المحاضرة الثامنة

مثال رياضي عن مبدأ الربح الأعظمي:

إذا كان لدينا دالة إنتاجية (كوب–دوغلاس) بفرض استخدام كميات متغيرة من عاملي إنتاج X1, X2 من الشكل:

$$Y = X_1^{\frac{1}{5}} . X_2^{\frac{3}{5}}$$

حيث الأسعار كما يلي: P_Y=10 w , P_{x2}=1 , P_{X1}=3

حدد توافق عنصري الإنتاج الذي يعطي التكلفة الدنيا والربح الأعظمي.

الحل:

نوجد معادلة المعدل الحدي للاستبدال بين عاملي الإنتاج كما يلي:

$$MRTS = \frac{\frac{\partial Y}{\partial X2}}{\frac{\partial Y}{\partial X1}} = \frac{\frac{3}{5} X_1^{\frac{1}{5}} . X_2^{-\frac{2}{5}}}{\frac{1}{5} X_1^{-\frac{4}{5}} . X_2^{\frac{3}{5}}}$$

بما أن $1/X = X^{-1}$ يمكن كتابة الكسر كما يلي:

$$MRTS = \frac{3}{1} X_1^{\frac{1}{5}} . X_2^{-\frac{2}{5}} . X_1^{\frac{4}{5}} . X_2^{-\frac{3}{5}}$$

وبما أن ضرب القوى جمعها تصبح النتيجة:

$$MRTS = \frac{3X_1}{X_2} \qquad (1)$$

لنحصل على معادلة مجرى التوسع نطبق الشرط

$$MRTS = \frac{MPP_2}{MPP_1} = \frac{P_{X2}}{P_{X1}}$$

باستبدال القيم نحصل على العلاقة التالية:

$$\frac{3X_1}{X_2} = \frac{1}{3}$$

$$X_2 = 9\ X_1 \qquad (2)$$

العلاقة (2) تمثل معادلة مجرى التوسع وتحدد جميع التوافقات من عاملي الإنتاج التي ينتج عنها التكلفة الدنيا.

ويمكن اعتبار معادلة مجرى التوسع قيداً في الدالة الإنتاجية، فلابد من تحقق هذا القيد لنصل إلى التكلفة الدنيا.

ويمكن استبدال هذا القيد بالدالة الإنتاجية كما يلي:

$$Y = X_1^{\frac{1}{5}} . (9X_1)^{\frac{3}{5}}$$

بالتالي:

$$Y = 9^{\frac{3}{5}} X_1^{\frac{4}{5}} \qquad (3)$$

لتحديد قيمة الإنتاج الذي يعطي الربح الأعظمي، نكتب معادلة الربح، حيث الربح يساوي الإيراد مطروحاً منه التكلفة الكلية التي تنقسم إلى تكلفة متغيرة وتكلفة ثابتة. فتكون معادلة الربح:

$$\pi = P_Y . Y - P_{X1} . X_1 - P_{X2} . X_2 - TFC$$
$$\pi = 10\,Y - 3\,X_1 - X_2 - TFC$$

نعوض المعادلة 2 أي $X_2 = 9\,X_1$ في معادلة الربح السابقة فتصبح:

$$\pi = 10\,Y - 3\,X_1 - 9X_1 - TFC = 10\,Y - 12\,X_1 - TFC$$

ونستبدل قيمة Y من المعادلة (3) فينتج:

$$\pi = 10\left(9^{\frac{3}{5}}\right) X_1^{\frac{4}{5}} - 12\,X_1 - TFC$$

بالتالي أصبح لدينا معادلة ربح بدلالة X_1 ولنعظم هذه الدالة نفاضلها بالنسبة لـ X_1 ثم نساويها للصفر:

$$\frac{\partial \pi}{\partial X_1} = \frac{\frac{4}{5}(10)(9^{\frac{3}{5}})}{X_1^{\frac{1}{5}}} - 12 = \frac{29.9}{X_1^{\frac{1}{5}}} - 12 = 0$$

نحل المعادلة لنوجد قيمة X1:

$$\frac{29.9}{X_1^{\frac{1}{5}}} = 12$$

$$X_1^{\frac{1}{5}} = \frac{29.9}{12}$$

$$X_1 = (2.49167)^5 = 96.04 \cong 96$$

بالتالي تكون: $X_2 = 9x96 = 864$

أي أن الإنتاج الأعظمي يتحقق عندما نستخدم كميات من عنصري الإنتاج تعادل:

$X_2 = 864 \qquad X_1 = 96$

ولمعرفة الإنتاج الأعظمي عند هذا المستوى من استخدام العاملين نستبدل القيم السابقة في معادلة الإنتاج:

$$Y = (96)^{\frac{1}{5}} . (864)^{\frac{3}{5}} = 144$$

ويمكن لنا اختبار تحقق شرط تعظيم الربح

$VMP_{X2} = P_{X2} \qquad VMP_{X1} = P_{X1}$

أو بصيغة أخرى

$MMP_{X2} = (P_{X2} / P_Y) \qquad MMP_{X1} = (P_{X1} / P_Y)$

حيث باشتقاق دالة الإنتاج وتبديل قيم عناصر الإنتاج التي تحقق الربح الأعظمي نلاحظ أن:

$MMP_{X1} = 0.3$ وهذا الرقم مساوي للنسبة السعرية (P_{X1} / P_Y)

$MMP_{X2} = 0.1$ وهذا الرقم مساوي للنسبة السعرية (P_{X2} / P_Y)