الإنحدار غير الخطي البسيط
NONLINEAR SIMPLE REGRESSION

يستخدم الانحدار غير الخطي البسيط في قياس العلاقة بين متغيرين أحدهما تابع Y والآخر مستقل X. ويمكن اشتقاق العديد من الصيغ التي يمكن أن تأخذها العلاقة غير الخطية، وذلك بالاعتماد على ما يسمى محلولا بوكس–كوكس Box–Cox Transformations. من أهم هذه الصيغ:

❶ الصيغة اللوغاريتمية المزدوجة Double-Log Relationship:

تتمثل الصيغة الأصلية التي تشتق منها بالشكل التالي (كوب–دوغلاس):

$$Y = \alpha X^{\beta} e^{\mu}$$

حيث Y المتغير التابع، X المتغير المستقل، α المعلمة التقاطعية، βالمعلمة الانحدارية وهنا تمثل مرونة المتغير التابع بالنسبة للمتغير المستقل، e أساس اللوغاريتم الطبيعي وقيمته ثابتة 2.718 ، μ الحد العشوائي.

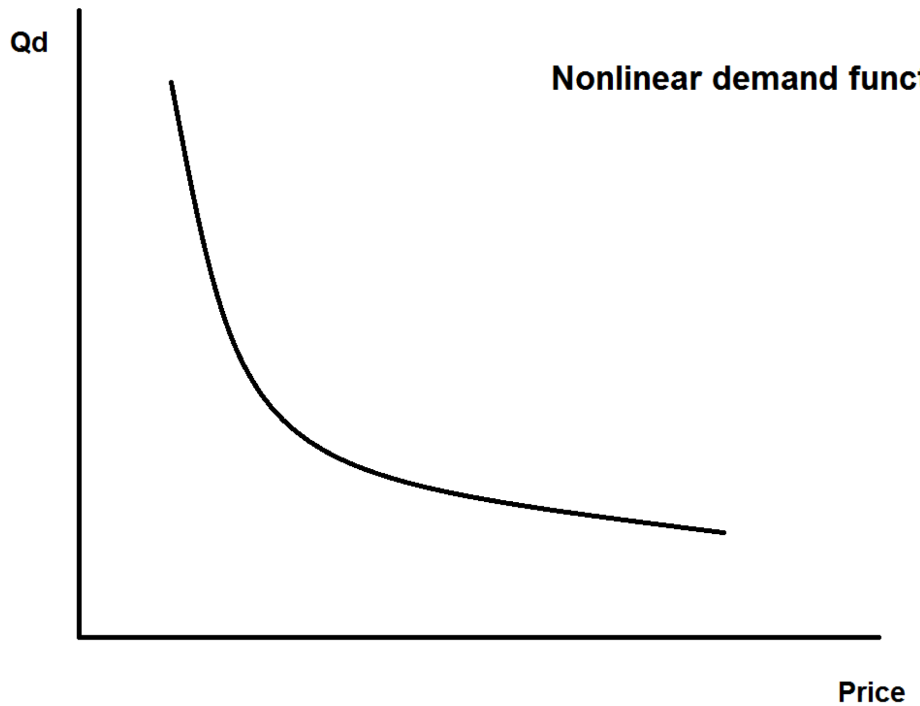
ويتم الحصول على الصيغة اللوغاريتمية المزدوجة بأخذ لوغاريتم الطرفين للعلاقة السابقة فتصبح:

$$\text{Ln } Y = \alpha_0 + \beta \text{ Ln } X + \mu$$

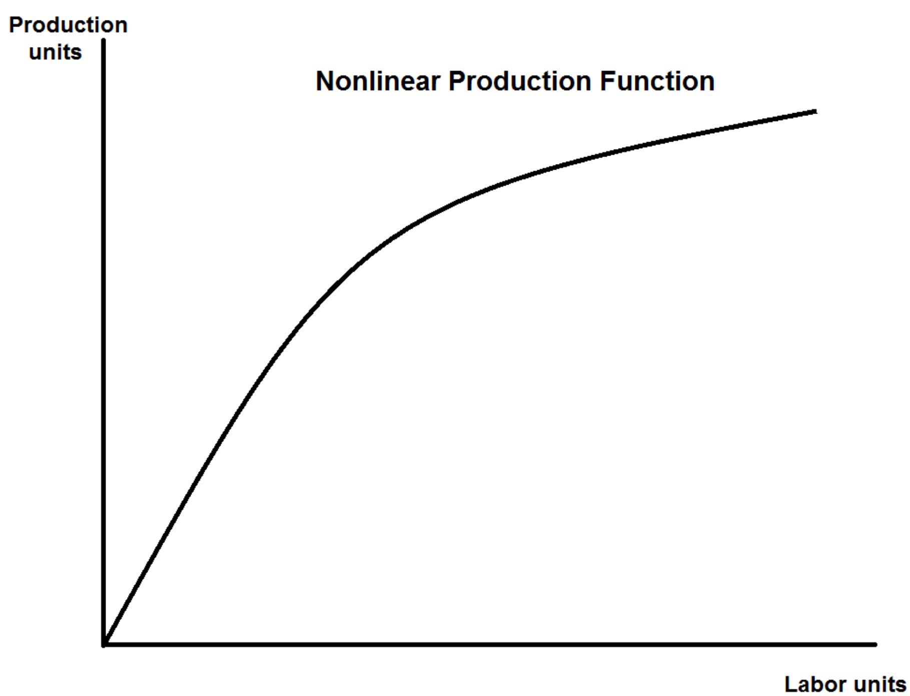
حيث: $\text{Ln } \alpha = \alpha_0$

وهنا يتغير الميل عند جميع مستويات Y و X إلا أن المرونة تبقى ثابتة وتساوي β

فإذا كانت العلاقة السابقة تمثل دالة الطلب بين الكمية المطلوبة والسعر. عندها من المتوقع أن تكون $\beta < 0$ وقيمتها في هذه الحالة تمثل مرونة الطلب السعرية. وتشير α في هذه الحالة إلى الإنفاق الكلي وتتمثل بالمساحة تحت المنحني. كما هو موضح في الشكل.



أما إذا كانت الدالة السابقة تمثل دالة إنتاج في ظل قانون تناقص الغلة (وهي من أكثر الاستخدامات لهذا الشكل من الدوال) حيث Y الكمية المنتجة، X وحدات العمل. فمن المتوقع أن تكون: $0<\beta<1$ وهي تمثل في هذه الحالة مرونة الإنتاج للعمل.



كما يمكن أن تستخدم الدالة السابقة كدالة تكاليف في ظروف تزايد النفقة بالمدى الطويل.

ويمكن تقدير هذا الشكل من الدول بطريقة OLS العادية بعد تحويلها للصيغة اللوغاريتمية. حيث تصبح من الشكل:

$$Y^* = \alpha^* + \beta X^*$$

حيث: $\text{Ln } Y = Y^*$ ، $\text{Ln } X = X^*$ ، $\text{Ln } \alpha = \alpha^*$

فنوجد قيم اللوغاريتم المقابلة لقيم Y و X التي نجمعها من العينة المدروسة، ثم نستخدم القيم الجديدة Y^* و X^* في تقدير قيم β و α^* حسب طريقة التقدير الاعتيادية للانحدار الخطي OLS.

❷ الصيغة نصف (شبه) اللوغاريتمية Semi-Log Relationship:

1- الحالة الأولى:

تتمثل الصيغة الأصلية التي تشتق منها بالشكل التالي:

$$Y = e^{\alpha+\beta X+\mu}$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين نصل إلى الشكل:

$$\text{Ln } Y = \alpha + \beta X + \mu$$

تستخدم المعادلة السابقة في تقدير العلاقة بين متغيرين عندما يكون التغير المطلق في المتغير المستقل بمقدار معين مصحوب بتغير نسبي ثابت في المتغير التابع. مثال ذلك نمو الدخل أو الصادرات أو العمالة بمعدل ثابت خلال الزمن. هنا يمكن استخدام الزمن كمتغير مستقل وأحد هذه المتغيرات تابع. ثم نقوم بتقدير معادلة الاتجاه العام. وتمثل β في هذه الحالة معدل النمو في المتغير التابع عبر الزمن.

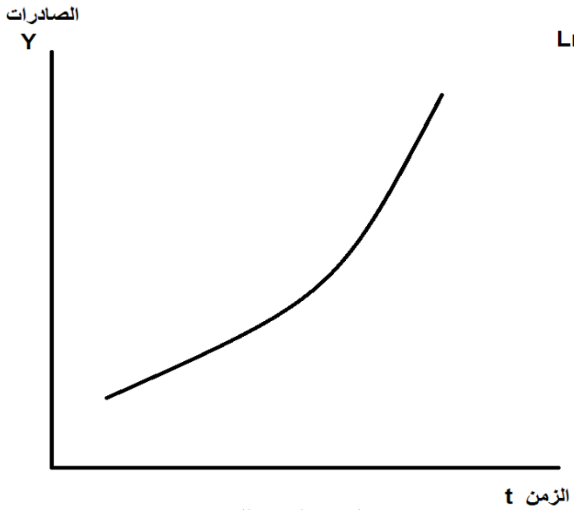
مثال نمو الصادرات خلال خمس سنوات:

الزمن t	1	2	3	4	5	6
الصادرات Y	8	12	18	27	40.5	60.75
معدل نمو الصادرات%	-	50	50	50	50	50
Ln Y	2.079	2.485	2.890	3.296	3.701	4.100

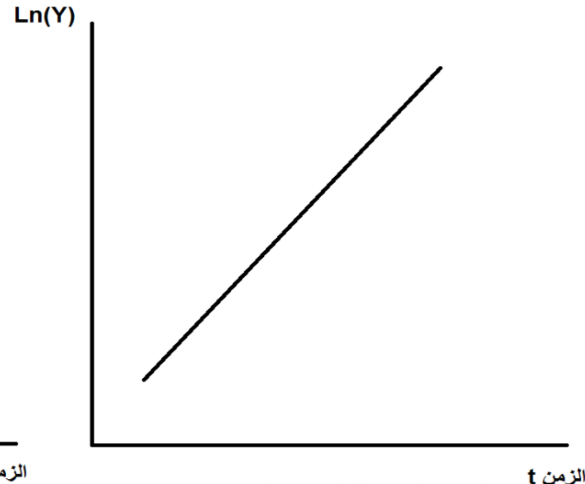
وبحساب المعاملات نجد أن القيم المقدرة :

$$\text{Ln } Y = 1.68 + 0.405\, t + \mu$$

وتفسيرها أن الصادرات تزداد بمعدل سنوي مركب ثابت عبر الزمن مقداره 40.4% وهو يختلف عن المعدل الموضح في الجدول لأنه محسوب على أساس المتوسط لكل سنوات الفترة كمعدل مركب، وليس بسيطاً كالمعدل المحسوب في الجدول.



المسار الزمني للصادرات



المسار الزمني اللوغاريتمي للصادرات

2- الحالة الثانية:

تتمثل الصيغة الأصلية التي تشتق منها بالشكل التالي:

$$e^{Y} = \alpha + X^{\beta} + e^{\mu}$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين نصل إلى الشكل:

$$Y = \alpha^{*} + \beta \, Ln \, X + \mu$$

حيث : $Ln\,\alpha = \alpha^{*}$

تستخدم هذه الدالة في تقدير العلاقة بين المتغيرين إذا كان التغير في المتغير المستقل بنسبة ثابتة يؤدي إلى تغير المتغير التابع بمقدار ثابت. مثال دالة الاستهلاك التالية:

السنة	1	2	3	4	5	6
الاستهلاك Y	85	95	105	115	125	135
ΔY	-	10	10	10	10	10
الدخل X	80	96	115	138	166	199
$\% (\Delta X/X)$	-	20	20	20	20	20

بتقدير معالم الدالة نجدا أن:

$$Y = -155.1 + 54.8 \text{ Ln } X + \mu$$

وفي هذه الحالة يكون:

الميل الحدي للاستهلاك عند القيمة المتوسطة للدخل= $\frac{\hat{\beta}}{\bar{X}} = 54.8 \backslash 132.3 = 0.41$

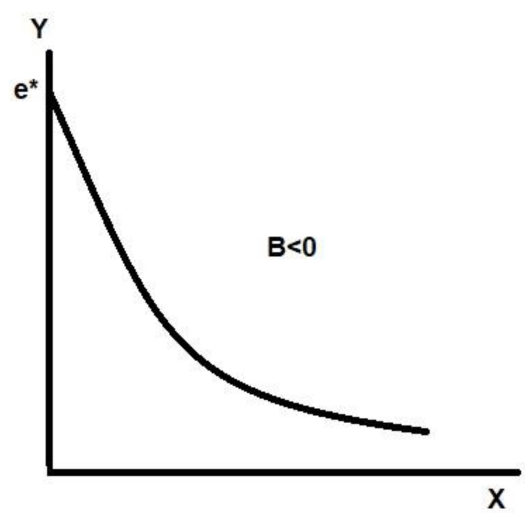
مرونة الاستهلاك للدخل عند متوسط الاستهلاك = $\frac{\hat{\beta}}{\bar{Y}} = 54.8 \backslash 110 = 0.50$ تقريباً. أي أن زيادة الدخل بنسبة 10% تؤدي لزيادة الاستهلاك بنسبة 5% بالمتوسط.

❷ صيغة التحويل لمقلوب Reciprocal Transformation Relationship:

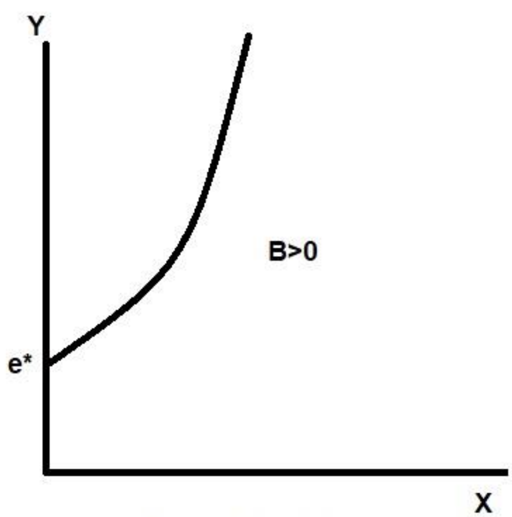
يمكن تمثيلها بالشكل الرياضي التالي:

$$Y = \alpha + \beta \frac{1}{X} + \mu$$

إذا كانت $\alpha>0$ و $\beta>0$ تكون العلاقة بين Y و X عكسية وعندما تصل X إلى مالا نهاية تصل Y إلى α التي تمثل القيمة الدنيا ل Y.



علاقة عكسية غير خطية



علاقة طردية غير خطية

إذا كانت $\alpha>0$ و $\beta<0$ تكون العلاقة بين Y و X طردية، فعندما تزداد X بمقدار معين تزداد Y بمعدل متناقص حتى تصل لحد أقصى يساوي α.

من الأمثلة الاقتصادية لهذه الدالة العلاقة بين بعض أنواع الغذاء (كالفواكه) والدخل.

❷ صيغة لوغاريتم-مقلوب Log-Reciprocal Relationship:

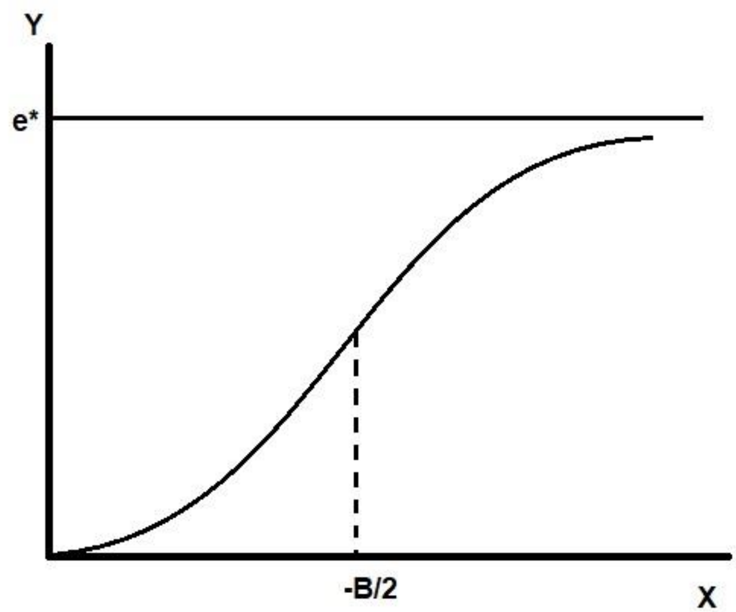
تتمثل الصيغة الأصلية التي تشتق منها بالشكل التالي:

$$Y = e^{\alpha+\beta\frac{1}{X}+\mu}$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين نصل إلى الشكل:

$$Ln\, Y = \alpha + \beta \frac{1}{X} + \mu$$

يأخذ المنحني الممثل لهذه العلاقة شكل حرف S



تستخدم هذه الصيغة عادةً في تقدير العلاقة بين المبيعات والإعلان. حيث يتزايد تأثير الإعلان على المبيعات بمعدل متزايد، ثم ينقلب بعد فترة ليتزايد بمعدل متناقص.