

الانحدار الخطي المتعدد

MULTIPLE LINEAR REGRESSION

يشير الانحدار الخطي المتعدد إلى العلاقة الخطية التي تربط المتغير التابع باثنين أو أكثر من المتغيرات المستقلة. وتأخذ الشكل العام:

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_m X_m + \mu$$

حيث m عدد المتغيرات المستقلة المدروسة.

لو فرضنا أن الدالة المدروسة دالة ادخار فتكون Y تشير إلى الدخل، X_1 تشير إلى الدخل، X_2 تشير إلى السن. فخطية العلاقة تعني أن التغير في الدخل من مفردة لأخرى بمقدار وحدة واحدة يصاحبه تغير ثابت في الادخار يساوي β_1 . وأن التغير في السن سنة واحدة يصاحبه تغير ثابت في الادخار بمقدار يساوي β_2 . أي أن تأثير التغير في المتغيرات التفسيرية لا يختلف من مشاهدة إلى أخرى على المتغير التابع. مما يعني وجود قدر كبير من التبسيط عند استخدام نموذج الانحدار الخطي في تقدير العلاقات الاقتصادية. حيث يفترض أن جميع الأفراد يتصرفون بنفس الطريقة وتفضيلاتهم متماثلة. لذا يتم إدخال الحد العشوائي μ ليمثل أخطاء التقدير.

لكن خطأ الحذف في الانحدار الخطي المتعدد يكون أقل منه في الانحدار الخطي البسيط. وتسمى معاملات الانحدار هنا بمعاملات الانحدار الجزئية Partial Regression Coefficients وهي تقيس التغير في المتغير التابع نتيجة التغير في المتغير المستقل بوحدة واحدة مع ثبات المتغيرات الأخرى.

تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

من أكثر طرق التقدير شيوعاً طريقة OLS المربعات الصغرى العادية. فلو فرضنا نموذج انحدار

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 \quad \text{خطي بمتغيرين مستقلين:}$$

يمكن تقدير معالم الدالة بطريقة OLS باستخدام المصفوفات أو المحددات وتكون قوانين تقدير المعالم

الناجمة كما يلي:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_2^2 \sum x_1 y - \sum x_1 x_2 \sum x_2 y}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_1^2 \sum x_2 y - \sum x_1 x_2 \sum x_1 y}{\sum x_1^2 \sum x_2^2 - (\sum x_1 x_2)^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2$$

معامل التحديد المتعدد Multiple Determination Coefficient:

يشير معامل التحديد المتعدد إلى النسبة التي يمكن تفسيرها من التغير الكلي في المتغير التابع بدلالة

المتغيرات المستقلة المدرجة في دالة الانحدار المتعدد.

وكما وجدنا في حالة الانحدار البسيط أن:

$$R^2 = \hat{\beta} \frac{\sum y_i x_i}{\sum y_i^2}$$

ففي حالة الانحدار المتعدد يمكن إيجاد معامل التحديد بطريقة مشابهة:

$$R^2 = \frac{\beta_1 \sum y_i x_{1i} + \beta_2 \sum y_i x_{2i} + \dots + \beta_m \sum y_i x_{mi}}{\sum y_i^2}$$

يلاحظ أنه مع كل إضافة لمتغير تفسيري جديد، نضيف حداً في البسط يمثل أثر هذا المتغير على العلاقة الكلية. وبشكل عام غالباً ما تزداد قيمة معامل التحديد المتعدد كلما أضفنا متغيراً تفسيرياً جديداً، ويندر أن تنقص. مما يعني أن هذا المقياس يتأثر بعدد المتغيرات المستقلة في الدالة. لتلافي هذا القصور يتعين أن نصحح قيمة معامل التحديد بحيث لا يتأثر بعدد المتغيرات التفسيرية. ويمكن ذلك عبر أخذ درجات الحرية في الحسبان ($n-k$) حيث تقل درجات الحرية مع زيادة عدد المتغيرات التفسيرية. ويقدر معامل التحديد المعدل $\text{Adjusted } R^2$ اعتماداً على القانون:

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-k}$$

تتراوح قيمة معامل التحديد المعدل بين 0-1 وكلما اقترب الرقم من الواحد ازدادت المقدرة التفسيرية للنموذج.

يمكن حساب قيمة R^2 بطريقة أخرى حيث:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum \hat{y}_i}{\sum y_i}$$

الانحدار غير الخطي المتعدد

NONLINEAR MULTIPLE REGRESSION

يوجد أمثلة عديدة للعلاقات الاقتصادية المتعددة غير الخطية. ويمكن التفرقة بين نوعين أساسيين في هذا الصدد هما:

① كثيرات الحدود Polynomials:

تعرف بأنها دالة يظهر فيها المتغير المستقل أكثر من مرة، مرفوعاً في كل مرة إلى درجة أعلى. ومن الأمثلة الاقتصادية على هذه الدول:

١. دالة التكاليف الكلية التكعيبية:

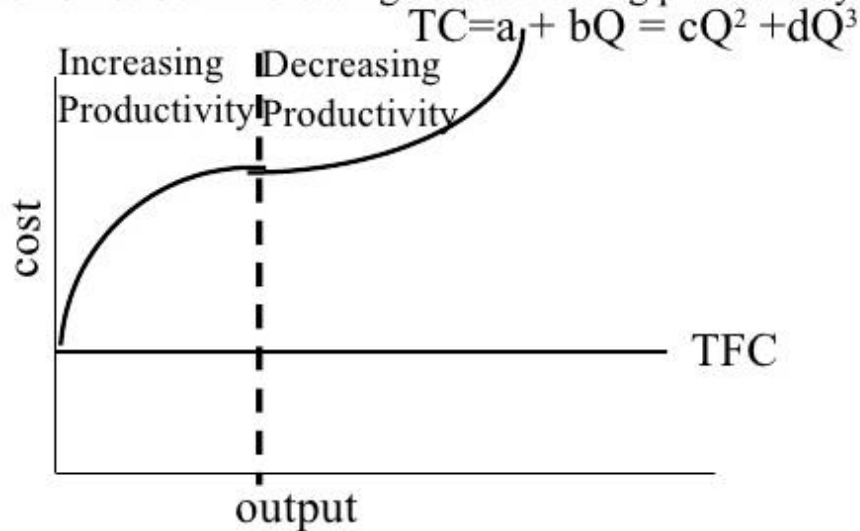
تأخذ هذه الدالة الصيغة التالية:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_1^2 + \beta_3 X_1^3$$

حيث Y تمثل التكاليف الكلية، X_1 تمثل حجم الإنتاج. β_0 تمثل التكاليف الثابتة وتأخذ β القيم التالية:

$$0 < \beta_3 \quad , \quad 0 > \beta_2 \quad , \quad 0 < \beta_1$$

This function combines both increasing and decreasing productivity or returns.



II. دالة التكاليف المتغيرة:

بطريقة مشابهة تأخذ دالة التكاليف المتغيرة الشكل:

$$Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_1^2 + \beta_3 X_1^3$$

III. دالة التكاليف المتوسطة التربيعية:

يمكن الحصول على دالة التكاليف المتوسطة التربيعية بقسمة دالة التكاليف الكلية على حجم الإنتاج X_1 فتصبح الدالة:

$$\frac{Y}{X_1} = \frac{\beta_0}{X_1} + \beta_1 + \beta_2 X_1 + \beta_3 X_1^2$$

ويمكن أن تكتب على الشكل:

$$Y^* = \alpha_0 + \alpha_1 X_1^{-1} + \alpha_2 X_1 + \alpha_3 X_1^2$$

حيث $\alpha_0 = 0$ ثابت وتمثل متوسط التكاليف الكلية عندما $X_1 = 0$ وتكون:

$$0 < \alpha_3, \quad 0 > \alpha_2, \quad 0 < \alpha_1$$

VI. دالة التكلفة الحدية:

تأخذ الشكل العام التالي:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_1^2$$

تقدير كثيرات الحدود

يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية لتقدير هذا النوع من الدوال. فلتقدير دالة التكلفة الحدية نستبدل X_1^2 بـ X_2 ونقدر بنفس الطريقة التي اتبعناها في حالة الانحدار الخطي المتعدد.

② الدوال ذات المرونات الثابتة Functions with Constant Elasticities:

تأخذ الدوال ذات المرونات الثابتة الشكل العام التالي:

$$Y = \alpha X_1^{\beta_1} \cdot X_2^{\beta_2} \cdot \dots X_m^{\beta_m} \cdot e^{\mu}$$

من أشهر الأمثلة الاقتصادية لهذه الصيغة دالة كوب-دوغلاس والتي تأخذ الشكل:

$$Y = \alpha X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2}$$

حيث: Y كمية الإنتاج، X_1 كمية عنصر العمل، X_2 كمية عنصر رأس المال. α المعلمة الناقلة،

β_1 مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر العمل، β_2 مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر رأس المال.

وينبغي الانتباه إلى ما يلي بالنسبة لدالة كوب-دوغلاس:

(1) إذا كانت $1 = \beta_2 + \beta_1$ فذلك يعني وجود حالة ثبات غلة الحجم. أي التغير في كميات

عناصر الإنتاج بنسبة معينة يؤدي إلى تغير الإنتاج بنفس النسبة وفي نفس الاتجاه.

(2) إذا كانت $1 < \beta_2 + \beta_1$ فذلك يعني وجود حالة تزايد غلة الحجم. أي التغير في كميات عناصر

الإنتاج بنسبة معينة يؤدي إلى تغير الإنتاج بنسبة أكبر وب نفس الاتجاه.

(3) إذا كانت $1 > \beta_2 + \beta_1$ فذلك يعني وجود حالة تناقص غلة الحجم. أي التغير في كميات

عناصر الإنتاج بنسبة معينة يؤدي إلى تغير الإنتاج بنسبة أقل وب نفس الاتجاه.

تقدير الدوال ذات المرونات الثابتة:

يمكن تقدير معلمات هذه الصيغة باستخدام طريقة OLS بعد تحويلها إلى الشكل الخطي عن طرق

أخذ لوغاريتم الطرفين. فنصل إلى الشكل:

$$\ln Y = \ln \alpha + \beta_1 \ln X_1 + \beta_2 \ln X_2 + \mu$$

وبترميز قيم اللوغاريتمات نعود للصيغة:

$$Y^* = \alpha^* + \beta_1 X_1^* + \beta_2 X_2^* + \mu$$

يشير معامل التحديد في هذه الحالة إلى النسبة التي تفسرها التغيرات في لوغاريتمات X_1 و X_2 من

التغير في لوغاريتم Y .