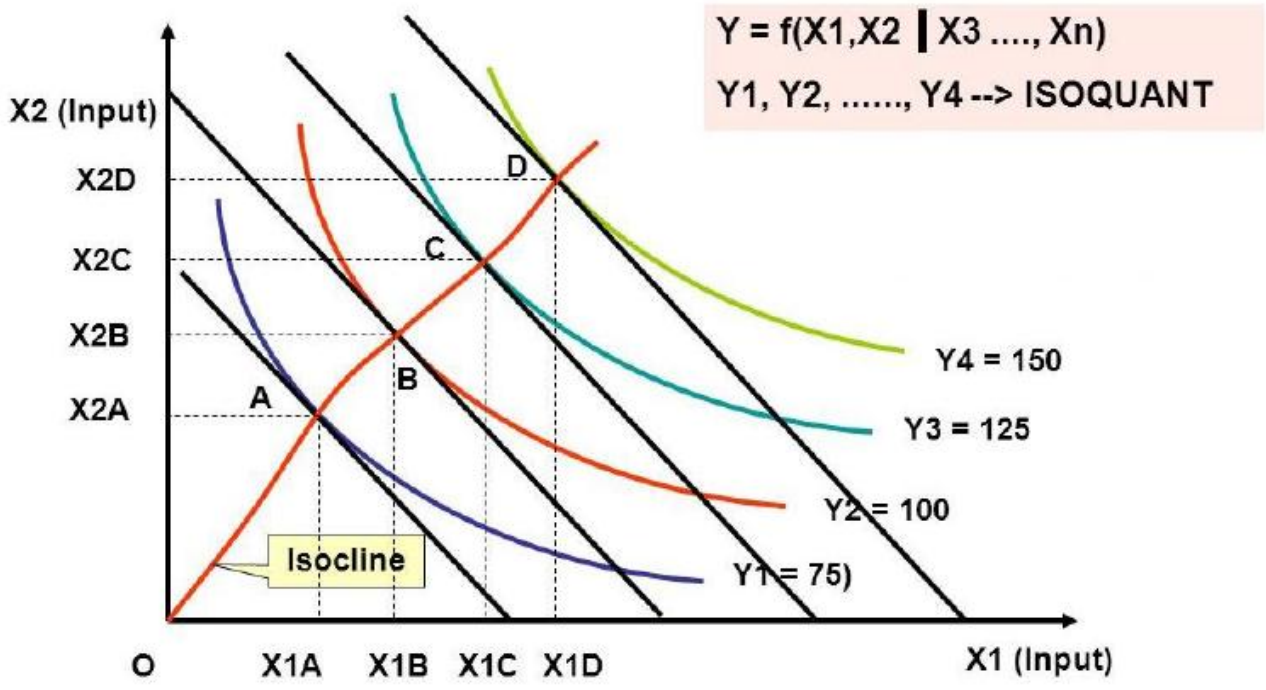
الطيات المحدبة ومجرى التوسع

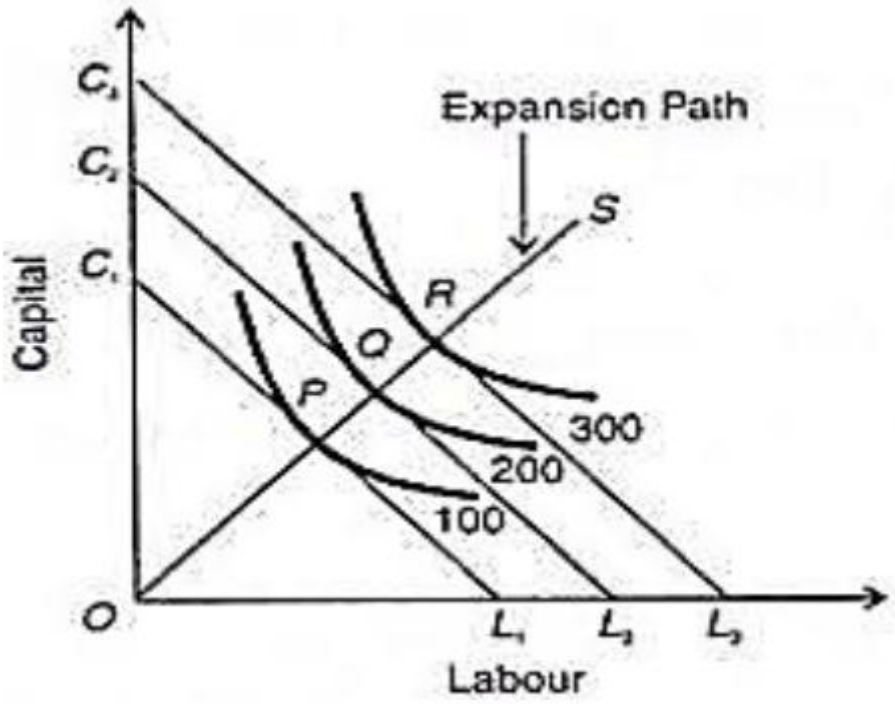
Isoclines & Expansion Path

الطيات المحدبة Isoclines: خطوط أو منحنيات تمر من نقاط تتساوى فيها المعدلات الحدية للاستبدال على خارطة منحنيات الإنتاج المتساوي أي أن الطية المحدبة تمر عبر كل منحنيات الإنتاج المتساوي في نقاط يكون فيها الميل متساوياً.



مجرى التوسع Expansion Path: هي طية محدبة خاصة تصل نقاط توافقات عوامل الإنتاج التي يتحقق عندها التكلفة الدنيا عند مستويات محددة من الإنتاج بين عاملي الإنتاج مع نسبة أسعارها على طول مجرى التوسع.

إذا كان مجرى التوسع خطاً مستقيماً يمر من المركز فهذا يعني أن عاملي الإنتاج يُستخدمان بنفس النسبة في جميع مستويات الإنتاج وإذا كان منحنياً فيعني ذلك أن نسب عوامل الإنتاج المستخدمة لتحقيق التكلفة الدنيا تتغير من مستوى إنتاج إلى آخر ولكل نسبة سعرية مختلفة يوجد مجرى توسع محدد.



مثال:

إذا كان لدينا دالة الإنتاج $Y= X_1^{1/2} X_2^{1/4}$ وبفرض استخدام كميات متغيرة من عاملي الإنتاج X_1, X_2 حيث:

$P_Y= 8, P_{X1}= 4, P_{X2}= 2$

المطلوب: حدد توافق عنصري الإنتاج الذي يعطي التكلفة الدنيا والربح الأعظمي.

الحل:

1- نوجد معادلة المعدل الحدي للاستبدال بين عاملي الإنتاج كما يلي:

$$MRTS= \frac{\frac{\partial Y}{\partial X2}}{\frac{\partial Y}{\partial X1}} = 1/4\ X_1^{1/2}\ X_2^{-3/4} / 1/2\ X_1^{-1/2}\ X_2^{1/4}$$

$$= X_1^{1/2}\ X_1^{1/2} / 2\ X_2^{1/4}\ X_2^{3/4}$$

$$= X_1 / 2X2$$

$$MRTS= X_1 / 2X2 \qquad (1)$$

2- معادلة مجرى التوسع:

$$MRTS= MPP2/ MPP1 = P_{X2}/ P_{X1}$$

باستبدال القيم:

$$X_1/ 2X2= 2/4 \longrightarrow 2X_1= 2X_2 \longrightarrow X_1= X_2 \quad (2)$$

تمثل العلاقة (2) معادلة مجرى التوسع وتحدد جميع التوافقات من عاملي الإنتاج التي ينتج عنها التكلفة الدنيا.

يمكن استبدال هذا القيد بالدالة الإنتاجية كما يلي:

$Y= X_1^{1/2} (X_1^{1/4})$

$Y= X_1^{3/4}$ (3)

لتحديد قيمة الإنتاج الذي يعطي الربح الأعظمي نكتب معادلة الربح (يساوي الإيراد الكلي مطروحاً منه التكاليف الكلية):

$\Pi= TR- TC$

$\Pi= P_Y.Y- (TVC+ TFC)$

$\Pi= = P_Y.Y- P_{X1}.X_1- P_{X2}.X_2- TFC$

$\Pi= 8Y- 4X_1- 2X_2- TFC$

نعوض المعادلة 2 في معادلة الربح:

$\Pi= 8Y- 4X_1- 2(X_1)- TFC$

$\Pi= 8Y- 6X_1- TFC$

ونستبدل قيمة Y من المعادلة (3) فينتج:

$\Pi= 8(X_1^{3/4})- 6X_1- TFC$

بالتالي أصبحت لدينا معادلة ربح بدلالة X_1 ولتعظيم هذه الدالة نشتقها بالنسبة ل X_1 ونساويها بالصفر:

$\frac{\partial \pi}{\partial X1} =0$

$6X_1^{-1/4}- 6=0$

$X_1^{-1/4}= 1$

$1/ X_1^{1/4} =1 \longrightarrow X_1^{1/4} =1 \longrightarrow X_1=1$

وبالتالي $X_2=1$ أي أن الإنتاج الأعظمي يتحقق عندما تستخدم كميات من عنصري الإنتاج تعادل 1

ولمعرفة الإنتاج الأعظمي نعوض في دالة الإنتاج:

$Y= Y= X_1^{1/2} X_2^{1/4}$

$Y= (1)^{1/2}\ (1)^{1/4}$

$Y= 1$

ويمكن اختبار تحقق شرط تعظيم الربح:

$VMP_1=P_{X1}$ $\qquad$ $VMP_2=P_{X2}$

$MPP_1=P_{X1}/P_Y$ $\qquad$ $MPP_2= P_{X2}/P_Y$

حيث باشتقاق دالة الإنتاج وتبديل قيم عناصر الإنتاج التي تحقق الربح الأعظمي نلاحظ أن:

$MPP_1= 1/2$ وهذا الرقم مساوي للنسبة السعرية P_{X1}/P_Y

$MPP_2= 1/4$ وهذا الرقم مساوي للنسبة السعرية P_{X2}/P_Y