القسم الثاني: تقدير الدالة

في هذه المرحلة يتم قياس القيم الرقمية لمعلمات النموذج. فالمعادلة الحقيقية نحصل عليها من تمثيل كل مفردات المجتمع وهي تتمثل بالصيغة

$Y_i= \alpha +\beta X_i + u_i$ وخط الانحدار الحقيقي الذي يمثل العلاقة هو $Y_i= \alpha +\beta X_i$

أما العلاقة المقدرة فنحصل عليها من بيانات العينة، وتتمثل بالصيغة:

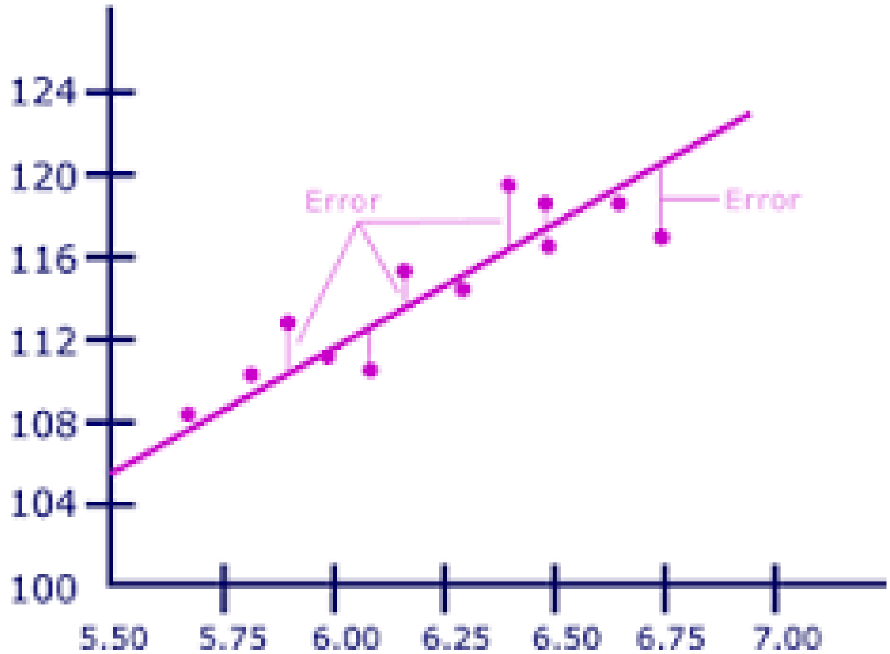
$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + e_i$ وخط الانحدار المقدر هو $Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$

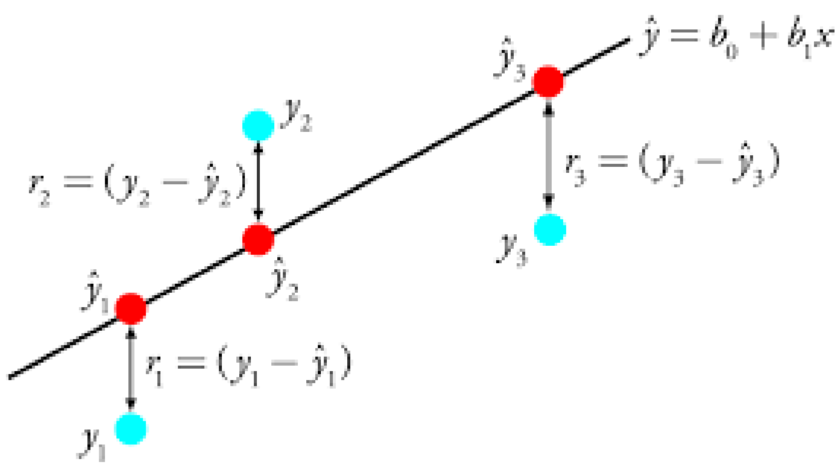
طريقة القياس الملائمة:

تجمع البيانات، وبعد هذه المرحلة نبحث عن طريقة قياسية مناسبة لقياس المعلمتين المقدرتين. ومن أكثر الطرق شيوعاً، طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS (Ordinary Least Squires وتعتمد هذه الطريقة على تدنية الخطأ. ولفهم هذه الطريقة نقوم بالخطوات التالية:

- بعد جمع البيانات عن المتغيرين في صورة عينة. نقوم بتصوير العلاقة في شكل انتشار كما في الشكل التالي. والمطلوب تقدير خط انحدار يمثل العلاقة أفضل تمثيل.
- يمكن تمثيل العلاقة بعدد لا متناهي من خطوط الانحدار. فمثلا يمكن تمثيلها بالخطين AA و BB ويختلف الخطان في مدى انحراف المشاهدات عن القيم المقدرة عليهما. ولا شك أن أفضل خط هو الذي تكون انحرافات القيم المشاهدة عن المقدرة فيه أصغر ما يمكن. ولعل أفضل هذه الخطوط هو الذي تكون عنده الانحرافات الموجبة عنه تساوي الانحرافات السالبة التي تقع أسفله. فتلغي بعضها عند جمعها. أي مجموع الخطأ = الصفر.

$$\sum e_i = \sum Y_i - \hat{Y}_i = 0$$





- لكن في هذه الحالة الانحرافات مازالت موجودة. ولنتخلص من هذه المشكلة نقوم بتربيع الانحرافات قبل جمعها. ويكون خط الانحدار الأفضل عندما تكون مجموع مربعات الانحرافات عند حدها الأدنى.
- مما سبق

$$e_i = Y_i - \widehat{Y}_i$$

وبالتعويض بقيمة $\widehat{Y}_i = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}\, X_i$ نحصل على:

$$e_i = Y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}\, X_i$$

بالتربيع والجمع نحصل على المعادلة (1−1)

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}\, X_i)^2$$

والشرط اللازم للتدنية هو أن المشتقات الجزئية الأولى لمربع الانحرافات تساوي الصفر:

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\alpha}} = 0 \qquad \frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}} = 0$$

نبدأ بإيجاد قيمة α المقدرة. لذا نشتق المعادلة الأخيرة بالنسبة ل α ونساويها بالصفر فينتج:

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\alpha}} = 2\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}\, X_i)(-1) = 0$$

$$-2\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}\, X_i) = 0$$

نقسم الطرفين على 2

$$-\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}\, X_i) = 0$$

$$-\sum Y_i + n\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum X_i = 0$$

❶ المعادلة الطبيعية الأولى

$$\boxed{\sum Y_i = n\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum X_i}$$

الآن نفاضل المعادلة (1−1) بالنسبة لـ β ونساويها بالصفر:

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}} = 2\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}\, X_i)(-X_i) = 0$$

$$-2\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}\, X_i)(X_i) = 0$$

$$-\sum Y_i X_i + \hat{\alpha}\sum X_i + \hat{\beta} \sum X_i^2 = 0$$

المعادلة الطبيعية الثانية ❷

$$\sum \mathrm{Y_iX_i} = \hat{\alpha} \sum \mathrm{X_i} + \hat{\beta} \sum \mathrm{X_i}^2$$

وبحل المعادلتين الطبيعيتين نحصل على قيم ألفا وبيتا المقدرتين. لحل المعادلتين نضرب المعادلة ❶ بمجموع X_i ونضرب المعادلة ❷ بـ n. ثم نطرح الأولى من الثانية.

$$n \sum \mathrm{Y_iX_i} = n\hat{\alpha} \sum \mathrm{X_i} + n\hat{\beta} \sum \mathrm{X_i}^2$$

$$\sum \mathrm{X_i} \sum \mathrm{Y_i} = n\hat{\alpha} \sum \mathrm{X_i} + \hat{\beta} \left[\sum \mathrm{X_i}\right]^2$$

$$\hat{\beta}\, n \sum X_i^2 - \hat{\beta} \left[\sum X_i\right]^2 = n \sum X_iY_i - \sum X_i \sum Y_i$$

$$\hat{\beta} \left[n \sum X_i^2 - \left[\sum X_i\right]^2\right] = n \sum X_iY_i - \sum X_i \sum Y_i$$

هكذا نحصل على قيمة β المقدرة:

$$\hat{\beta} = \frac{n \sum X_iY_i - \sum X_i \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - [\sum X_i]^2}$$

وبضرب المعادلة الطبيعية الأولى بـ مجموع X_i^2 وضرب المعادلة الطبيعية الثانية بـ مجموع X_i، وطرح الثانية من الأولى:

$$\sum X_i^2 \sum Y_i = n\hat{\alpha} \sum X_i^2 + \hat{\beta} \sum X_i \sum X_i^2$$

$$\sum X_i \sum Y_i X_i = \hat{\alpha} \left[\sum X_i\right]^2 + \hat{\beta} \sum X_i \sum X_i^2$$

$$\sum X_i^2 \sum Y_i - \sum X_i \sum Y_i X_i = n\hat{\alpha} \sum X_i^2 - \hat{\alpha} \left[\sum X_i\right]^2$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum X_i^2 \sum Y_i - \sum X_i \sum Y_i X_i}{n \sum X_i^2 - [\sum X_i]^2}$$

وبتبديل قيم X وY بانحرافاتهم عن المتوسطات $x = X - \bar{X}$ و $y = Y - \bar{Y}$ يمكن اختصار القانونين لتصبح:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum yx}{\sum x^2}$$

$$\widehat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$$

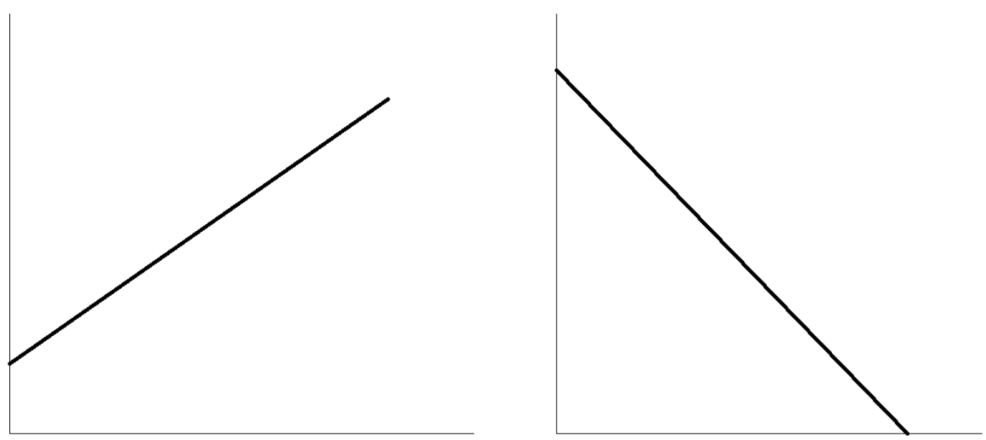
وتوضح المعادلة الأخيرة أن خط الانحدار لابد وأن يمر من النقطة التي تتمثل إحداثياتها بمتوسطي المتغيرين.

الفرق بين الارتباط والانحدار

يوجد بعض أوجه الاتفاق والاختلاف بين الارتباط والانحدار.

أوجه الاختلاف:

- يفترض الانحدار وجود علاقة سببية بين المتغيرين ويوضح أيهما التابع وأيهما المستقل. أما الارتباط فيحدد درجة اقتران المتغيرين دون أن يحدد وجود أي علاقة تابعية أي أيهما تابع وأيهما مستقل.
- إذا كانت المشاهدات منطبقة على خط مستقيم عندها في الانحدار يتغير قيمة المعلمات مع انتقال الخط موازيا لنفسه أو تغير ميله. أما معامل الارتباط فلا يتغير، طالما شكل الانتشار لم يتغير، (في هذه الحالة يساوي الواحد).



أوجه الاتفاق:

- ينحصر التشابه في الإشارة، حيث يتفق معاملي الانحدار والارتباط بالإشارة فإذا كان أحدهما سالب فالآخر حكما سالب. وإذا ساوى معامل الانحدار الصفر يكون الارتباط مساويا للصفر كذلك.