الإنتاج باستخدام عاملين من عوامل الإنتاج

دالة الإنتاج في المدى الطويل:

المدى الطويل: هو الفترة الزمنية الكافية لتغيير كميات جميع عناصر الإنتاج وهي من هذا المنطلق تُسمى بالمدى التخطيطي الذي يسمح باختيار أو تغيير حجم المصنع أو المزرعة أو حجم النشاط أيّاً كان نوعه– ويتوجب علينا في المدى الطويل أن ننظر إلى العلاقة بين الإنتاج الكلي والتغير في كميات عناصر الإنتاج مجتمعة– ففي المدى الطويل تصبح جميع عوامل الإنتاج متغيرة، وبافتراض أن الإنتاج يعتمد على عاملين إنتاجيين X_1 X_2 فإن دالة الإنتاج تأخذ الشكل الآتي:

$$Y= f (X_1, X_2)$$

إذا كان لدينا التابع الإنتاجي: $Y= 12X_1- 3X^2_1+ 18X_2- X_2^2$

عندما $X_1=0$، $X_2=0$ فالإنتاج Y يساوي الصفر

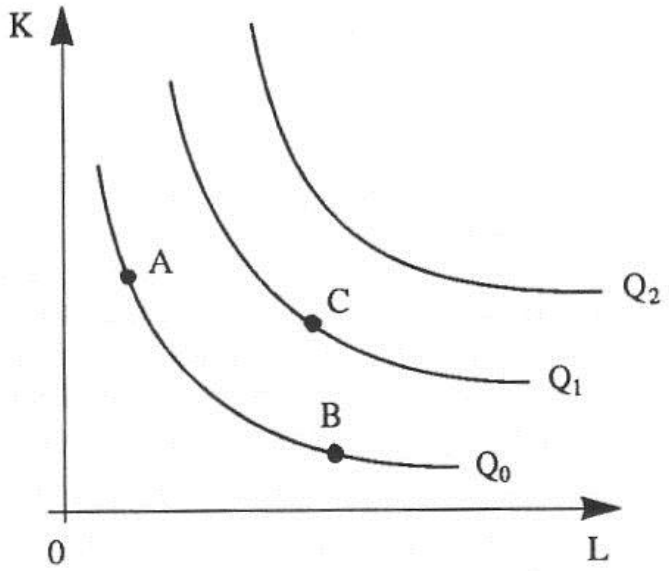
يصل الإنتاج لقيمته العظمى عندما ينعدم الإنتاج الحدي MPP بالنسبة لكلا عنصري الإنتاج:

$$MPP\ X_1= \frac{\partial Y}{\partial X_1} \longrightarrow 12-6X_1=0 \longrightarrow X_1=2$$

$$MPP\ X_2= \frac{\partial Y}{\partial X_2} \longrightarrow 18-2X_2=0 \longrightarrow X_2=9$$

مما يعني أن الوصول للإنتاج الأعظمي يتطلب 2 وحدة من X_1 و9 وحدات من X_2 وإذا استخدمنا في الإنتاج عدد أكبر من وحدات عنصري الإنتاج فإن قيم الإنتاج الحدي تصبح سالبة ويبدأ الإنتاج الكلي بالتناقص حيث تصبح المنشأة في المرحلة الثالثة من الإنتاج.

ويتم التعبير عن دالة الإنتاج في الأجل الطويل بيانياً باستخدام **منحنيات الناتج المتساوي Isoquant** (منحنيات السواء)، فكل منحنى إنتاج متساوي يعبر عن توليفات مختلفة من عنصري الإنتاج.



الإنتاج على طول منحنى الإنتاج المتساوي يكون ثابتاً.

لنفرض أن لدينا عملية إنتاجية تعتمد على عنصري الإنتاج الأساسيين البديلين: العمل L ورأس المال K، فيكون كل منحنى من منحنيات السواء هو موقع هندسي لمجموعة من النقاط تمثل التوليفات المختلفة من عنصري الإنتاج البديلين في الإنتاج اللازمة لإنتاج مستوى معين من الإنتاج.

ولمنحنيات السواء خصائص ثلاث أساسية:

- ✓ متوازية لا تتقاطع مع بعضها
- ✓ المنحنيات الأبعد عن نقطة الأصل تُشير إلى مستوى أعلى من الإنتاج.
- ✓ منحنيات السواء ذات ميل سالب ومقعرة باتجاه الأصل: فالميل السالب يعكس العلاقة التبادلية بين رأس المال والعمل، أما تقعر المنحنيات باتجاه نقطة الأصل فيعني أن معدل إحلال عنصر العمل محل رأس المال في الإنتاج يتناقص مع زيادة استخدام عنصر العمل ويطلق عليه معدل الإحلال (الاستبدال) الحدي.

معدل الاستبدال الحدي Marginal Rate of Substitution- MRS: يعرف المعدل الحدي للاستبدال بين X_1، X_2 بأنه عدد الوحدات الواجب التخلي عنها من X_1 واستبدالها بوحدة إضافية من X_2 شرط أن يبقى مستوى الإنتاج نفسه.

يقاس معدل الاستبدال الحدي بين رأس المال والعمل كما يلي:

$$MRS_{l,k}= \frac{\Delta K}{\Delta L}$$

كذلك:

$$MRS_{l,k}= MPP_K/ MPP_L= \frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial K}}= \frac{\partial L}{\partial K}$$

إذا كان تابع الإنتاج المقدر باستخدام العاملين X_1 X_2 يعطى بالعلاقة الآتية:

$$Y= 10+2X_1-0.1\ X_1^2+3X_2-0.4X_2^2+ 0.2X_1X_2$$

المطلوب: حساب الإنتاج الأعظمي.

الحل: يصل الإنتاج لقيمته العظمى عندما ينعدم الإنتاج الحدي MPP بالنسبة لكلا عنصري الإنتاج:

$$MPP\ X_1= \frac{\partial Y}{\partial X_1} = 0$$

$$MPP\ X_2= \frac{\partial Y}{\partial X_2} = 0$$

$$MPP_1= 2-0.2X_1+ 0.2X_2= 0 \qquad (1)$$

$$MPP_2= 3-0.8X_2+0.2X_1= 0 \qquad (2)$$

بالحل المشترك للمعادلتين:

$$2-0.2X_1+0.2X_2 -3+0.8X_2- 0.2X_1=0$$

$$-1-0.4X_1+X_2=0$$

$$X_2=0.4X_1+1$$

نعوض في (1):

$2- 0.2X_1+ 0.2(0.4X_1 +1)=0$

$2-0.2X_1+0.08X_1+0.2=0$

$2.2- 0.12X_1=0$

$X_1= 18.33$

نعوض في 2:

$3-0.8X_2+0.2(18.33)= 0$

$X_2= 8.34$

بالتالي يكون الإنتاج الأعظمي:

$Y= 10+2X_1-0.1\ X_1^2+3X_2-0.4X_2^2+ 0.2X_1X_2$

$Y= 10+2(18.33) -0.1\ (18.33)^2+3(8.34) -0.4(8.34)^2+ 0.2(18.33* 8.34)$

$Y= 40.83$